

# Nombres à compter et à raconter



*Stella Baruk*

# Nombres à compter et à raconter

*Éditions du Seuil*

*25, boulevard Romain Rolland, Paris XIV<sup>e</sup>*

© Éditions du Seuil, octobre 2014

ISBN 978-2-02-112664-8

Le Code de la propriété intellectuelle interdit les copies ou reproductions destinées à une utilisation collective. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.seuil.com](http://www.seuil.com)

## Zéro

– Bonjour ! Pourquoi cet air soucieux ?

– *J'ai à faire un exposé sur les nombres entiers naturels... Je pourrais te poser des questions ?*

– Bien sûr !

– *Je ne savais pas trop comment commencer... Puis j'ai lu qu'un mathématicien avait affirmé que les nombres entiers avaient été créés par Dieu, et les autres par l'homme.*

– Ah ! Et ta question ?

– *Je ne comprends pas : les nombres entiers, c'est facile, un, deux, trois, jusqu'à l'infini. Mais les autres, les fractions, les racines carrées... Ça voudrait dire que l'homme a inventé des nombres plus difficiles que ceux que Dieu a créés ?*

– Cette citation cherche à illustrer ce que tu viens d'évoquer, l'opposition entre des nombres « faciles », comme tu le disais, aisément concevables, un, deux, trois, jusqu'à l'infini, et... les autres. Mais pour autant,

mêler Dieu à tout cela ne me paraît guère utile pour ton propos.

– *Mais alors, pourquoi un mathématicien... ?*

– Alors disons un mot du véritable enjeu, mathématique, que cache cette citation, et du mathématicien en question. Il est allemand, s'appelle Leopold Kronecker, il a vécu de 1823 à 1891 et il est aussi logicien. Et en ce temps-là, comme il est dit dans les contes, certaines sortes de « disputes » entre mathématiciens faisaient rage...

– *Des disputes ?*

– Elles ont existé de tout temps, sur les sujets les plus divers, mais rassure-toi, ils n'en venaient pas aux mains. C'étaient – ce sont encore – des façons différentes de penser des démonstrations, ou des idées nouvelles, se traduisant par des prises de position plus ou moins musclées. En ce temps-là, donc, il s'agissait de conceptions différentes, voire opposées, sur les méthodes à utiliser pour construire – on dit, *fonder* – rigoureusement les mathématiques.

– *On peut avoir des idées différentes sur les mathématiques ? Je croyais que tout le monde devait toujours être d'accord... Quand on dit « c'est mathématique »...*

– C'est vrai, une fois que les résultats qu'elles proposent au cours du temps sont considérés comme indiscutables par la « communauté mathématique »,

donc adoptés puis proposés comme sujets d'étude dans les classes ou les universités. Mais avant cela, durant tout le temps où apparaissent des idées nouvelles, ou de nouveaux objets...

– *Des objets ? Quels objets ?*

– Ah oui ! C'est vrai. Il ne faut pas prendre « objet » dans le sens de ce qui se voit ou se touche. Les objets mathématiques... sont ce qui est l'objet des mathématiques...

– *Me voilà bien avancée...*

– Tu sais bien que chaque discipline s'occupe de l'étude de certains sujets qui lui sont propres. Les objets mathématiques que tu connais sont ceux que tu trouves dans la table des *matières* de ton livre, donc les nombres, justement, les figures de géométrie, les fonctions...

– *Mais alors, pourquoi on appelle ces sujets des « objets », puisqu'on ne peut ni les voir ni les toucher ?*

– Parce que ce sont des objets de pensée, des idées – on dit des *idéalités* – qui n'appartiennent pas à ce qu'on appelle le « monde sensible ». Mais pour qui est familier de ces objets, ils peuvent produire un « sentiment de réalité » aussi fort que la vue de cette chaise.

– *C'est pour ça qu'on parle de nombres réels ?*

– Oui et non.

– *Parce que moi, je ne trouve pas  $\sqrt{3}$  ou  $\pi$  aussi réels que ça, en tout cas sûrement pas autant que la chaise.*

– C'est, à nouveau, le sens de ta citation. Si on qualifie de « naturels » les nombres que tu connais depuis l'enfance, c'est parce qu'ils s'imposent aux sens et à l'intelligence...

– *Parce qu'on les voit dans la nature!*

– Ce ne sont pas eux qu'on voit, mais du *nombreux*, qui en mathématiques constituera une quantité *discrète*, c'est-à-dire composée d'unités semblables et distinctes, qui peuvent donc être dénombrées en comptant de un en un : troupeaux, collections de coquillages, membres d'une tribu; à ces « vrais » objets, on associera les « objets de pensée » que sont ces nombres dits naturels, que tu disais être faciles, un, deux, trois...

Ils sont incontestablement les premiers à être apparus dans l'histoire de l'humanité, tous les autres sont arrivés en désordre, certains ont eu à vaincre des résistances, comme les négatifs, les imaginaires...

– *Créés par les hommes!*

– Oui, mais les naturels aussi, et justement, du fait de leur « évidence », on ne s'en rend pas compte. D'où le fait de les choisir pour fonder la notion de nombre...

– *Tu ne m'as pas dit ce que ça veut dire...*



– C’est vrai... Voyons... Depuis que tu « fais » des mathématiques, tu t’es sans doute aperçue qu’on ne pouvait rien affirmer sans apporter de justification...

– *Ça dépend...*

– Comment, « ça dépend » ?

– *Ben oui ! Nous on ne peut pas, il faut toujours justifier tout, faire des phrases, citer le théorème, mais les profs, eux ils peuvent nous demander d’accepter que des choses sont vraies, mais sans nous dire pourquoi...*

– Ah!... Peut-être parce qu’on l’avait fait avant... En tout cas, aujourd’hui, on dispose d’une construction : on prépare le terrain, les fondations, et une fois ces fondations en place, on construit pierre à pierre, chacune reposant sur la précédente et solidement cimentée à elle... les naturels, les relatifs, les rationnels, les réels... D’où crois-tu que provient cet « ordre » ?

– *Mais... je ne sais pas. C’est supposé être logique, non ?*

– C’est une logique qui a été chèrement payée... et il a fallu des siècles pour établir l’« ordre » en question. Peut-être une comparaison va-t-elle te plaire.

Quand tu étais petite, tu adorais les histoires de sorcières et de fées. Un mathématicien, qui s’appelle Benoît Mandelbrot, dit très joliment que l’histoire des sciences « regorge d’histoires de sorciers et de contes de fées. Un sorcier crée un monstre, non par besoin ni par malice mais simplement pour

se prouver, ainsi qu'à ses émules, que la bête n'était point inconcevable. Le monstre lâché, les paysans lui refusent l'entrée de leurs villages, car ses traits les effraient autant qu'ils forcent leur incrédulité. Et puis un jour, une fée leur dessille les yeux : le monstre est honnête homme, et tout prêt à les servir. On s'y habitue, on finit même par le trouver beau». Ça te plaît ?

– *Mmmoyen. Je ne vois pas très bien le rapport.*

– Au cours du temps, des « mathématiciens-sorciers » ont créé beaucoup de « monstres », c'est-à-dire ont conçu des nombres jusqu'alors inconcevables : les nombres négatifs, les « imaginaires » et bien d'autres, qui ont longtemps fait peur, et ont d'abord été refusés par leurs « collègues ».

– *C'est qui la bonne fée ?*

– Je dirais que c'est *une* fée, qui leur a fait comprendre que ces « monstres » n'étaient pas si monstrueux que ça, simplement en les acceptant dans son royaume, qui est celui de la Non-contradiction.

– *C'est quoi le royaume de la Non-contradiction ?*

– C'est celui des mathématiques, de leurs objets, leur logique, leurs méthodes, leurs théorèmes, dès lors que la coexistence de toutes ces productions n'entraîne pas de contradiction telle que  $a = b$  et  $a \neq b$ , qu'un nombre  $a$  soit à la fois égal et différent d'un nombre  $b$ ; ou bien que, ayant accepté un certain

nombre de propositions, on puisse en déduire une fausse, par exemple  $0 = 1$ .

Mais disons pour te rassurer que, pas plus que les mathématiciens, tu ne rencontreras de contradiction dans les mathématiques que l'on t'apprendra. Si, du fait de l'irruption d'une nouvelle proposition ou d'un nouvel objet, cela se produisait, l'une ou l'autre seraient impitoyablement éliminés.

– *Et c'est tout ?*

– Ah non ! pas du tout. Une fois avéré que les « monstres » sont d'« honnêtes hommes » s'en vient une autre fée, qui décide de les mettre à la mode, de leur fabriquer de beaux atours, de leur apprendre les belles manières : tout le monde alors les trouve beaux, veut les recevoir...

– ... *et ils se marient et ont beaucoup d'enfants...*

– Mais tu ne crois pas si bien dire. Tu les rencontrerais si tu avais à parler de certaines sortes de nombres qui susciterent des débats, voire des passions...

C'est pourquoi le souhait de fonder les mathématiques, de mettre « en ordre » tous ces nouveaux nombres nés de façon « anarchique » a mené tout naturellement aux plus évidents d'entre eux...

– ... *aux naturels... C'est ça que voulait dire Krono...*

– Pas Krono, Kronecker...

– *C'est ce que voulait dire Kronecker... Les naturels semblent naturels... Tandis que les autres...*

– Eh oui ! Parce que ces premiers occupants, les naturels, se sont trouvés être régis par certaines lois, considérées comme « naturelles » elles aussi...

Par exemple, pour te faire éprouver ce que l'on croit « aller de soi », lorsque tu cherches le double de trente-sept, tu ne te rends pas *compte* que tu *distribues* ce « deux fois » sur *trente*, puis sur *sept*, pour trouver *soixante*, plus *quatorze*, *soixante-quatorze*...

– *C'est la distributivité de la multiplication sur l'addition...*

– C'est ça... Et puis des propriétés que tu utilises elles aussi sans t'en douter... Il est quand même plus « évident » de comprendre que :

$$(3 \times 2) \times 5 = 3 \times (2 \times 5)$$

plutôt que :

$$\left(\frac{3}{7} \times \frac{5}{11}\right) \times \frac{8}{17} = \frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{11} \times \frac{8}{17}\right)$$

alors qu'il s'agit de la même propriété...

– *L'associativité.*

– Voilà. Les calculs sur les naturels semblent naturels...

– *Pas les divisions !*

– Disons, les propriétés des deux opérations principales, addition et multiplication. Les « comportements » des nombres naturels vis-à-vis des opérations élémentaires ont servi d'« épreuves initiatiques » aux

nouveaux venus. Une fois les ayant passées avec succès, ils ont alors gonflé la population des nombres tout court. Mais nous nous éloignons de ton sujet. Comment les choses sont-elles supposées se passer ?

– *Je dois faire comme si j'étais la prof...*

– Épatant ! Dans combien de temps ? Dix semaines ?

Parfait pour nous.

– *Du coup, je ne sais plus par quoi commencer... est-ce que je peux d'abord dire que les naturels sont tellement faciles que même les animaux et les bébés savent les reconnaître quand ils sont petits ?*

– Petits... les nombres... ou les bébés ?

– *Tu ris parce que tu te moques des expériences qu'on fait avec les bébés...*

– Je ne me moque pas... Mais bon, ce ne sont les aventures « intellectuelles » ni des nourrissons ni des mésanges qui vont transmettre à tes camarades les émerveillements que peuvent produire ces nombres, « faciles » sans doute à concevoir, mais qui sont à l'origine de problèmes soit « plaisants et délectables », soit redoutables et non encore résolus...

– *Délectables, pas moins ?*

– Ce n'est pas moi qui parle ainsi, mais un certain Bachet, sieur de Méziriac, qui en 1612 en propose tout un recueil qu'il qualifie de cette façon... Tu sais, les amoureux des nombres inventent des problèmes dont on se demande souvent « où ils vont

chercher tout ça», ou bien s'acharnent à trouver la solution de ceux que d'autres ont inventés... Problèmes d'autant plus «délectables» qu'ils ont bien souvent pour caractéristique de s'énoncer très simplement... Pourquoi ne pas mettre tes camarades en appétit avec une jolie conjecture dont on parle beaucoup en ce moment ?

– *C'est quoi une conjecture ?*

– C'est une affirmation dont on n'a encore pu démontrer ni la vérité ni la fausseté... et qui continue donc d'être un sujet de recherche. Elle est plaisamment définie comme un «bébé-théorème», sachant que si elle survit, elle est peut-être vraie, et si elle est démontrée, elle devient un théorème.

Tu as quand même entendu parler de Fermat ? Dont la conjecture, très vieux bébé, n'est devenue théorème qu'en 1995, au bout de 350 ans. Non ? Elle a pourtant à intervalles réguliers défrayé la chronique. Nous aurons sûrement à en parler.

Bachet de Méziriac, justement, l'homme des problèmes *délectables*, nous en apporte un autre exemple, dont l'origine est on ne peut plus sérieuse, puisqu'elle provient d'une lecture qu'il fit de l'*Arithmétique* de Diophante d'Alexandrie, mathématicien grec du III<sup>e</sup> siècle, et qu'il fut le premier à éditer en 1612. L'apport de Diophante a été extrêmement important en théorie des nombres, et on appelle *diophantiens*

les problèmes dont les solutions ne sont que des entiers ou des fractions.

Une des propositions, affirmée par Diophante et reprise par Bachet, est que : tout nombre est soit un carré, soit une somme au plus de quatre carrés. Par exemple :

$$49 = 7^2; 50 = 3^2 + 4^2 + 5^2; 51 = 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Il donne les décompositions en carrés de 1 à 120, dit être allé jusqu'à 325, mais ne pouvoir démontrer la proposition, qui restera à l'état de conjecture, alors même que s'y intéresseront Fermat, et Euler. C'est seulement en 1770, grâce à Joseph Louis Lagrange, que la *conjecture de Bachet* devint « théorème ».

Alors, tu vois, les théorèmes ne sont souvent le fruit que d'un lent cheminement dans l'histoire, et d'une belle continuité dans l'intérêt porté à certaines questions qui intriguent, interrogent, stimulent.

Mais venons-en à celle que je te propose, qui est née dans les années 1950 aux États-Unis, à l'université de Syracuse, et qui est très simple à énoncer.

Choisis un nombre quelconque : s'il est pair, tu le divises par 2 ; s'il est impair, tu le multiplies par 3, et tu ajoutes 1.

– *Et alors ?*

– Puis tu recommences.

– *Combien de temps ?*

– Tu verras. Je te laisse essayer ? Vas-y.

– *Bien. Je choisis 7. Impair, je multiplie par 3, donc 21, j’ajoute 1, 22 ; pair, je divise par 2, d’où 11 ; je continue : 33, donc 34, puis 17, puis ah là, là ! euh... 51, donc 52 ; 26, donc 13, donc 39 puis 40, donc 20, 10, 5, 15 donc 16, puis 8, 4, 2, 1, puis 3 donc 4, 2, 1 puis... Ça recommence ?*

– *Oui... ça boucle. Tu en prends un autre ?*

– *24, puis 12, 6, 3, 9 donc 10, 5, 15, donc 16, 8, 4, 2, 1. Ça fait pareil...*

– *Oui... La conjecture consiste à penser que quel que soit le nombre choisi, on finit toujours par arriver à 1.*

– *Génial ! Je vais leur faire le coup !*

– *Mais méfie-toi, il arrive que le nombre d’étapes – on l’appelle la durée du vol, comme si on finissait par atterrir sur 1 – soit très important, même en partant d’un nombre pas trop grand... Par exemple, si 27 est choisi, il faut 111 étapes avant d’atterrir... et on a atteint une altitude maximale de 9 232.*

– *Ab ! C’est dur...*

– *Mais jusqu’à 26, ce n’est pas trop risqué. Cette conjecture, dite de Syracuse, a passionné et passionne encore les mathématiciens. Même vérifiée jusqu’à des nombres « très grands » – cent trillions –, elle en est encore toujours une, et on continue donc de chercher...*

– *C’est amusant, mais c’est incroyable de passer son temps à ça... À quoi ça sert ?*



– Si tu vas par là, tu risques de réduire ton exposé comme peau de chagrin.

Supposons pourtant que tu aies mis tes camarades en appétit, comment comptes-tu t’y prendre ?

– *Il y a l’histoire... les numérations orales primitives... et puis Sumer, l’Égypte, les Grecs, les Arabes.*

– Très bien. Ce sont des valeurs sûres. Tu m’en parles la prochaine fois ?



## Un

– Alors ? Cette plongée dans le temps ?

– *On dirait que même pour ces nombres faciles, s'apercevoir qu'il y avait des choses pareilles, se poser la question « combien », trouver un moyen de s'en souvenir... rien n'était simple... Le corps humain, en partant du petit doigt, et en numérotant, à la suite des doigts, le coude, l'épaule, la tête, etc., servait de répertoire ! Et puis il y avait aussi les encoches sur un os, ou les petits cailloux qu'on mettait dans des boules d'argile pour vérifier qu'on n'avait pas perdu de moutons, ou des marques sur des tablettes d'argile... Et puis les mots, et puis les chiffres...*

– Bon, tu as survolé des milliers d'années d'histoire. Creusons cette idée de mise en mémoire du « beaucoup ». Quelle est selon toi la difficulté à laquelle on se trouve vite confronté ?

– *C'est évident... C'est quand ça devient des grandes quantités... J'ai lu qu'il y a des tribus primitives qui ne vont pas plus loin que «un, deux, beaucoup»...*

– Tu as peut-être vu aussi qu'on accole autant de guillemets que l'on peut à «primitives» pour ne pas tomber dans les pièges de ce qu'on appelle le *primitivisme*...

Sans doute as-tu appris en histoire ce qu'ont été les constitutions d'empires coloniaux dès le XVI<sup>e</sup> siècle. Et comment depuis ce temps, conquérants, missionnaires et plus tard anthropologues découvrent en Afrique, Amérique ou Océanie des populations sans écriture, considérées comme en dehors de toute civilisation...

– *Oui, et ils ont interrogé ces gens comme s'ils avaient été à l'école, alors qu'ils les appellent «sauvages»!*

– On croyait de cette façon disposer de «témoignages» sur ce qu'étaient les «début» pour l'humanité des notions de nombre et de numération. On croyait aussi que le «nombre» trouve ses «origines» dans l'utilitaire, alors que les travaux récents des anthropologues montrent qu'en réalité ils peuvent avoir des fonctions tout autres. Plutôt donc que *jusqu'à quel nombre un groupe humain peut-il compter*, ce serait d'une part : jusqu'où a-t-il eu *besoin* de compter, et d'autre part, quelle signification attribuer à un «beaucoup» quelconque? Est-il «nombre» ou simplement caractère associé à des explications de



RÉALISATION : IGS-CP À L'ISLE-D'ESPAGNAC  
IMPRESSION : NORMANDIE ROTO IMPRESSION S.A.S. À LONRAI  
DÉPÔT LÉGAL : OCTOBRE 2014. N° 112664 ( )  
*Imprimé en France*

