FICHE 1

Rappels d'algèbre

I Opérations sur les nombres réels

- **Corps des nombres réels**

  On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un corps pour dire qu'il est muni de deux opérations $+$ et $\times$, avec toutes les propriétés dont vous avez l'habitude.

- **Puissances**

  Définition

  Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \geqslant 2$). On définit « a puissance n » par :

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

  On pose de plus : $a^1 = a$, $a^0 = 1$ (pour $a \neq 0$), $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (pour $a \neq 0$).

  Propriétés

  Pour $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, on a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad a^n b^n = (ab)^n \qquad (a^n)^p = a^{np}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

- **Formules de calcul**

  a et b étant deux réels quelconques, on a :

  Identités remarquables

  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

  Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{où} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Autre égalité

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k.$$

- **Racine n-ième**

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle racine n-ième de x l'unique réel positif a tel que $a^n = x$. On écrit :

$$a = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Propriétés

La fonction $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est une bijection strictement croissante.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, on note $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

Les règles de calcul sur les exposants rationnels sont alors les mêmes que pour les exposants entiers.

II Inégalités

- **Propriétés des inégalités**

Lorsque $x > 0$ et $y > 0$, ou $x < 0$ et $y < 0$, on a :

$$x \leqslant y \iff \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$$

Si x et y sont de signes contraires, le résultat n'est plus le même.

Pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on a : $x^2 \leqslant y^2 \iff x \leqslant y \iff \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
On a toujours : $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$.
Pour $z > 0$: $x \leqslant y \iff xz \leqslant yz$; pour $z < 0$: $x \leqslant y \iff xz \geqslant yz$.

Si on ne connaît pas le signe de z, on ne peut rien dire.

- **Intervalles**

$[a,b]$ est l'ensemble des x tels que : $a \leqslant x \leqslant b$.
$[a,b[$ est l'ensemble des x tels que : $a \leqslant x < b$.
On définit de même $]a,b],]a,b[, [a,+\infty[\ldots$

Pour des réels quelconques, on a :
$a \leqslant x \leqslant b \Longleftrightarrow -b \leqslant -x \leqslant -a$
$\left(a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad a' \leqslant y \leqslant b'\right) \Longrightarrow a + a' \leqslant x + y \leqslant b + b'$

Attention à ne pas soustraire membre à membre des inégalités.
Sinon, on aurait, par exemple, $6 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 5$
qui entraînerait $6 - 1 \leqslant x - y \leqslant 8 - 5$, d'où $5 \leqslant 3$, ce qui serait curieux !

III Valeur absolue

- **Définition**

La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$, est le réel positif tel que :

$$|x| = x \quad \text{si } x \geqslant 0 \qquad ; \qquad |x| = -x \quad \text{si } x \leqslant 0$$

Si x et y sont deux réels, $|x - y|$ représente la distance de x à y.

- **Propriétés**

$|x| = |y| \Longleftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$
$|xy| = |x|\,|y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (si $y \neq 0$) ; $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$
Soit $a > 0$. On a : $|x - b| \leqslant a \Longleftrightarrow b - a \leqslant x \leqslant b + a$

IV Approximations

- **Partie entière**

Étant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$, tel que $E(x) \leqslant x$. On l'appelle la partie entière de x.
On a donc, par définition : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand $x < 0$; par exemple $E(-4,3) = -5$.

- **Valeurs décimales approchées**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un entier d unique tel que

$$d \times 10^{-n} \leqslant x < (d+1) \times 10^{-n}.$$

d est la partie entière de $10^n x$.

$d \times 10^{-n}$ s'appelle la *valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut*, et $(d+1) \times 10^{-n}$ celle *par excès*.

- **Notation scientifique**

Soit x un nombre décimal non nul. Il existe un nombre décimal α et un entier m uniques tels que :

$$x = \alpha \times 10^m \qquad \text{avec } 1 \leqslant |\alpha| < 10.$$

Cette écriture est la notation scientifique de x. Si β est l'entier le plus proche de α, alors l'ordre de grandeur de x est $\beta \times 10^m$.

V Entiers naturels

- **Raisonnement par récurrence**

Soit $E(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier naturel n.
Si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit k, l'implication $E(k) \Longrightarrow E(k+1)$ est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.
Ce principe a diverses variantes, par exemple :
si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication

$$\big[\, E(0) \text{ et } E(1) \text{ et } \ldots \text{ et } E(k) \,\big] \Longrightarrow E(k+1)$$

est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

- **Le symbole $\sum$**

Une somme comme $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{86} + x_{87}$ se note : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{87} x_i$ et se lit : somme de $i=1$ à $i=87$ des x_i.
Dans cette écriture, la lettre i choisie pour désigner l'indice n'intervient pas dans le résultat. On dit qu'il s'agit d'une variable muette.

Propriétés

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \ ; \ \sum_{i=1}^{n}(kx_i) = k\sum_{i=1}^{n} x_i$$