

# Chapitre 1

## Signaux non aléatoires

### 1.1 SIGNAL SINUSOÏDAL, SIGNAL PÉRIODIQUE

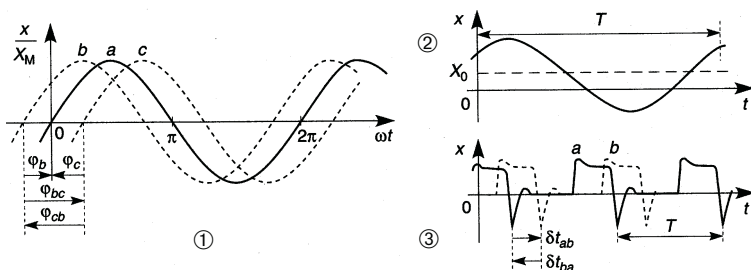


Figure 1.1

① Signal sinusoïdal  $x = x_M \sin(\omega t + \varphi)$

$X_M$  et  $2X_M$ , amplitude et amplitude crête à crête,

$\omega t + \varphi$  et  $\varphi$ , phase et déphasage (en radians, en degrés uniquement dans les résultats), ici  $\varphi_a = 0^\circ$ ,  $\varphi_b = 45^\circ$ ,  $\varphi_c = -45^\circ$ ,  $\varphi_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = 90^\circ$ ,  $\varphi_{cb} = \varphi_c - \varphi_b = -90^\circ$ .

$\omega, f, T$ , pulsation (rad/s), fréquence (Hz, kHz, MHz, GHz), période (s, ms,  $\mu$ s, ns, ps) :  $f = 1/T = \omega/2\pi$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $\omega T = 2\pi$  rad.

② Signal sinusoïdal  $x = X_0 + X_M \sin(\omega t + \varphi)$  avec  $X_0$  composante continue,  $X_0 + X_M$  et  $X_0 - X_M$  amplitudes crêtes.

③ Deux signaux périodiques de mêmes caractéristiques, présentant un décalage en temps  $\delta t_{ab}$  :  $\delta t_{ab} > 0$  si  $a$  en avance sur  $b$ ,  $\delta t_{ba} < 0$  si  $b$  en retard sur  $a$ .

## 1.2 ÉNERGIE, PUISSANCE, VALEURS MOYENNE ET EFFICACE

$u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t) = u(t)i(t)$ , valeurs instantanées de la tension, du courant et de la puissance.  $W$  et  $P_{moy}$ , énergie et puissance moyenne dissipées pendant le temps  $\Delta t$  :

$$W = \int_{\Delta t} p(t)dt = \int_{\Delta t} u(t)i(t)dt, \quad P_{moy} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} u(t)i(t)dt.$$

Si  $u(t) = Ri(t)$ ,

$$P_{moy} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} Ri(t)^2 dt = RI_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \frac{u(t)^2}{R} dt = \frac{U_{eff}^2}{R}.$$

En général, et avec  $\Delta t = T$  si  $x(t)$  est périodique :

$$X_{moy} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} x(t)dt, \quad X_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} x(t)^2 dt.$$

### Remarques : Notations des grandeurs variables et constantes

$v, i, e_g, v_{be}, \dots$  : minuscules pour les grandeurs variables.

$V, I, E_G, V_{BE}, \dots$  : majuscules pour les grandeurs constantes.

$E_g, V_{be}, \dots$  : majuscules et minuscules combinées pour une somme de grandeurs variables et constantes.

Pour une meilleure lisibilité les notations  $\underline{x}, \widehat{X}, \overline{X}$ , pour  $x$  complexe,  $X_M, X_{moy}$  ne sont pas utilisées.

## 1.3 SÉRIE DE FOURIER

### 1.3.1 Notations réelle et complexe

$x(t)$  signal de période  $T_0$ , continu par intervalles et borné (avec  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ) :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\text{ou} \quad x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n),$$

$$a_0 = X_{\text{moy}} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \text{Arctan}(b_n/a_n).$$

$$\text{si } x(t) \text{ paire, } x(-t) = x(t) \implies b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt.$$

$$\text{si } x(t) \text{ impaire, } x(-t) = -x(t) \implies a_0 = a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt.$$

En théorie du signal, il est souvent introduit des fréquences négatives (pour  $n < 0$ ) sans existence réelle :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad X_{\text{moy}} = \frac{c_0}{2}.$$

### 1.3.2 Spectre et bande de fréquences utiles

Des segments verticaux de longueurs  $|c_n|$  le long d'un axe horizontal gradué linéairement en fréquences, aux abscisses  $nf_0$ , constituent le spectre amplitude-fréquence du signal. L'amplitude des raies décroît d'autant moins vite avec  $n$  que les discontinuités de  $x(t)$  sont brutales.

Quand  $x(t) = u(t)$  ou  $i(t)$ , la puissance dissipée dans une résistance est la somme des puissances dues aux différentes composantes du spectre. En s'arrêtant à l'harmonique de rang  $N$ , la puissance est une fraction  $\alpha$  de la puissance totale :

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_{n\text{eff}}^2 + b_{n\text{eff}}^2) = a_0^2 + \sum_{n=1}^N \left[ \left( \frac{a_n}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{b_n}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \alpha X_{\text{eff}}^2,$$

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^N c_{n\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^N \left( \frac{c_n}{\sqrt{2}} \right)^2 = \alpha X_{\text{eff}}^2.$$

Chercher  $N$  tel que  $\alpha = 0,90, 0,95$  ou  $0,99$  montre quelle est la bande de fréquences à transmettre sans atténuation pour assurer une déformation très faible du signal. Chercher  $n = N$  tel que  $c_n$  ne soit plus que 1 % de la plus grande des amplitudes harmoniques donne une valeur généralement supérieure à la précédente.

## 1.4 INTÉGRALE DE FOURIER

### 1.4.1 Calcul de l'intégrale

Quand  $x(t)$  est une impulsion isolée non périodique :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$X(\omega)$  est l'intégrale de Fourier de  $x(t)$ ,  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  ce qui est l'usage en théorie du signal bien que les fréquences négatives n'existent pas.

### 1.4.2 Spectre, énergie, bande de fréquences

$X(\omega)$  donne la courbe enveloppe des raies du spectre désormais adjacentes, des valeurs négatives et positives correspondent à des oppositions de phase, le spectre amplitude-fréquence est donné par  $|X(\omega)|$ , seule la région  $\omega \geq 0$  correspond à la réalité.

Une impulsion isolée est caractérisée par son énergie  $W$  et non par la puissance moyenne. Il est possible de trouver la fréquence  $F = \Omega/2\pi$  à transmettre sans atténuation pour obtenir la fraction  $\alpha W$  de l'énergie transportée par  $x(t)$ , il suffit d'arrêter l'intégration ci-dessous à  $\Omega$  :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega} |X(\omega)|^2 d\omega = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt,$$

un calcul plus rapide, mais qui donne un résultat différent, consiste à chercher  $\Omega$  tel que  $|X(\Omega)|$  ne soit plus que 1 % de la valeur maximale de  $|X(\omega)|$ . Plus les flancs de l'impulsion sont raides, plus les raies décroissent lentement et plus la bande de fréquences occupée est étendue.