

La Spirale de l'escargot



*Armand Herscovici*

# La Spirale de l'escargot

Contes mathématiques

*Seuil*

REMERCIEMENTS À JACQUES BINSZTOK  
ET À SON ÉQUIPE

Illustration de couverture : Richard Beards

ISBN : 978-2-02-134842-2

© Éditions du Seuil, février 2000

Le Code de la propriété intellectuelle interdit les copies ou reproductions destinées à une utilisation collective. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

*À Caroline et Nathalie*



## Prologue

L'interrogation devant les énigmes de l'inconnu constitue l'une des plus passionnantes aventures de l'esprit : la découverte des merveilles du monde est devant soi. C'est un plaisir sans fin, car point n'est besoin d'aller loin pour rencontrer les nombreux et fascinants mystères des choses simples qui nous entourent.

Connais-tu, ô lecteur, l'étonnante et superbe organisation des feuilles autour des branches de l'orme, du tilleul, du mûrier, de l'amandier, celle des graines dans la fleur de tournesol ? Soupçonnes-tu l'incroyable similitude qu'elle présente avec les courbes de la coquille de l'escargot, avec l'arrangement des pétales de fleur, des tuniques d'oignons, des feuilles de laitues et des pommes de pin ? Dirais-tu que l'on peut y retrouver le nombre d'or ?

Sais-tu que dans la nature, la forme des montagnes, des nuages, des fougères, de l'écorce des arbres comporte des régularités géométriques qui se prolongent jusqu'à l'infini, dans des structures d'une beauté inconnue ? Peux-tu imaginer ses complexités sans limites ? Reçois son message d'harmonie où se mêlent l'ordre et le désordre dans des textures d'une profondeur, d'un enchevêtrement et d'une finesse insoupçonnés. Laisse ton œil émerveillé découvrir ces prodiges et ne résiste pas à l'attraction étrange que tu vas ressentir.

Que penserais-tu, ô découvreur impénitent, si tu constatais que les hommes élaborent sur leur environnement des constructions intellectuelles simples, qui souvent se révèlent des énigmes ou des paradoxes défiant la meilleure intelligence. Cède à l'étonnement, et admire ces subtilités.

N'aimerais-tu pas ressentir l'étonnante poésie que dégage la magie des nombres ? Vois les constructions divinatoires que les anciens Chinois en ont déduit, les étonnants assemblages numériques qu'ils ont bâtis. Laisse-toi entraîner vers les grands nombres, dont l'immensité dépasse l'entendement.

Si ce voyage dans le merveilleux de l'inconnu t'attire, ô explorateur à la curiosité infinie, pénètre sans crainte dans les histoires de ce livre. Elles te conduiront des rives du fleuve Jaune jusque dans l'envoûtante atmosphère de la forêt Humide sur l'île de Vancouver ; sur ta route, tu rencontreras le triangle des Bermudes, Bagdad la magnifique du temps des khalifats, et les îles de la Grèce. Tes compagnons de voyage, tels la tortue divine, le Minotaure, le professeur Archibald Arcsonius, le grand Viking Leif Eiriksen, les subtils coquins de l'Euphrate, le richissime Jonathan Meresmith, et quelques autres, te mèneront là où tu ne t'attends pas à aller.

Et salue-les tous de ma part, je les aime bien.



PREMIÈRE PARTIE

*L'harmonie cachée*



## Histoire de l'ermite, du savetier, de Fibonacci, de l'escargot, et de bien d'autres choses encore, dont l'ordre et le désordre

Lorsque fut la 1 003<sup>e</sup> nuit, Schahrazade dit :

Il est rapporté, dans les annales des savants anciens et dans les écrits des poètes millénaires, qu'il y avait, au pied des contreforts lointains, grandioses, sauvages, magiques et étranges de l'Himalaya, une grotte d'une dimension fabuleuse, dont les parois étaient tendues d'une fine soie brodée de fils d'or et d'argent. Le sol, d'un sable si fin qu'il semblait une poussière d'or, était recouvert des plus magnifiques tapis de la Perse. Sur ces tapis somptueux, des coffres en bois précieux renforcé par des arceaux d'or renfermaient des trésors de pierreries merveilleuses : rubis, topazes, améthystes, opales, lapis-lazuli, diamants, émeraudes, jades et bien d'autres encore. Et sur ces bijoux sans pareils qui auraient suscité l'admiration et le désir des plus grands rois, se reflétait en mille feux une lumière opalescente et laiteuse comme la lune à son quatorzième jour, qui rayonnait d'une voûte aussi haute que le ciel.

Cette grotte appartenait à un ermite d'entre les ermites, qui avait décidé de s'y installer avec les fastueuses richesses accumulées au cours de sa vie, afin d'y attendre, dans la sérénité, la sagesse et la réflexion, la séparatrice des amis et la pourvoyeuse des tombeaux. Mais sa générosité était à l'égal de la somptuosité dans laquelle il vivait, car il offrait ses trésors à pleines poignées à tous ses visiteurs, qui connaissaient son hospitalité légendaire.

Cet ermite avait un aspect physique majestueux, imposant et paisible, inspirant le respect, l'admiration, la confiance, mais aussi une certaine crainte. Sa silhouette droite et immense, agrandie par une maigreur étonnante, était surmontée d'un visage creusé d'autant de

rides profondes que ses épaules portaient d'années. Sa barbe blanche, somptueuse, plongeait jusqu'à terre telle une gigantesque cataracte de neige. Ses yeux, gris et brillants comme une lame de poignard, transperçaient l'âme de celui qu'il regardait, pénétrant comme l'éclair au plus profond de ses pensées secrètes.

Cette allure et cette physionomie avaient été forgées par une vie plus remplie que celle d'aucun autre homme avant lui. Jamais il n'avait habité plus de quelques semaines dans la même ville et le même pays. Il avait navigué sur les rivières, les fleuves, les lacs, les mers et les océans ; il avait franchi les continents, parcouru les plaines et les déserts. Il avait exploré les sombres forêts, escaladé les montagnes, traversé les villages, les villes et les cités. Au cours de ses mille voyages, aucun être humain n'avait échappé à son observation et à sa connaissance. Il avait rencontré des sages et des savants, mais aussi des sots, des stupides et des soudards. Il avait croisé des guerriers et des géants, mais aussi des geignards et des gnomes. Il avait fréquenté des princesses, mais aussi des pauvresses. Il avait connu des valeureux, mais aussi des vauriens. Il avait côtoyé des artistes, mais aussi des ânes. Il avait approché des hommes merveilleux mais aussi des hommes monstrueux, des rois mais aussi des renégats, des francs mais aussi des fourbes, des chevaliers mais aussi des coupe-jarrets, des triomphateurs mais aussi des traîtres. Tout cela.

Aussi, prodigieuses étaient son expérience, sa connaissance et sa compréhension des choses, du monde et des hommes, qu'il s'agisse du spirituel ou du temporel, du rationnel ou de l'affectif, du scientifique ou de l'intuitif. Ce savoir si extraordinaire était comme amplifié par sa prestance et sa physionomie, lorsque, installé au cœur de sa grotte avec ses hôtes, et vêtu de la manière la plus magnifique, il leur parlait. Sa renommée s'était répandue à travers tout l'Orient ; les voyageurs, les marchands, les caravanes, n'hésitaient pas à faire des détours immenses pour venir écouter les histoires merveilleuses qu'il racontait ou pour lui demander conseil.

Un jour, un pauvre voyageur, épuisé, affamé et assoiffé, apparut à l'entrée de la grotte. L'ermite, d'un ton courtois, l'invita à entrer, et, après que les salutations d'usage furent échangées, que sa soif fut éteinte, que sa faim fut apaisée, et que son corps se fut reposé, il dit : « Que mon hospitalité te soit délicieuse et profitable, ô noble voyageur, et puisses-tu te dulcifier l'âme et le cœur en ce

lieu de repos ! Mais, maintenant, pourrais-tu satisfaire une légitime curiosité et me faire connaître qui tu es et quel est le but de ta visite qui, si j'en juge par ton état de fatigue lors de ta venue, t'amène d'un pays fort lointain ? » Et le voyageur répondit : « Il est vrai, ô vénérable ermite, célébrité de tout l'Orient, qu'il m'a fallu parcourir une bien longue route pour parvenir jusqu'à toi. Aussi, le motif de ce considérable déplacement présente pour moi une grande importance, ainsi que tu pourras en juger par toi-même. Mais avant de répondre à ton interrogation fort licite, permets-moi, ô le plus illustre narrateur de tous les temps, ô le plus avisé, de souhaiter tous les bienfaits du ciel sur ta tête et ton âme, en remerciements extrêmes pour l'hospitalité raffinée et délectable que tu me prodigues si généreusement. Et si je n'ai point de présent à t'offrir en témoignage de reconnaissance, c'est pour une raison que tu comprendras après m'avoir entendu. » L'ermite se contenta de hocher la tête en signe d'assentiment, puis, s'étant confortablement positionné sur son siège magnifique dans une posture exprimant la plus grande attention, il fit signe au voyageur de poursuivre son propos.

Le voyageur dit : « Je suis un pauvre savetier, habitant de la ville de Mossoul. Je répare les babouches dans la modeste échoppe que je tiens dans le souk des savetiers de ma ville. Et, s'il est vrai que je suis pauvre à l'extrême limite de la pauvreté, mes clients sont presque aussi pauvres que moi ; ils ne me confient que la réparation de babouches déjà mille fois réparées, pour la seule raison que le prix que je leur réclame est largement inférieur à celui de babouches neuves. Aussi dois-je travailler beaucoup pour gagner bien peu, et malgré mon ardeur au travail (car j'aime mon métier), je n'ai jamais pu sortir de mon état. Mais il se trouve que le destin m'a doté de besoins modestes, car je considère que le bonheur ne consiste pas dans l'accumulation de la fortune (quoique un peu plus d'aisance ne serait pas pour me déplaire), mais plutôt dans l'heureuse harmonie entre les tendances profondes de l'individu et l'environnement dans lequel le destin a situé sa vie. Mais, ô vénérable, respectable et honorable ermite, je regarde cette grotte merveilleuse qui est la tienne et les splendeurs qu'elle contient, et je n'y décèle aucune vaine richesse, mais seulement le raffinement. » L'ermite sourit en lui-même de cette finesse habile et laissa le voyageur poursuivre son récit.

« Or, jusqu'il y a peu de temps, continua le savetier, j'étais un homme heureux, malgré la pauvreté absolue. Car, comme je te l'ai dit, j'aime mon métier. De plus, je suis largement renommé pour ma célérité et pour la qualité minutieuse de mon ouvrage ; c'est avec une joie de tous les instants que je m'efforce de satisfaire au mieux ma clientèle. Mais, surtout, le sort m'a fait don de la meilleure famille qui soit. En premier lieu, mon épouse aimante, toute de miel et de sucre, est d'une douceur, d'une discrétion, d'une générosité de cœur et d'âme, d'une finesse d'esprit, qui n'ont d'égal que sa beauté, laquelle ferait pâlir la lune de jalousie. Pour ne pas te lasser par l'excès de mon admiration, je ne te décrirai point les ondulations de sa sombre chevelure, ni la profondeur de ses yeux immenses, ni la finesse de sa taille, ni la délicate rondeur de sa croupe, ni la petitesse de son pied cambré d'une manière exquise, ni les mille et une autres caractéristiques de sa délicieuse et adorable personne. Cette épouse magnifique (je bénis tous les jours le destin qui me l'a octroyée) m'a donné sept merveilleux enfants, à qui elle a transmis ses immenses qualités, et elle se prépare à en mettre au monde un huitième. Et c'est ici que l'ombre se profile sur mon bonheur.

Car si mes pauvres gains me permettent de faire vivre modestement mais dignement ma famille de bientôt huit enfants, que va-t-il advenir si d'aventure un neuvième enfant vient à mon épouse si prolifique ? Or la renommée de ton immense savoir et de l'extraordinaire pertinence de tes conseils est parvenue jusqu'à moi, bien que je sois un homme simple, comme tu as pu en juger par toi-même. Aussi ai-je entrepris cet immense voyage pour te consulter, car j'espère obtenir de toi la réponse à une question qui, dorénavant, me prive de sommeil. Nombreux sont ceux qui ont tenté de m'en dissuader, estimant que tu ne pourrais répondre à mon interrogation. Et voici ma question, pour laquelle j'ai quitté ma famille depuis de si longs mois, et que j'ose à peine te poser tant je crains qu'elle ne te paraisse naïve. »

Arrivée à ce point de sa narration, Schahrazade vit venir le matin et, comme à l'accoutumée, se tut. Mais lorsque fut la 1 004<sup>e</sup> nuit, elle dit :

« Et voici ma question, pour laquelle j'ai quitté ma famille de si longs mois, et que j'ose à peine te poser, tant je crains qu'elle ne

te paraisse naïve : penses-tu que mon épouse aura un neuvième enfant ? »

À ces mots, l'ermite se plaça dans la posture du penseur ; il courba le dos, posa son coude sur son genou, mit le menton dans sa main, baissa les paupières sur ses yeux pour s'isoler en lui-même, et réfléchit pendant une heure. Puis, il se redressa brusquement, fixa le voyageur de ses yeux gris dont le regard pénétrait jusqu'au fond de l'âme, et demanda : « Combien d'enfants ton aïeul a-t-il eus à la cinquième génération ? » Le voyageur répondit : « Un enfant. » L'ermite continua : « Et ton trisaïeul ? » Le voyageur répondit : « Un enfant. » L'ermite poursuivit : « et ton bisaïeul ? » Le voyageur répondit : « Deux enfants. » L'ermite persévéra : « Et ton grand-père ? » Le voyageur répondit : « Trois enfants. » L'ermite termina : « Et ton père ? » Le voyageur répondit : « Cinq enfants. » Alors, sans hésiter un seul instant, l'ermite prononça ces étonnantes paroles sur le ton de la certitude la plus absolue : « Ton épouse n'aura pas un neuvième enfant. »

À ces mots, le voyageur, stupéfait à la limite de la stupéfaction, ébahi à la limite de l'ébahissement, se dilata de joie à la limite de la dilatation, et son visage s'épanouit à la limite de l'épanouissement. Puis, après avoir réfléchi une heure, il reprit ses esprits et demanda : « Mais, ô merveilleux et extraordinaire ermite, une telle affirmation, formulée avec tant de fermeté et de netteté, ne peut découler de la simple conviction intime, si forte et fondée soit-elle, et doit sans doute constituer la conclusion ultime d'un raisonnement scientifique de nature incontestable. Immense est ma curiosité sur ce point, à la fois pour le problème particulier qui m'a conduit ici, mais aussi pour l'enseignement à caractère général que j'en pourrais tirer, et j'aimerais grandement que tu me dévoiles le mystère de la logique qui t'a conduit à cette étonnante déduction. »

Avec noblesse et affabilité, l'ermite répondit : « J'ouïs et j'obéis. » Puis, ayant rassemblé ses idées et organisé sa pensée, il dit : « Il n'y a point de mystère, ni même de complexité, dans le raisonnement que j'ai développé (car tu as vu juste, fondement logique il y a). Mais peu nombreux sont ceux qui peuvent percevoir la cohérence de la chaîne, ou simplement deviner son existence, lorsque de nombreux maillons intermédiaires sont dissimulés. Or ici, si la démarche est simple (mais cependant rigoureuse), elle s'appuie sur un savoir important que je vais maintenant te révéler.

Tu seras sans doute étonné par la grande distance qu'il fait découvrir entre des faits simples, que chacun peut contempler à tout instant, et la réalité profonde qu'ils recèlent. Merveilleux est le savoir, si riche d'explications, parfois si secret et pourtant si apparent aux yeux de tous.

Dans une lointaine ville d'Occident appelée Pise, grand centre commercial d'une contrée nommée l'Italie, où j'ai habité quelque temps dans ma jeunesse, il y avait autrefois un célèbre mathématicien nommé Fibonacci, ou Léonard de Pise, que j'ai bien connu. Fibonacci était déjà célèbre pour avoir étudié les travaux de l'algébriste Abu Kamil, puis pour avoir rencontré, au cours de ses voyages dans le monde méditerranéen, de nombreux scientifiques et avoir introduit en Occident, après comparaison entre de nombreux systèmes, les méthodes de calcul arabes et hindoues. Mais parmi ses multiples travaux, celui qui nous intéresse dans notre propos s'intitule la *suite de Fibonacci*.

Il s'agit d'une suite de nombres, dont chacun est la somme des deux nombres qui le précèdent, les deux premiers étant 0 et 1. Ainsi, le troisième nombre dans la suite est 1 (0 + 1), le quatrième est 2 (1 + 1), puis vient le 3 (2 + 1), et ainsi de suite. Voici les premiers termes de cette suite : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, etc. Ainsi, le nombre 34 (le dixième dans la suite) est la somme des deux nombres qui le précèdent, 13 et 21.

Il est tout à fait remarquable que les nombres de cette suite apparaissent dans la nature et dans l'art.

Or, il y a plus de mille ans, les géomètres grecs s'intéressaient beaucoup à ce qu'ils appelaient la « section d'or », ou division d'un segment en moyenne et extrême raison. Dans la figure 1, on dit que le point B divise le segment [AC] en moyenne et extrême raison si le rapport du segment le plus court [AB] au segment le plus long [BC] est égal au rapport du segment le plus long [BC] au segment total [AC], c'est-à-dire si  $[AB]/[BC] = [BC]/[AC]$ . On montre facilement que ces deux rapports ont pour valeur numérique, avec six décimales exactes, 0,618 034 (appelons R cette valeur). R s'appelle la *nombre d'or*.

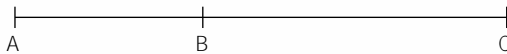


Figure 1. La section d'or :  $[AB]/[BC] = [BC]/[AC]$ .



Si on considère maintenant, dans la suite de Fibonacci, le rapport d'un terme au terme suivant, on trouve :

$$\begin{aligned} 1/2 &= 0,500\ 000 \\ 3/5 &= 0,600\ 000 \\ 8/13 &= 0,615\ 385 \\ 21/34 &= 0,617\ 647 \\ 55/89 &= 0,617\ 978 \\ 144/233 &= 0,618\ 026 \end{aligned}$$

On note que les nombres de la colonne de droite sont de plus en plus proches de R, le nombre d'or. En fait, plus on s'avance dans la suite, et plus le rapport de deux termes successifs se rapproche de R. Ainsi, la suite de Fibonacci est intimement liée au nombre d'or, en ce sens que le rapport de ses termes successifs tend vers R lorsque ces termes deviennent de plus en plus grands.

Et maintenant, ô savetier du souk des savetiers de Mossoul, j'avancerai dans mon explication en évoquant ce que l'on peut appeler les *rectangles de Fibonacci*. Je vais te montrer comment leur construction met en jeu les nombres de la suite de Fibonacci.

L'explication est figurée dans le dessin ci-dessous.

On commence par dessiner deux petits carrés mitoyens, dont la longueur du côté est égale à 1 (au centre du dessin). Puis, s'appuyant sur ces deux carrés, on construit un troisième carré dont la longueur du côté est égale à 2 (c'est celui qui entoure le chiffre 2 sur le dessin). L'ensemble des trois carrés constitue un rectangle dont les côtés ont pour longueur 2 (1 + 1) et 3 (2 + 1). (Il apparaît en trait fort sur le dessin, page suivante.)

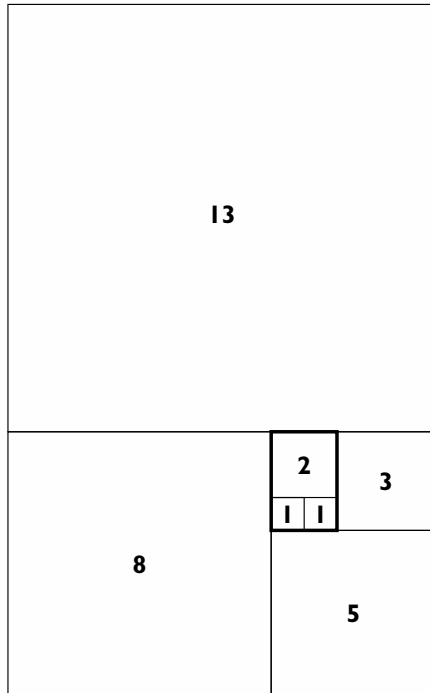


Figure 2. Les rectangles de Fibonacci.

On peut maintenant tracer le carré de côté 3, qui s'appuie sur les carrés de côté 1 et 2 (sur le dessin, ce carré entoure le chiffre 3), d'où le rectangle de côtés 3 et 5. En continuant suivant la même méthode, on obtient les carrés de côté  $3 + 2 = 5$ ,  $5 + 3 = 8$ ,  $8 + 5 = 13$ , et les rectangles de côté 5 et 8, puis 8 et 13. On s'arrêtera à 13 pour que le dessin conserve une certaine simplicité. » Le savetier se dit qu'effectivement il n'était pas utile d'aller vers quelque chose d'encore plus compliqué.

« Tu auras sans doute remarqué, ô noble et courageux voyageur, que la longueur des carrés successifs est un nombre de la suite de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13) et que les rectangles ont des côtés qui sont toujours deux nombres successifs de la suite. Plus la taille des rectangles augmente, plus le rapport de la largeur à la longueur de chacun d'eux se rapproche du nombre d'or.

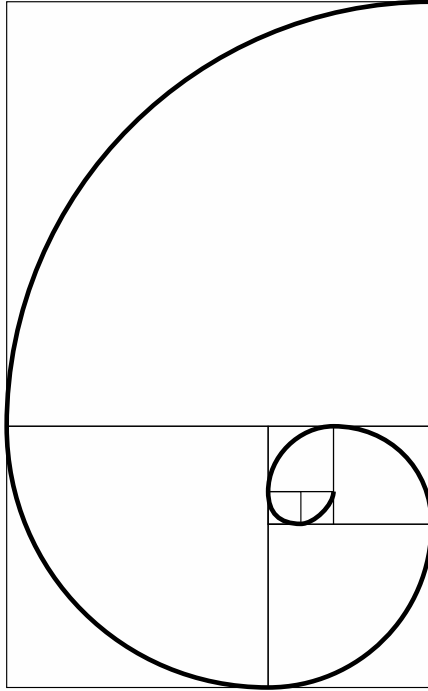


Figure 3. Spirale logarithmique dans les rectangles de Fibonacci.

Maintenant, vois quelle courbe harmonieuse et esthétique peut s'inscrire dans ces rectangles successifs. »

À ce point de sa narration, l'ermite s'interrompt quelques instants, afin de se désaltérer à une vasque de cristal remplie d'une eau délicieusement fraîche. Tout en buvant, il nota avec amusement la mine intéressée mais perplexe du réparateur de babouches, qui se demandait visiblement ce que ces considérations biscornues avaient à voir avec son éventuel neuvième enfant. Mais, discret, il ne fit aucun commentaire et reprit son récit.

« Cette courbe est connue en mathématiques sous le nom sympathique de *spirale logarithmique*. » L'ermite nota à nouveau l'expression du savetier, à l'audition du qualificatif de « sympathique », qu'il avait utilisé intentionnellement. « Il est tout à fait remarquable que cette sorte de spirale se retrouve dans de nombreuses constructions naturelles. La coquille de l'escargot, comme celle de nombreux autres coquillages, en offre un bel exemple.

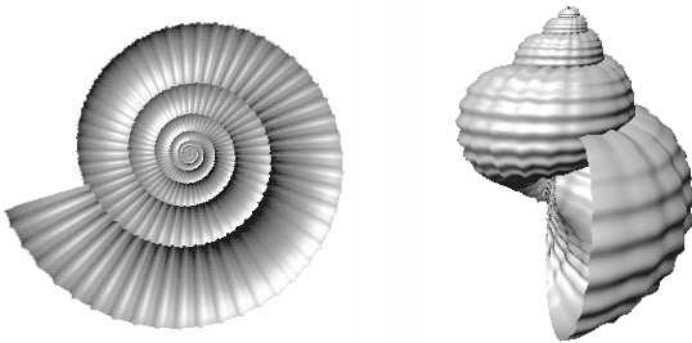


Figure 4. Spirale logarithmique et coquillages.

Mais l'exemple de la fleur de tournesol, représentée schématiquement ci-dessous, est fascinant. Les graines sont réparties sur des spirales qui, partant du centre, s'élancent vers la périphérie. Certaines spirales déroulent leurs courbes harmonieuses dans le sens des aiguilles d'une montre, d'autres dans le sens inverse.

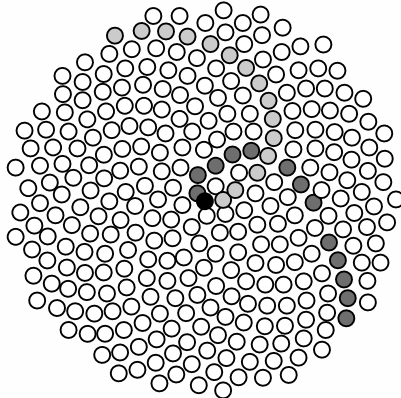


Figure 5. Graines dans la fleur de tournesol.

L'examen fin de cette organisation permet de faire deux constatations étonnantes. En premier lieu, on note qu'il ne s'agit pas de n'importe quelles spirales : on a affaire à des spirales logarithmiques. Mais la deuxième remarque est stupéfiante : le nombre de spirales dans le sens des aiguilles d'une montre et celui des spirales