Chapitre 1

Théorie des ensembles : rappels et compléments

Nous n'avons pas l'intention de présenter ici une théorie mathématique rigoureuse et complète. Il faudrait pour cela des prérequis de logique, un appareillage complexe, choisir entre différentes axiomatiques... Nous nous bornerons à une partie de la « théorie naïve des ensembles », selon l'expression de Paul Halmös (voir [**18**]).

1.1 ENSEMBLES, APPLICATIONS

1.1.1. Ensembles

Acceptons la notion intuitive d'ensemble : un ensemble E est un objet mathématique ; si x est un objet mathématique, la relation d'appartenance $x \in E$ est soit vraie, soit fausse, et les x pour lesquels elle est vraie sont appelés les **éléments** de E. Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.
Un ensemble est défini en **extension** si on en donne la liste des éléments, liste mise entre des accolades. Cas particulier : $\emptyset = \{\}$ est l'ensemble qui n'a aucun élément, on l'appelle **ensemble vide** ; $\{\emptyset\}$ est un ensemble qui a un élément : $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
Il est défini en **compréhension** lorsqu'on définit ses éléments par une propriété, exprimée sous forme d'une proposition mathématique. C'est dans ce second cas qu'il pourra être utile de se poser la question : mon ensemble peut-il être vide ? Admettons

qu'on connaisse l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$. On peut alors définir les ensembles :

- $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$
- $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 60\}$
- $\mathcal{Q} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
- $\mathscr{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N},\ n \mid p \Rightarrow n = 1$ ou $n = p)$ et $(p \neq 1)\}$
- $\mathcal{I} = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists b \in \mathbb{N},\ a^2 - 1973b^2 = -1\}$

Il est facile de voir que l'ensemble P est formé des nombres pairs, l'ensemble $\mathscr{P}$ est formé des nombres premiers, les deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{Q}$ sont égaux, et quant à l'ensemble $\mathcal{I}$, il n'est pas du tout immédiat de décider s'il est ou non vide[1]. Mais étant donné un nombre a, on peut décider rapidement s'il est, ou non, dans l'ensemble $\mathcal{I}$.

On appelle **sous-ensemble** d'un ensemble E, un ensemble F tel que : $\forall x \in F,\ x \in E$, et on écrit $F \subset E$. L'ensemble vide et E lui-même sont des sous-ensembles de E.

Remarques

- Un ensemble est défini en compréhension de la façon suivante
$$\mathcal{A} = \{x \in E \mid p(x)\}$$
et ses éléments sont a priori choisis dans un ensemble E, p étant une propriété qui a un sens pour les éléments de E. Si on ne fait pas cette restriction, on pourrait écrire :
$$\mathcal{A} = \{x \mid x \notin x\}$$
et la proposition $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ risque de donner des maux de têtes : est-elle vraie, mais alors elle est fausse ?...
- Autre remarque : un « vrai » logicien ne fait pas la différence entre des êtres mathématiques qui seraient des ensembles, d'autres qui n'auraient vocation qu'à être des éléments. Dans la « vraie » théorie des ensembles, tout est ensemble.

1.1.2. Union et intersection de deux ensembles, produit cartésien

Si A et B sont deux ensembles, on définit leur union $A \cup B$ et leur intersection $A \cap B$ par :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Ce sont deux ensembles (et cela nécessite un axiome pour l'union, en vertu de la remarque précédente, alors que l'intersection peut être définie comme $\{x \in A \mid x \in B\}$). Les opérations ainsi définies ont des propriétés bien connues

1. Il est non vide : essayer avec $a = 88526$ et $b = 1993$.

que nous ne détaillerons pas. Signalons également la définition de la différence ensembliste

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

et rappelons que la proposition $A \subset B$ est une abréviation de $A \cap B = A$. Si $A \subset B$, l'ensemble $B \setminus A$ s'appelle le complémentaire de A dans B.

On va maintenant définir le couple (a, b) : c'est l'ensemble

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

Cela permet d'obtenir l'équivalence :

$$(a, b) = (a', b') \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a = a' \text{ et } \ b = b')$$

Ne pas confondre le couple (a, b) avec l'ensemble (la paire) $\{a, b\}$; avec notre définition, le couple (a, a) désigne l'ensemble $\{a, \{a\}\}$. Cette définition des couples peut paraître inutilement abstraite, et elle masque la « symétrie » qu'il y a entre (a, b) et (b, a).

Le **produit cartésien**[2] de deux ensembles est alors l'ensemble des couples :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Enfin rappelons également que $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Il contient en particulier l'ensemble vide et E lui-même.

1.1.3. Relations, Applications

Des définitions :

- Une relation binaire $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de $A \times B$; on écrit $a \, \mathcal{R} \, b$ plutôt que $(a, b) \in \mathcal{R}$.
- Une application de A dans B est une relation f qui vérifie :

  $$\forall a \in A, \qquad \exists b \in B, \qquad a \, f \, b$$

  et

  $$\forall a \in A, \ \forall (b, b') \in B \times B, \qquad (a \, f \, b \ \text{ et } a \, f \, b') \ \Rightarrow \ (b = b')$$

  Cela signifie qu'il y a toujours un b tel que tel que $a \, f \, b$ et qu'il y a unicité de b. On écrit :

  $$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & b = f(a) \end{array}$$

On peut composer des relations, $\mathcal{R} \subset A \times B$ et $\mathcal{S} \subset B \times C$ en posant pour x dans A et z dans C :

$$(x, z) \in \mathcal{R} \bullet \mathcal{S} \iff \exists y \in B \qquad (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } \ (y, z) \in \mathcal{S}$$

2. En l'honneur de René Descartes, qui a utilisé les couples de coordonnées pour repérer des points.