CÉCILE HARDOUIN

LES MATHS AU CAPES DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

CAPES/AGRÉGATION
SCIENCES ÉCONOMIQUES
ET SOCIALES

DUNOD

Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN : 978-2-10-071565-7

Table des matières

Introduction **1**

1 Taux de variation, pourcentages **5**

1 Taux de variation . . . 5
2 Coefficient multiplicateur . . . 6
3 Taux successifs, taux moyen . . . 6
3.1 Taux successifs . . . 6
3.2 Taux moyen . . . 7
Exercices . . . 9
Corrigés . . . 12

2 Indices **19**

1 Moyennes . . . 19
1.1 Moyenne arithmétique . . . 19
1.2 Moyenne géométrique . . . 20
1.3 Moyenne harmonique . . . 20
2 Indices . . . 20
2.1 Indice élémentaire . . . 20
2.2 Indice synthétique . . . 21
3 Indices de Laspeyres, Paasche, Fischer . . . 23
3.1 L'indice de Laspeyres . . . 23
3.2 L'indice de Paasche . . . 24
3.3 L'indice de Fisher . . . 25
4 Euros courants et constants . . . 26
Exercices . . . 27
Corrigés . . . 29

3 Suites **33**
1 Généralités . . . 33
2 Suites arithmétiques . . . 34
3 Suites géométriques . . . 35
4 Suites arithmético-géométriques . . . 37
Exercices . . . 38
Corrigés . . . 44

4 Taux d'intérêts, Emprunts **53**
1 Introduction . . . 53
2 Taux d'intérêts . . . 53
2.1 Taux proportionnels, taux équivalents . . . 53
2.2 Intérêts simples et composés . . . 54
3 Emprunts . . . 55
3.1 Valeur actualisée . . . 55
3.2 Emprunts par annuités constantes . . . 56
3.3 Amortissement . . . 57
Exercices . . . 59
Corrigés . . . 63

5 Choix d'investissement **73**
1 Valeur actualisée . . . 73
2 Taux de rendement interne . . . 74
Exercices . . . 75
Corrigés . . . 78

6 Fonctions usuelles **85**
1 Rappels sur les fonctions . . . 85
1.1 Etude d'une fonction réelle . . . 85
1.2 Convexité . . . 87
1.3 Résolution d'équations . . . 89
2 Primitives, calcul intégral . . . 89
2.1 Primitive et intégrale . . . 89
2.2 Quelques propriétés des intégrales . . . 90
2.3 Applications des intégrales . . . 91
3 Fonctions puissance, exponentielle et logarithme . . . 92
3.1 Fonctions puissance . . . 92
3.2 Fonction exponentielle . . . 93

3.3 Fonction Logarithme 94
3.4 Croissances comparées 95
Exercices 96
Corrigés 103

7 Fonctions de coût 113
1 Coût total, coût moyen, coût marginal 113
1.1 Fonction de coût total 113
1.2 Fonction de coût moyen 113
1.3 Fonction de coût marginal 113
2 Relations entre les fonctions de coût 114
2.1 Coût total et coût marginal 114
2.2 Coût moyen et coût marginal 114
2.3 Coût total et coût moyen 114
Exercices 115
Corrigés 119

8 Offre et demande, Elasticité 127
1 Fonctions d'offre et de demande 127
2 Surplus du consommateur, du producteur 127
2.1 Le surplus du consommateur 128
2.2 Le surplus du producteur 128
3 Elasticité 128
3.1 Elasticité de la demande 129
3.2 Calcul de l'élasticité 129
3.3 Autres élasticités 130
Exercices 131
Corrigés 137

9 Concentration 147
1 Courbe de Lorenz 147
2 Indice de Gini 148
Exercices 150
Corrigés 156

10 Fonctions de deux variables 163
1 Utilité 163
2 Optimisation sous contrainte 163
Exercices 165

Corrigés 167

11 Probabilités **169**

1 Evénement, Probabilité 169

1.1 Univers 169

1.2 Evénement 169

1.3 Probabilité 171

1.4 Equiprobabilité 172

2 Probabilités conditionnelles, indépendance 172

2.1 Probabilité conditionnelle 172

2.2 Formule des probabilités totales, formule de Bayes 173

2.3 Indépendance 173

Exercices 175

Corrigés 176

12 Variables aléatoires discrètes **177**

1 Variable aléatoire et loi de probabilité 177

2 Fonction de répartition 178

3 Espérance, variance 178

3.1 Espérance 179

3.2 Variance, écart-type 179

4 Le schéma de Bernoulli 180

4.1 Loi de Bernoulli 180

4.2 Loi binomiale 181

Exercices 183

Corrigés 187

13 Variables aléatoires continues **191**

1 Densité de probabilité 191

2 Espérance et variance 192

3 Fonction de répartition 193

3.1 Fonction de répartition 193

3.2 Propriétés 193

3.3 Quantiles 194

4 La loi uniforme continue 194

5 Loi normale 195

5.1 La loi normale centrée réduite 195

5.2 La loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ 197

5.3 Intervalle de fluctuations . . . 199
6 Approximation de la loi binomiale par la loi normale . . . 199
Exercices . . . 201
Corrigés . . . 205

14 Systèmes d'équations, matrices 209
1 Systèmes linéaires . . . 209
1.1 Système linéaire de n équations à n inconnues . . . 209
1.2 Résolution d'un système d'équations . . . 210
2 Matrices . . . 211
2.1 Définitions . . . 211
2.2 Opérations sur les matrices . . . 212
3 Applications des matrices . . . 213
3.1 Résolution d'un système linéaire . . . 213
3.2 Autres applications . . . 213
Exercices . . . 214
Corrigés . . . 217

15 Modèle entrée sortie, matrice de Leontief 223
1 Système fermé . . . 223
2 Système ouvert . . . 224
Exercices . . . 227
Corrigés . . . 229

16 Graphes 231
1 Premières définitions, vocabulaire . . . 231
1.1 Définitions . . . 231
1.2 Chaîne et cycle . . . 231
2 Chaînes et cycles euleriens . . . 232
3 Matrice d'adjacence . . . 233
4 Graphe pondéré . . . 234
4.1 Définitions . . . 234
4.2 Recherche du plus court chemin, algorithme de Dijkstra . . . 234
4.3 Graphes probabilistes . . . 235
5 Coloriage d'un graphe . . . 235
Exercices . . . 237
Corrigés . . . 238

17 Graphes probabilistes **239**
1 Définitions . . . 239
1.1 Etat probabiliste . . . 239
1.2 Graphe probabiliste . . . 239
1.3 Matrice de transition . . . 240
2 Evolution . . . 240
Exercices . . . 243
Corrigés . . . 245

18 Statistiques descriptives **249**
1 Généralités . . . 249
1.1 Type de variable . . . 249
1.2 Organisation des données . . . 250
2 Traitement d'une variable qualitative . . . 250
3 Traitement d'une variable quantitative discrète . . . 251
3.1 Représentation graphique . . . 251
3.2 Caractéristiques de position ou de valeur centrale . . . 251
3.3 Caractéristiques de dispersion . . . 251
3.4 Fonction de répartition . . . 252

19 Statistiques descriptives pour une variable continue **253**
1 Représentation graphique . . . 253
1.1 Histogramme . . . 253
1.2 Polygone des fréquences . . . 255
2 Fonction de répartition . . . 256
2.1 Définitions . . . 256
2.2 Propriétés . . . 256
2.3 Calcul de $F(x)$ . . . 257
2.4 Représentation graphique . . . 257
3 Paramètres de tendance centrale . . . 257
3.1 La classe modale . . . 257
3.2 La moyenne . . . 257
3.3 La médiane . . . 258
3.4 Comparaison . . . 259
4 Caractéristiques de dispersion . . . 259
4.1 L'étendue . . . 259
4.2 Variance, écart-type . . . 259
4.3 Les quantiles . . . 260

5 Concentration 262
5.1 La médiale 263
5.2 Courbe de Lorenz et indice de Gini 264
5.3 Approximation graphique de la médiale 265
6 Ajustement à la loi normale 266
Exercices 269
Corrigés 273

20 Estimation **281**
1 Echantillon 281
2 Fluctuations d'échantillonnage de la fréquence empirique 282
2.1 Fréquence empirique 282
2.2 Distribution de la fréquence empirique F_n 282
3 Estimation ponctuelle 284
3.1 Estimation de la moyenne et de l'écart-type d'une variable quantitative 284
3.2 Estimation d'une proportion 285
4 Intervalle de confiance 286
Exercices 289
Corrigés 290

21 Statistique bivariée **293**
1 Etude simultanée de deux caractères quantitatifs 293
1.1 Représentation graphique 293
1.2 Covariance, corrélation 294
2 Modèle linéaire simple 295
2.1 Ajustement par la méthode de Mayer 295
2.2 Méthode des moindres carrés ordinaires 296
Exercices 300
Corrigés 302

22 Séries chronologiques **307**
1 Tendance 307
2 Saisonnalité 309
3 Modélisation 310
3.1 Le modèle additif 312
3.2 Le modèle multiplicatif 313
3.3 Désaisonnalisation 315
3.4 Prévision 315

4 Choix de modèle . . . 316
Exercices . . . 317
Corrigés . . . 318

A Tables des dérivées usuelles 321

B Tables des primitives usuelles 325

Introduction

Ce livre fait partie d'une série de trois ouvrages préparant au concours du Capes de Sciences Economiques et Sociales ; les deux autres livres, disponibles dans la même collection, portent sur l'économie et la sociologie.

Cet ouvrage est destiné aux candidats préparant le Capes ou l'Agrégation de Sciences Economiques et Sociales. Il repose sur le programme du Capes. Le programme de l'Agrégation est plus vaste que celui du Capes, mais on observe cependant une coincidence dans les rapports de jury entre les exercices proposés au Capes externe et à l'Agrégation interne. En ce sens, ce livre est une aide solide à la préparation de l'Agrégation interne, et constitue une base pour les candidats à l'Agrégation externe. Il peut également se révéler d'une grande utilité pour les enseignants de SES qui veulent se remettre à niveau en mathématiques afin de préparer au mieux leurs cours.

Les mathématiques sont une discipline connexe aux sciences économiques et sociales ; le programme de mathématiques du Capes résume les concepts indispensables pour appréhender et enseigner les sciences économiques et sociales. Il ne s'agit pas simplement de connaître des formules et utiliser des recettes, il faut comprendre les méthodes, savoir l'origine de la formule et son développement, expliquer et justifier l'approche. Enfin, comprendre le résultat final et l'interpréter.

Les futurs professeurs (et les actuels) doivent maîtriser les savoir-faire de base en mathématiques qu'ils auront à mettre en oeuvre dans le cadre de leur enseignement. On s'attend à ce qu'ils utilisent des schémas et des représentations graphiques pour illustrer leur cours, qu'ils énoncent les modèles et décrivent clairement leurs propriétés, ainsi que les méthodes mathématiques ou statistiques utilisées. Pour un nombre important de points du programme, il est difficile d'imaginer une séquence pédagogique sans appui sur des indicateurs économiques synthétiques, issus de calculs ou de résultats mathématiques ou de statistiques simples. L'exploitation de documents demande une analyse et une interprétation claires des données qu'ils présentent.

Les nombreux rapports de jury rappellent l'importance d'une culture mathématique de base pour enseigner les sciences économiques et sociales, et le rôle discriminant de l'épreuve de mathématiques dans la réussite au concours. Les candidats admis ont, en général, pu montrer leur savoir-faire quant à l'utilisation appropriée des outils mathématiques et statistiques.

Les épreuves de mathématiques dans les concours de SES

Capes externe, Troisième Capes et Troisième Cafep-Capes

L'exercice de mathématiques s'inscrit dans l'une des épreuves orales d'admission ; cependant, il est évident que les principaux concepts mathématiques et statistiques doivent être maîtrisés pour les autres épreuves.

Les deux épreuves d'admissibilité sont une composition de sociologie ou d'économie et une nouvelle épreuve intitulée "Exploitation d'un dossier documentaire". Cette dernière consiste à préparer une séquence pédagogique. Dans les documents proposés, on trouve des graphiques, des tables de données statistiques, différents indicateurs économiques ou sociologiques ; il est donc important de comprendre les tableaux et graphiques, savoir les analyser, traiter les données du dossier en calculant par exemple des taux d'évolution, des quantiles, retracer des courbes d'offre et demande, comparer les caractéristiques de régions ou pays différents, synthétiser, modéliser...

Pour l'admission, l'épreuve orale de "Mise en situation professionnelle" est composée d'un exposé relatif à l'un des thèmes des programmes en vigueur dans les classes de lycée général. De même, si le thème est par exemple celui de l'offre et de la demande, il devient nécessaire d'utiliser les outils mathématiques relatifs aux fonctions, et de les appliquer au cadre de la théorie du consommateur et du producteur.

Enfin, "l'épreuve d'entretien à partir d'un dossier" comporte la résolution d'un ou deux problèmes de mathématiques. Après deux heures de préparation, le candidat a une heure d'entretien avec le jury ; il commence par présenter un exposé, d'une durée de vingt minutes (maximum), suivi d'une discussion avec le jury, d'une durée de vingt-cinq minutes maximum ; la dernière partie, d'une durée de quinze minutes (maximum), est consacrée à la résolution de l'exercice de mathématiques. Les rapports de jury précisent que l'évaluation se fait sous la forme d'un entretien qui porte sur les réponses préparées par le candidat aux questions de l'exercice proposé mais aussi éventuellement sur l'utilisation des outils évoqués dans le cadre de l'analyse des documents du dossier de sciences économiques et sociales. Dans l'utilisation du dossier, *les documents statistiques donnent l'occasion de lire et d'interpréter des données chiffrées. Si ce n'est pas réalisé lors de l'exposé, cela n'est pas en soi sanctionné, mais le jury vérifie alors systématiquement, lors de l'entretien, la maîtrise des savoir-faire quantitatifs. Une mauvaise lecture ou une mauvaise interprétation des documents statistiques peuvent être rédhibitoires* (extrait du rapport de jury du Capes externe 2014).

Le ou les exercices de mathématiques représentent donc un quart de l'épreuve d'entretien du point de vue de la durée ; il est supposé qu'il est noté sur 6 points.
Il est attendu que le candidat montre ses connaissances aussi bien en analyse qu'en probabilités, statistiques ou calcul matriciel.

La calculatrice

L'utilisation de la calculatrice intervient dans de nombreux points du programme : pour l'étude de fonctions, le tracé de leur graphe sera fait avec la calculatrice ; mais c'est aussi un outil pour la recherche de racines, le calcul matriciel, le calcul des coefficients des droites de régression, le calcul de paramètres statistiques simples (moyenne, écart-type), ou de probabilités (quantiles de lois normales). Il est absolument indispensable que le candidat sache utiliser à bon escient et correctement sa calculatrice.

Deux calculatrices de type “graphique” sont conseillées : la Casio 35+ et la Texas TI 82 ou 83. Dans cet ouvrage, nous indiquons dans les corrigés des exercices les résultats des calculs effectués à l’aide de la calculatrice ; cependant, nous ne donnons pas les détails des différentes manipulations ; les manuels des calculatrices sont disponibles en ligne et proposent des exemples pour expliquer l’usage de telle ou telle fonction. Il appartient à chacun de s’entraîner pour maîtriser cet outil indispensable.

Les autres concours

Outre les épreuves sur dossier, à l’oral ou à l’écrit, où il est nécessaire, comme on l’a vu précédemment, d’évaluer, analyser et commenter les différents tableaux et graphiques proposés, les concours du Capes interne, de l’Agrégation interne et externe ont également une épreuve spécifique de mathématiques.

- L’épreuve orale professionnelle d’admission du Capes interne comporte un exposé suivi d’un entretien, ainsi qu’un exercice de mathématiques.
- L’épreuve orale d’admission sur dossier de l’Agrégation interne inclut une ou deux questions d’ordre mathématique ou statistique.
- L’une des trois épreuves orales d’admission de l’Agrégation externe concerne spécifiquement les mathématiques et statistiques.

Organisation de l’ouvrage

Ce livre est organisé en chapitres suivant les différents points du programme du concours du Capes externe. Notons que ce programme recouvre en partie le programme de mathématiques des classes du lycée général. N’étant pas possible de résumer trois années de lycée en un seul ouvrage, nous avons choisi de présenter ce qui est relatif au programme du concours du Capes externe de SES. Il est supposé que le programme des années de lycée est connu et nous invitons le lecteur à se référer à des manuels si besoin.

Chaque chapitre est découpé en trois parties, qui consistent en un résumé de cours, des énoncés d’exercices et des corrigés de ces exercices. La partie “cours” rappelle les notions importantes du thème abordé. Elle peut parfois comporter certaines démonstrations ; lorsque c’est le cas, les preuves sont classiques, considérées comme devant être connues, et peuvent être exigées par le jury. Nous avons illustré le cours par des graphiques et des exemples.

Les énoncés des exercices sont pour la plupart tirés des rapports des jurys des concours du Capes interne et externe, et de l’Agrégation interne. Il est en effet notoire que certains exercices de l’Agrégation interne et du Capes externe se retrouvent dans les rapports des jurys de ces deux concours. Nous avons parfois complété ces énoncés de quelques exercices d’introduction.

Remerciements

Ce livre doit sa conception aux étudiants de la préparation au Capes SES de l'université Paris Ouest Nanterre la Défense. Leur écoute, leur travail sérieux et régulier les ont conduit à l'admission ; je les remercie ici de leur motivation, et espère que mes cours à l'université les aident encore à construire leurs séquences de cours de Sciences Economiques et Sociales en lycée, comme ils ont pu les aider à réussir ce concours difficile.

Je souhaite que ce livre aide les étudiants, futurs professeurs, dans leur préparation des concours d'enseignement, j'espère qu'il leur servira de référence dans l'exercice de leur métier.

Je tiens à remercier Sylvia Dobyinsky, qui m'a proposé de la rejoindre dans cet enseignement à Nanterre, Alexandra Raedecker, responsable du master MEEF à Nanterre, avec qui je partage les espoirs et déceptions que chaque nouvelle réforme nous apporte, Madalina Olteanu, qui assure les cours de préparation au Capes et à l'Agrégation de SES à l'université Paris 1, et qui a eu la gentillesse de relire ce livre ; elle s'est acquittée de cette tâche avec une grande minutie. Ce sont trois collègues et amies, je les remercie particulièrement.

Je remercie également ma famille, que j'ai délaissée quelques heures de nos week-end pour écrire ce livre.

Chapitre 1

Taux de variation, pourcentages

1 Taux de variation

Notons V_0 la mesure d'un caractère quantitatif au temps initial, que l'on note par convention temps zéro T_0 ; et V_1 la valeur de ce même caractère mesuré au temps T_1. La variation absolue de cette mesure entre les deux temps est $V_1 - V_o$. ; mais on s'intéresse à cette variation par rapport à la mesure initiale V_0.

Définition 1.1.1. Le taux de variation relative est $T = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0}$.

On exprime le plus souvent ce taux de variation en pourcentage $t = T \times 100$ %.
Si $t > 0$, on parle de pourcentage d'augmentation ou de taux de croissance, sinon si $t < 0$, de pourcentage de diminution ou taux de décroissance.

Exemple Action Eurotunnel

(Capes interne 2006)
L'action Eurotunnel connait un maximum en septembre 1989 au cours de 13,61 euros. En septembre 2004, elle ne vaut plus que 0,29 euros.

1. Calculer le pourcentage de la baisse de l'action Eurotunnel entre septembre 1989 et septembre 2004.
2. Un épargnant ayant des actions Eurotunnel a perdu environ 785 euros entre ces deux dates. Combien avait-il d'actions en 1989 ?

Corrigé

1. Le pourcentage de baisse est de $t = \dfrac{0,29 - 13,61}{13,61} \times 100 = -97,87$, c'est-à-dire que l'action a baissé de 97,87%.
2. Notons n le nombre d'actions de l'épargnant en septembre 89.

> On a alors $n \times 13,61 - n \times 0,29 = 785$.
> D'où $n = \dfrac{785}{13,61 - 0,29} = 58,93$; n est un nombre entier, on trouve une valeur décimale due aux arrondis sur les valeurs exactes de l'action. On en conclut que l'épargnant avait 59 actions.

2 Coefficient multiplicateur

Définition 1.2.1. Le coefficient multiplicateur associé au taux de variation relative T est

$$m = 1 + T.$$

On a

$$V_1 = mV_0 = (1+T)V_0.$$

> **Exemple Action Eurotunnel**
>
> En mai 2005, l'action cote 0,19 euros et elle remonte de 36,84% entre mai 2005 et novembre 2005.
> On en déduit que le cours de l'action en novembre 2005 est
> $V_1 = (1 + 0,3684) \times 0,19 = 0,26$ euros.

3 Taux successifs, taux moyen

3.1 Taux successifs

Comparaison de deux pourcentages par points

Exemple, si un taux d'inflation passe de 2% à 3%, il a augmenté de 1 "point" et non de 1%.

S'il avait augmenté de 1% il serait passé de 2% à $0,02 \times (1 + 0,01) = 0,0202$ soit 2,02%.

Pourcentage de pourcentage

Il s'obtient en multipliant les deux taux de variation correspondants.

Exemple : mon père m'a donné 30% de ses parts de la société dont il est actionnaire majoritaire avec 75% des parts. Je détiens donc $0,3 \times 0,75 = 0,225$ ou 22,5% des parts de cette société.

Les taux de variation ne s'ajoutent pas ; on utilise les coefficients multiplicateurs lorsque l'on considère des taux successifs.

Si une valeur initiale V_0 varie successivement des taux $T_1,\ T_2, \ldots, T_K$, on considère les coefficients multiplicateurs respectifs $m_1,\ m_2, \ldots, m_K$ et la valeur finale est le produit

$$V_F = m_1 m_2 \ldots m_K V_0.$$

Une conséquence importante est que les hausses et les baisses d'un même pourcentage ne se compensent pas.

Exemple Action Eurotunnel

Reprenons l'exemple Eurotunnel. En mai 2005, l'action cote 0,19 euros et elle remonte de 36,84% entre mai 2005 et novembre 2005.

3. Quelle a été l'évolution entre septembre 2004 et novembre 2005 ?
4. On souhaiterait ramener le cours de l'action de novembre 2005 au cours de son introduction en bourse soit 3,90 euros. Quel doit être le pourcentage de la hausse ?

Corrigés

3. On a vu que le cours de l'action est de 0,29 euros en septembre 2004 et de 0,26 euros en novembre 2005.
   Le taux de variation est de $T = \dfrac{0,26-0,29}{0,29} = -0,1035$, c'est-à-dire que l'action a baissé de 10,35% entre ces deux dates.
   Autre méthode : on enchaîne les deux taux de variation sans calculer la valeur de l'action en novembre 2005 ;
   - le taux de variation de septembre 2004 à mai 2005 est de $T_1 = \dfrac{0,19-0,29}{0,29} = -0,3448$
   - le taux de variation de mai 2005 à novembre 2005 est de $T_2 = +0,3684$.
   - entre septembre 2004 et novembre 2005, le coefficient multiplicateur est le produit de $m_1 = 1+T_1$ et $m_2 = 1+T_2$:
   $$(1-0,3448)\times(1+0,3684) = 0,8966,$$
   et le taux de variation associé est $T = m-1 = 0,8966-1 = -0,1034$ soit une baisse de 10,34%.
4. Le cours de l'action en novembre 2005 est 0,26 euros. On cherche T tel que $0,26\times(1+T) = 3,90$; d'où $T = \dfrac{3,90}{0,26} - 1 = 14,0$ ou encore une hausse de $t = 1400\%$.

3.2 Taux moyen

Une valeur est passée de la valeur initiale V_0 à une valeur finale V_F au cours de n périodes successives, ces périodes étant de durées égales.

Le taux d'évolution (global) sur les n périodes est $T = \dfrac{V_F - V_0}{V_0}$.

Notons T_m le taux moyen d'évolution T_m sur une période ; appliqué n fois, il vérifie

$V_F = (1+T_m)^n V_0$. Ce taux moyen est donc tel que $V_F = (1+T)V_0 = (1+T_m)^n V_0$, c'est-à-dire

$$1+T = (1+T_m)^n.$$

On a donc

$$T_m = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1$$

ou encore

$$T_m = (\frac{V_F}{V_0})^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemple Action Eurotunnel

5. On suppose qu'entre la mise en bourse à 3,90 euros et le taux le plus haut à 13,61 euros, il y a eu 5 hausses successives d'un même pourcentage. Lequel ?

Corrigé

Notons T_m le pourcentage d'augmentation moyenne ;
on a $13,61 = (1+T_m)^5 \times 3,90$.
D'où $(1+T_m)^5 = \dfrac{13,61}{3,90}$ puis $T_m = \left(\frac{13,61}{3,90}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0,2840$.
Le pourcentage moyen d'augmentation est de 28,4%.

Exercices

Exercice 1.1. En 1990, une ville comptait 50.000 habitants. Entre 1990 et 2000, cette ville a perdu 5% de sa population. Entre 2000 et 2010, la ville regagne 5% de sa population.

1. Quel est le nombre d'habitants de cette ville en 2010 ?
2. Quel est, en pourcentage, la variation du nombre d'habitants entre 1990 et 2010 ? On remarque ici que cette variation globale est égale au produit des deux taux. Est-ce toujours le cas ?
3. Quel aurait du être le taux d'accroissement de la population entre 2000 et 2010 pour retrouver la population de 1990 ?

Exercice 1.2. Dans un pays X l'inflation était de 10% au cours de l'année 2001. S'il en est de même au cours de l'année 2002, quelle est l'inflation sur l'ensemble des deux années ?

Exercice 1.3. Dans un couple, le salaire de l'homme augmente de 4% et celui de la femme de 6%. On sait que, avant augmentation, l'homme gagnait 20% de plus que la femme. Quel est, en pourcentage, l'augmentation du revenu total du couple ?

Même question si l'homme gagne 40% de plus que sa femme ?

Exercice 1.4. (Capes externe 2000)

Une société de démarchage à domicile s'intéresse aux dédits qui s'expriment dans les délais légaux suivant les ventes. Cette société propose deux types de produits notés A et B. Dans l'ensemble, la société enregistre 30% de dédits. Le produit A constitue le tiers des ventes, et 25% de ses acheteurs se dédisent.

1. Quelle est la proportion de dédit pour les acheteurs du produit B ?
2. Quelle est finalement la part occupée par le produit A dans les ventes confirmées de cette société ?

Exercice 1.5. (Capes interne 2007)

Un fournisseur d'accès internet propose à ses clients 3 formules ; le contrat pour ces formules est d'un an et le client peut changer de formule au bout d'une année.

Formule A : forfait de 30 euros par mois avec consommation illimitée.

Formule B : somme forfaitaire de 10 euros par mois à laquelle s'ajoute 0,50 euro par heure de connexion.

Formule C : 1 euro l'heure de connexion.

1. (a) Calculer le prix payé avec chaque formule pour 1 mois avec 20 heures de connexion sur le mois.
   (b) Pour quelle formule peut-on parler d'un prix proportionnel au nombre d'heures d'utilisation ?
2. On note x le nombre d'heures de connexion mensuelle et y le prix payé par mois.
   (a) Représenter y pour les 3 formules sur le même graphique.
   (b) Comparer les différentes formules à l'aide du graphique précédent.

3. En janvier 2007, une personne utilise 40h de connexion et en février elle augmente son temps de connexion de 10%. Calculer, selon les formules, le pourcentage d'augmentation du prix payé.
4. Une enquête a permis d'établir les résultats suivants concernant les changements de formule.

Année $n+1 \setminus$ Année n	A	B	C
A	70%	50%	30%
B	20%	30%	30%
C	10%	20%	40%

Par exemple, la première colonne du tableau signifie que 70% des personnes ayant choisi la formule A la conserve après un an, 20% de ces personnes changent pour la formule B et 10% changent pour la formule C.

Une personne choisit au hasard sa formule la première année. Calculer la probabilité des événements suivants :

E_1 : "La personne utilise la formule A la deuxième année".

E_2 : "La personne utilise les deux années de suite la même formule".

Exercice 1.6. (Agrégation interne 2009)

Une entreprise de torréfaction et de distribution de café s'adresse exclusivement à deux fournisseurs que l'on nommera A et B, pour s'approvisionner en matière première. Elle procède ensuite à des mélanges de cafés avant commercialisation. Le tableau suivant donne les prix pratiqués par chacun des fournisseurs auprès de cette entreprise en 2004 et 2008 pour une tonne de café, ainsi que le prix moyen d'acquisition d'une tonne de café pour l'entreprise pour chacune de ces deux années, auprès des deux fournisseurs A et B.

Année	Prix du fournisseur A	Prix du fournisseur B	Prix moyen d'achat pour l'entreprise
2004	800	1400	1200
2008	1000	1500	1100

1. Calculer le taux global d'évolution sur la période :
   (a) du prix de la tonne de café chez le fournisseur A
   (b) du prix de la tonne de café chez le fournisseur B
   (c) du prix moyen d'acquisition d'une tonne de café pour l'entreprise
2. Calculer le taux annuel moyen d'augmentation du prix de la tonne de café pour le fournisseur A.
3. Devant le contenu du tableau, un élève s'étonne : "Alors que les prix pratiqués par les deux fournisseurs ont augmenté, le prix moyen d'acquisition a baissé. D'après les propriétés de la moyenne, ce tableau de données est nécessairement faux".

Exercice 1.7. (Capes externe 2010)

1. (a) Le prix d'un litre d'un produit liquide est p (exprimé en euros). Quel est le volume V_1, exprimé en litres, de ce produit acheté avec 10 euros ?
   (b) Le prix du litre de ce liquide a augmenté de 25% par rapport à p. Quel est le pourcentage de diminution de volume acheté pour 10 euros au cours de cette évolution de prix ?
2. Plus généralement quand le prix augmente de $t\%$ alors le volume acheté pour la même somme baisse de $n\%$. Déterminer la valeur de n en fonction de t.
   On pose $x = \dfrac{t}{100}$ et $y = \dfrac{n}{100}$. Exprimer alors y en fonction de x.
   (a) Pourquoi la baisse de volume en pourcentage est-elle toujours inférieure à l'augmentation du prix exprimée en pourcentage ?
   (b) Peut-on envisager une diminution de la moitié du volume de ce liquide acheté pour une même somme et si oui, après quelle augmentation de prix ?
3. On s'intéresse à l'écart entre x et y. Déterminer les valeurs de x telles que $|y-x| \leq 0,01$. Quelle interprétation peut-on en faire ?

Exercice 1.8. (Capes interne 2011)

La subvention accordée par une entreprise à son club sportif était de 3000 euros pour l'année 2005. Depuis 2005, l'évolution de cette subvention en pourcentage d'une année à l'autre est donnée par le tableau ci-dessous :

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Evolution en %	+17%	+15%	+10%	+9%	+6%
Montant de la subvention					

1. Compléter la troisième ligne du tableau. Arrondir les résultats à l'euro près.
2. Le responsable sportif se plaint d'une diminution continuelle des subventions depuis l'année 2005. Quelle erreur commet-il ?
3. On admet que le montant de la subvention en 2010 est de 5130 euros.
   (a) Quel est le pourcentage d'évolution de la subvention de 2005 à 2010 ?
   (b) Calculer le taux moyen d'évolution en pourcentage t arrondi à 10^{-1} entre 2005 et 2010.
   (c) Avec ce même taux t, quelle serait la subvention, arrondie à l'unité, en 2011 ?

Exercice 1.9. (Capes externe 2012)

Une marque de sucre commercialise du sucre cristallisé pour confitures. Ce produit est vendu dans deux supermarchés X et Y en sacs de 3 kgs au prix de 5.50 euros. Au mois de juillet, les deux enseignes proposent une promotion sur ce produit.

1. Le magasin X propose une réduction de 10% sur le prix initial ; le magasin Y propose d'offrir 10% de produit en plus pour le même prix initial. Dans quel magasin est-il plus avantageux d'acheter ce produit ?
2. Le magasin X propose une réduction de prix de 15% sur le prix initial. Calculer le pourcentage minimal de produit en plus, arrondi à l'unité près, que le magasin Y doit offrir à ses clients pour avoir une promotion aussi avantageuse.

Corrigés

Corrigé de l'Exercice 1.1

Notons P_0, P_1 et P_2 le nombre d'habitants de la ville en 1990, 2000 et 2010 (respectivement), et T_1 et T_2 les taux de variation successifs de 1990 à 2000 et 2000 à 2010.

1. Le nombre d'habitants en 2000 est $P_1 = (1+T_1)P_0 = 0,95 \times 50000 = 47500$.
   Le nombre d'habitants en 2010 est $P_2 = (1+T_2)P_1 = 1,05 \times 47500 = 49875$.
2. Le taux de variation de 1990 à 2010 est $T = \dfrac{49875 - 50000}{50000} = -0,0025$, soit $T = -0,25\%$.
   On remarque que $T = -0,05 \times 0,05$; dans le cas général, on a que $1+T = (1+T_1)(1+T_2)$ soit $T = T_1 + T_2 + T_1T_2$. Ici, on a $T_1 = -T_2$ ce qui donne $T = T_1T_2$; mais cette relation est fausse si $T_1 \neq -T_2$.
3. On cherche T_2' tel que $P_2 = P_0$.
   $P_2 = (1+T_2')P_1 = (1+T_2')(1+T_1)P_0$ qui doit être égal à P_0 ; ceci entraîne que $(1+T_2')(1+T_1) = 1$.
   On a donc $(1+T_2') \times 0,95 = 1$ d'où $T_2' = \dfrac{1}{0,95} - 1 = 0,0526$.
   Il aurait fallu un accroissement de 5,26% pour retrouver la population initiale.

Corrigé de l'Exercice 1.2

La "bêtise" serait de dire que l'inflation est de 20% pour les deux années. En fait elle est de 21%. Effectivement, notons t le pourcentage d'inflation sur les deux années et $T = \dfrac{t}{100}$.
Alors on a $1+T = (1+0,1)^2 = 1,21$ d'où $T = 0,21$ ou 21%.

Corrigé de l'Exercice 1.3

Notons H_0, F_0 et R_0 le salaire de l'homme, le salaire de la femme et le revenu du couple, avant augmentation ; et H_1, F_1 et R_1 le salaire de l'homme, celui de la femme et le revenu du couple, après augmentation.
D'après l'énoncé, on a avant augmentation : $H_0 = 1,2F_0$ et $R_0 = H_0 + F_0$.
Après augmentation on a : $H_1 = 1,04H_0$, $F_1 = 1,06F_0$ et $R_1 = H_1 + F_1$.
En combinant les informations, on obtient d'une part $R_0 = 2,2F_0$ et d'autre part $R_1 = 1,04 \times 1,2F_0 + 1,06F_0 = 2,308F_0$.
Le taux de variation du revenu du couple est $T = \dfrac{R_1 - R_0}{R_0} = \dfrac{0,108F_0}{2,2F_0} = \dfrac{0,108}{2,2} = 0,0491$; le revenu du couple a augmenté de 4,91%.

Si initialement l'homme gagne 40% de plus que sa femme, on obtiendra une augmentation du revenu du couple *plus faible*, de 4,83%.

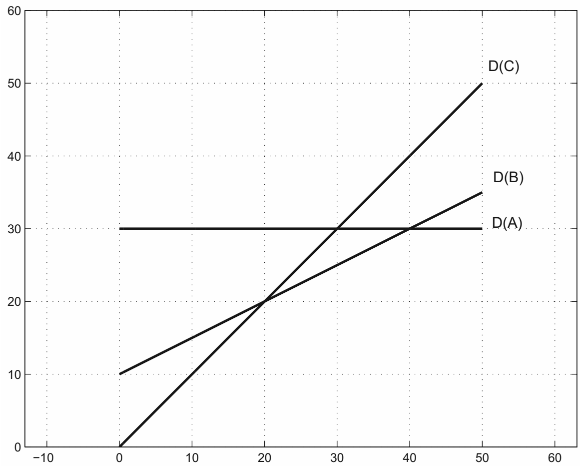
Remarque : on n'a pas besoin de connaître les montants des salaires.

Corrigé de l'Exercice 1.4

1. Notons p_A et p_B les proportions de dédit pour les produits A et B. La proportion totale de dédits est de 30% et elle est égale à la proportion de dédits du produit A fois la part du produit A dans les ventes, plus la proportion de dédits du produit B fois la part du produit B dans les ventes :
$$0,3 = p_A \times \frac{1}{3} + p_B \times \frac{2}{3}$$
(On a forcément deux tiers de produits B).
Avec $p_A = 0,25$, on obtient une équation d'inconnue p_B :
$p_B = \left(0,3 - 0,25 \times \frac{1}{3}\right)/(\frac{2}{3}) = 0,325$ (ou 32,5%).
2. La proportion de ventes confirmées est de 70%. On a maintenant
$$0,7 = (1 - p_A) \times \frac{1}{3} + (1 - p_B) \times \frac{2}{3}$$
soit $0,7 = 0,75 \times \frac{1}{3} + 0,675 \times \frac{2}{3}$.
La question est : quelle est la part de $0,75 \times \frac{1}{3}$ dans $0,7$?
C'est $\frac{0,75 \times \frac{1}{3}}{0,7} = 0,3571$. Le produit A concerne 35,71% des ventes confirmées de la société.

Corrigé de l'Exercice 1.5

1. (a) Formule A : 30 euros.
   Formule B : 20 euros $(10 + 20 \times 0,5)$.
   Formule C : 20 euros (20×1).
   (b) La formule C donne un prix proportionnel au nombre d'heures de connexion.
2. (a) Les trois formules sont caractérisées par les fonctions suivantes :
   Pour $x \geq 0$, $f_A(x) = 30$, $f_B(x) = 10 + 0,5x$ et $f_C(x) = x$. Les représentations graphiques de ces fonctions sont des droites d'équations respectives $D_A : y = 30$ (parallèle à l'axe des abscisses), $D_B : y = 10 + 0,5x$ et $D_C : y = x$.



(b) De 0 à 20 heures de connexion, la formule C est la plus avantageuse (puis la B puis la A).

De 20 à 30 heures de connexion, la formule la plus avantageuse devient la B (puis la C puis la A).

De 30 à 40 heures de connexion, la formule la plus avantageuse reste la B mais l'ordre des deux autres s'inverse : la A est moins chère que la C.

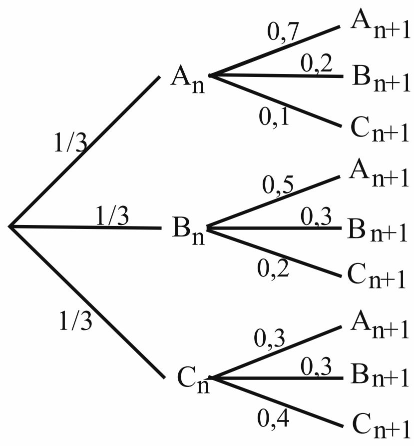
Au dessus de 40 heures de connexion, la formule A est préférable (puis la B puis la C).

3. Formule A : quelle que soit la durée de connexion, le prix est de 30 euros, il n'y a pas d'augmentation (0%).

   Formule B : Le prix payé en janvier 2007 est de 30 euros pour 40h ; en février, on passe à 44 heures de connexion pour un prix de 32 euros. Soit une augmentation de $\dfrac{32-30}{30} \times 100 = 6,67\%$.

   Formule C : Le prix payé en janvier 2007 est de 40 euros pour 40h, et en février de 44 euros pour 44 heures. Soit une augmentation de $\dfrac{44-40}{40} \times 100 = 10\%$.

4. On peut répondre à cette question sans avoir vu le cours sur les probabilités. On va tracer l'arbre pondéré suivant :



E_1 est l'événement qui correspond aux feuilles A, il est de probabilité
$\frac{1}{3} \times 0,7 + \frac{1}{3} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,3 = 0,5$.
E_2 est l'événement qui correspond aux feuilles de même lettre que leur branche, donc de probabilité $\frac{1}{3} \times 0,7 + \frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{3} \times 0,4 = 0,467$.

Corrigé de l'Exercice 1.6

1. (a) $T_A = \frac{1000 - 800}{800} = 0,25$; le prix de la tonne de café augmente de 25% en 4 ans chez le fournisseur A.
   (b) $T_B = \frac{1500 - 1400}{1400} = 0,0714$; le prix de la tonne de café augmente de 7,14% en 4 ans chez le fournisseur B.
   (c) $T_{AB} = \frac{1100 - 1200}{1200} = -0,0833$; le prix moyen de la tonne de café diminue de 8,33% en 4 ans pour l'entreprise.
2. $T_A = 0,25$ en 4 ans. Notons T_{Aa} le taux annuel moyen pour le fournisseur A.
   $1 + T_A = 1,25 = (1 + T_{Aa})^4$; $T_{Aa} = 1,25^{1/4} - 1 = 0,0574$ soit une augmentation moyenne annuelle de +5,74%.
3. L'évolution du prix d'achat moyen dépend des proportions de café achetées auprès des fournisseurs.
   Notons p_A et p_B les proportions de café achetées auprès des fournisseurs A et B en 2004, et p'_A et p'_B celles de 2008.
   En 2004, on a $800p_A + 1400p_B = 1200$.
   Comme $p_B = 1 - p_A$, on obtient $-600p_A = -200$ d'où $p_A = \frac{1}{3}$ et $p_B = \frac{2}{3}$. En 2004, l'entreprise se fournit pour les 2/3 auprès du fournisseur le plus cher.
   En revanche, en 2008, on a $1000p'_A + 1500p'_B = 1100$ et de manière analogue on en déduit que $p'_A = \frac{4}{5}$ et $p'_B = \frac{1}{5}$. On a acheté en 2008 davantage de café moins cher, ce

qui fait diminuer le prix moyen. Si on considère que les proportions de café achetées auprès des fournisseurs restent stables en 2008, alors effectivement le nouveau prix moyen est nécessairement faux ; il devrait être de

$$1000p_A + 1500p_B = 1000 \times \frac{1}{3} + 1500 \times \frac{2}{3} = 1333,33,$$

soit une augmentation de 11,11% sur les quatre années ($\frac{1333,33 - 1200}{1200} = 0,1111$).

Corrigé de l'Exercice 1.7

1. (a) Avec p euros on achète 1 litre ; avec 10 euros, on achète un volume $V_1 = 1 \times \frac{10}{p}$.

   (b) Après augmentation, 1 litre coûte $1,25p$; avec 10 euros, on achète $V_2 = 1 \times \frac{10}{1,25p}$. La variation de volume acheté avec 10 euros est

   $$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\frac{10}{1,25p} - \frac{10}{p}}{\frac{10}{p}} = \left(\frac{10}{1,25p} - \frac{10}{p}\right) \times \frac{p}{10} = \frac{1}{1,25} - 1 = -0,2.$$

   Ceci signifie que si le prix augmente de 25%, le volume acheté avec la même quantité d'argent diminue de 20%. Notons que si on change les 10 euros pour n'importe quel montant fixe, on obtiendra le même résultat. Ce résultat est également indépendant du prix p d'origine.

2. Si le prix augmente de t%, il passe de p à $(1 + \frac{t}{100})p$.

   Notons V_1 le volume acheté initialement au prix p ; le nouveau volume acheté au prix p est $V_2 = V_1 \times \frac{p}{(1 + \frac{t}{100})p} = V_1 \times \frac{1}{(1 + \frac{t}{100})}$.

   La variation en volume est de $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\frac{V_1}{(1+\frac{t}{100})} - V_1}{V_1} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} - 1 = -\frac{\frac{t}{100}}{1 + \frac{t}{100}}$; c'est-à-dire que le volume diminue de n% avec $n = \frac{t}{1 + \frac{t}{100}}$.

   Posons $x = \frac{t}{100}$ et $y = \frac{n}{100}$. Puisque $\frac{n}{100} = \frac{\frac{t}{100}}{1 + \frac{t}{100}}$, on a la relation $y = \frac{x}{1+x}$.

   (a) D'après ce qui précède, x étant positif, on a toujours $y < x$. La baisse de volume en pourcentage est donc toujours inférieure à l'augmentation du prix en pourcentage.

   (b) Supposons que le volume a diminué de 50%, soit $y = 0,5$, On a $\frac{x}{1+x} = 0,5$ qui a pour solution $x = 1$. Cela signifie alors que le prix a augmenté de 100% donc doublé.

3. On pose $|y - x| \leq 0,01$. On a $|y - x| = |\frac{x}{1+x} - x| = |-\frac{x^2}{1+x}| = \frac{x^2}{1+x}$.