

Chapitre 5

Signaux aléatoires. Bruit

5.1 SIGNAUX ALÉATOIRES

5.1.1 Définitions

Un signal est dit **aléatoire** si ses valeurs ou réalisations dépendent du hasard et s'il ne possède pas de représentation analytique. Par contre l'observation de ce signal peut être caractérisée par des grandeurs statistiques ou fréquentielles.

Considérons un ensemble n d'expérimentations ou d'épreuves ou encore d'enregistrements liés à un même phénomène physique. À chacune de ces épreuves, indicées par i , est associée une fonction $s(t)$ qui représente une réalisation du signal aléatoire ou une trajectoire du **processus aléatoire**, modèle mathématique du signal aléatoire (*cf.* figure 5.1). Pour t_0 fixé, l'ensemble des valeurs $s_i(t_0)$ représente les valeurs du signal aléatoire $s(t_0)$.

Un processus aléatoire, décrivant un signal aléatoire est dit **stationnaire** si les propriétés statistiques (moyenne, écart type, etc.) sont indépendantes du choix de l'origine du temps.

Il est plus aisé d'obtenir une expérimentation d'un processus sur un temps long que plusieurs épreuves de ce processus lié à un même phénomène physique. Le processus est dit **ergodique** si les moyennes sur plusieurs réalisations sont équivalentes à des moyennes temporelles correspondant à une seule épreuve.

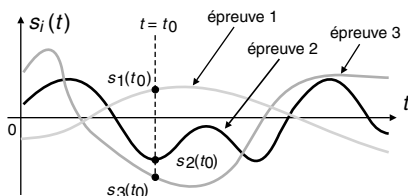


Figure 5.1 Réalisations d'un signal aléatoire provenant de plusieurs épreuves.

Ainsi un processus stationnaire et ergodique pourra être analysé à partir d'une seule expérimentation sur un temps suffisamment long (ces deux propriétés étant vérifiées a posteriori sur les résultats obtenus).

Ce signal aléatoire peut être continu (exemple de la figure 5.1) ou discret (nombre de valeurs fini). Étant donné que la plupart des signaux « informatif » mesurés et étudiés sont de type continus, nous nous intéresserons ici à cette classe de signaux.

5.1.2 Caractérisations statistiques (cf. annexes)

a) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire

Soit un signal aléatoire s défini par sa loi de distribution ou loi de probabilité $p(s)$ et considéré comme stationnaire, nous pouvons caractériser ce signal avec les paramètres statistiques suivants (cf. annexes) :

– valeur moyenne ou espérance :

$$m_s = E_{sp} [s] = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot p(s) \cdot ds \quad (5.1)$$

– valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2 :

$$E_{sp} [s^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot p(s) \cdot ds \quad (5.2)$$

– écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_s^2 = E_{sp} [(s - m_s)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - m_s)^2 \cdot p(s) \cdot ds \quad (5.3)$$

– écart type :

$$\sigma_s = \sqrt{E_{sp} [(s - m_s)^2]} \quad (5.4)$$

– fonction d'autocorrélation statistique : cette fonction, notée $\Gamma_s(\tau)$, est une indication sur la liaison statistique entre les valeurs du signal aléatoire s et s' mesurées à deux instants séparés de τ :

$$\Gamma_s(\tau) = E_{sp} [s(t) \cdot s(t - \tau)] = E_{sp} [s \cdot s'] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot s' \cdot p(s, s'; \tau) \cdot ds \cdot ds' \quad (5.5)$$

Si on considère les variables aléatoires s et s' centrées, on parlera de fonction d'autocovariance $\text{Cov}_s(\tau)$:

$$\text{Cov}_s(\tau) = E_{sp} [(s - m_s) \cdot (s' - m_{s'})] = \Gamma_s(\tau) - m_s^2$$

car

$$m_s = m_{s'} \text{ (stationnarité)}$$

Nous pouvons aussi définir la fonction d'autocovariance normalisée ou encore coefficient de corrélation ou dans ce cas d'autocorrélation $r_{ss}(\tau)$:

$$r_{ss}(\tau) = \text{Cov}_s(\tau) / \sigma_s^2 \quad (5.6)$$