

Chapitre 3

Séries de Fourier

RAPPELS

- Soit f une fonction de l'espace $L^2(0, T)$.
Dans la base orthogonale $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ on a

$$f(x) \stackrel{pp}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \quad \text{et} \quad \langle f, g \rangle = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

- Soit f une fonction périodique de période T , on note S_f sa série de Fourier.

– Dans la base orthogonale $\{1, \cos(\frac{2\pi x}{T}), \sin(\frac{2\pi x}{T}), \dots, \cos(\frac{n2\pi x}{T}), \sin(\frac{n2\pi x}{T}), \dots\}$

$$S_f(x) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + \dots \\ + a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + \dots$$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$	$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) dx$
--------------------------------------	---

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) dx$

soit en utilisant la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{S_f(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))} \quad (\text{R3.1})$$

Pour tout α réel $\int_0^T f(x) dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x) dx$.

Si f est paire, les b_n sont nuls, S_f est une série de cosinus.

Si f est impaire, les a_n sont nuls, S_f est une série de sinus.

– Dans la base orthogonale $\exp(in\omega x)$, avec $n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(in\omega x)} \quad \text{et} \quad \boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp\left(-\frac{in2\pi x}{T}\right) dx.} \quad (\text{R3.2})$$

$$\boxed{c_0 = a_0, \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.} \quad (\text{R3.3})$$

Dans les deux bases, on a $\boxed{S_f(x) \stackrel{pp}{=} f(x)}$

- **Th. de Dirichlet** Pour f de classe C^1 par morceaux, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_f(x) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)) \quad (\text{R3.4})$$

Pour f continue sur \mathbb{R} , S_f converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

- **Th. de dérivation** Pour f de classe C^1 par morceaux, continue sur \mathbb{R} , la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme celle de f et elle converge dans $L^2(0, T)$.
- **Identité de Parseval** (énergie du signal et des harmoniques) :

$$\|f\|_{L^2(0, T)}^2 = T \left(a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (\text{R3.5})$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{c}_n = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (\text{R3.6})$$

Exercice 3.1

1) Développer en série de Fourier les fonctions suivantes et préciser si la série est égale à la fonction correspondante.

- a) $f(t) = t^2$ si $t \in [0, \pi]$, f paire, de période 2π .
- b) $g(t) = t$ si $t \in]-\pi, \pi[$, de période 2π .
- c) $h(t) = t$ si $t \in]-1, 1[$, de période 2.
- d) $K(t) = t$ si $t \in]0, 2\pi[$, de période 2π .

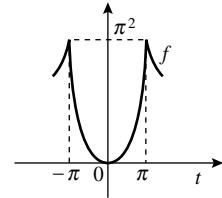
2) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

1) a) f , étant paire, admet un développement en cosinus.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t^2 \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos kt dt$$



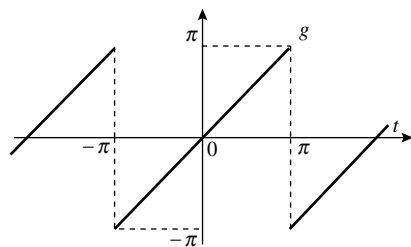
d'où, en intégrant par parties, $a_k = -\frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi} t \sin kt dt = \frac{4}{k^2} \cos k\pi = \frac{4}{k^2} (-1)^k$.

La série de Fourier de f est $S_f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$ et, puisque f est continue et C^1 par morceaux (R3.4), $S_f(t) = f(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

b) On a : $g(t) = \frac{1}{2} f'(t)$ pour $t \neq (2p+1)\pi$.

Comme f est continue et C^1 par morceaux, la série de Fourier de g s'obtient en dérivant terme à terme celle de f :

$$S_g(t) = \frac{1}{2} S'_f(t)$$



$S_g(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt$. Mais, S_g n'est pas égale à g partout.

$$S_g(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } t \neq (2p+1)\pi \\ \frac{-\pi + \pi}{2} = 0 & \text{pour } t = (2p+1)\pi \end{cases} \quad (\text{R3.4})$$