2 ÉTUDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

2.1 SYSTÈMES LINÉAIRES

L'étude des grandeurs incidentes et des grandeurs à maîtriser d'un procédé conduit à sa représentation sous la forme d'un schéma appelé fonctionnel. Afin d'étudier les caractéristiques statiques et dynamiques d'un procédé, il est nécessaire de représenter les fonctions de ses éléments constitutifs. Pour exprimer les relations entre les grandeurs incidentes et grandeurs à maîtriser, il est alors pratique d'utiliser les termes de grandeurs d'entrées et de sorties. Tout procédé étudié est alors représenté par un système comportant une ou plusieurs entrées et une ou plusieurs sorties en fonction du temps (fig. 2.1).

Figure 2.1 – Système à une entrée et une sortie.

2.1.1 Système linéaire

Un système linéaire peut être décrit par une équation différentielle entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$:

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \ldots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \ldots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2}(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

où les coefficients a_i et b_j sont constants.

Le système est dit d'ordre n d'après le degré de la dérivée d'ordre le plus élevé sur $s(t)$. L'équation différentielle décrit le comportement du régime dynamique du système, mais aussi du régime permanent ou statique. Le régime permanent est décrit en annulant les dérivées : la relation entre la sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$ est linéaire.

2.1.2 Système non linéaire

Beaucoup de procédés n'ont pas des comportements linéaires. Par exemple, les pertes thermiques d'un four sont d'autant plus importantes que la différence entre la température interne et la température externe au four est grande. La relation en régime permanent entre la température interne et la commande de chauffe dépend donc du point de fonctionnement auquel on se trouve. La relation en régime permanent entre l'entrée E et la sortie S, appelée caractéristique statique, n'est donc pas une droite (fig. 2.2).

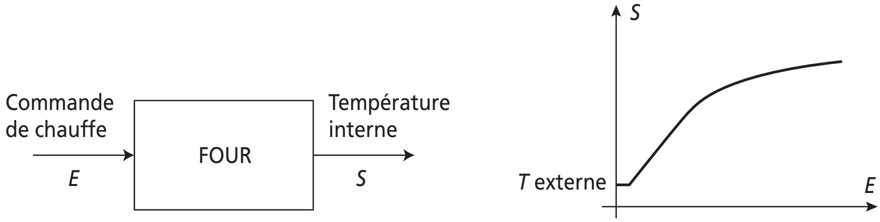

Figure 2.2 – Caractéristique statique entrée-sortie d'un système non linéaire.

L'étude d'un système non linéaire est difficile, c'est pourquoi pour étudier un tel système, on fixe le point de fonctionnement P_0 désiré et on étudie les variations s de la sortie S autour de ce point P_0 de fonctionnement (fig. 2.3). Pour un four, l'étude se fera donc autour de la température souhaitée de fonctionnement.

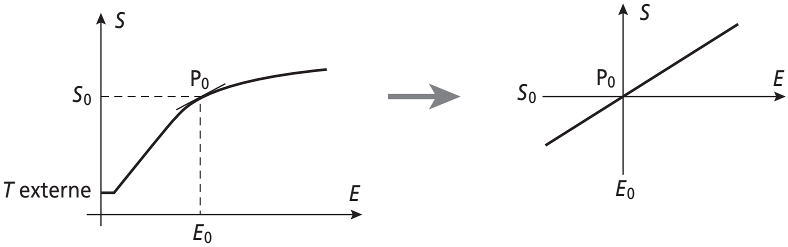

Figure 2.3 – Étude en un point P_0 de fonctionnement d'un système non linéaire.

Tous les systèmes étudiés par la suite seront des systèmes linéaires ou linéarisés autour d'un point de fonctionnement.

2.1.3 Mise en équation d'un système

Pour établir l'équation d'un système, il faut écrire les relations entre les grandeurs physiques d'entrées et de sorties à l'aide des lois des domaines concernés comme par exemple la chimie, l'électricité, la mécanique des solides, la mécanique des fluides, ou la thermodynamique.

Exemple 2.1 Le réservoir.

Un débit Q_e alimente un réservoir (fig. 2.4). Une pompe volumétrique soutire un débit constant Q_s. On cherche la relation entre $H(t)$ et $Q_e(t)$. La section transversale S du réservoir est de 0,25 m^2. Les conditions initiales sont : $H = 1$ m, $Q_{e0} = Q_{s0} = 0{,}02\ m^3.s^{-1}$. À $t = 0$, on augmente le débit Q_e d'une variation $q_e = 0{,}001\ m^3.s^{-1}$.

Remarque

Les lettres majuscules représentent des grandeurs absolues et les lettres minuscules représentent des petites variations autour d'un point de fonctionnement. On écrit donc par exemple $q_e = \Delta Q_e$.

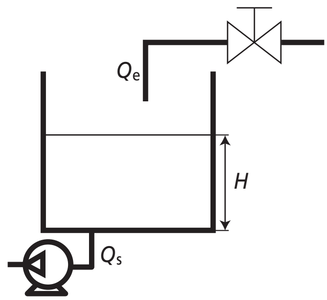

Figure 2.4 – **Niveau dans un réservoir.**

On exprime la variation de volume dV de liquide dans le réservoir en un temps dt, considéré comme très petit, en fonction des débits Q_e, Q_s et dt.

$$dv = (Q_e - Q_s)\,dt$$

Comme la variation de volume est $dv = Sdh$, on obtient :

$$dh = \frac{1}{S}(Q_e - Q_s)\,dt$$

L'équation différentielle décrivant le système étudié est donc :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S}(Q_e - Q_s) = \frac{1}{S}(Q_{e0} + qe - Q_{s0}) = \frac{1}{S}qe$$

soit
$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}001}{0{,}25} = 0{,}004\ \text{m}.\text{s}^{-1}$$

Le coefficient S est constant (il ne dépend pas du temps) et l'ordre le plus élevé de la dérivée sur la sortie $h(t)$ du système est 1. L'équation différentielle de ce système est donc linéaire et d'ordre 1 : c'est ici l'équation la plus simple que l'on puisse trouver.

Si l'on intègre cette équation différentielle on obtient :

$$H(t) = H_0 + \frac{q_e}{S}t \quad \text{soit} \quad H(t) = 1 + 0{,}004\ t$$