Marie BOISSONNADE
Maître de conférences
Daniel FREDON
Maître de conférences

Mathématiques financières

en 22 fiches

5e édition

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com

ÉDITEUR DE SAVOIRS

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com
ISSN 1951-7874
ISBN 978-2-10-074563-0

Sommaire

Rappels de mathématiques

I Concepts généraux

- L'objet de ce livre est d'étudier les mathématiques financières à un niveau élémentaire. Dans ce cas, les connaissances mathématiques nécessaires ne dépassent pas le niveau du baccalauréat.
- Il peut cependant être utile à certains lecteurs de faire quelques révisions correspondant aux besoins des autres fiches. C'est l'objet de cette première fiche.
- Il existe aussi des mathématiques financières de niveau théorique beaucoup plus élevé, dont les résultats sont utilisés par les professionnels de la Bourse et des Assurances. Mais elles ne seront pas abordées dans cet ouvrage.

II L'essentiel à savoir

A. Puissances

• Puissances entières

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \geqslant 2$). On définit :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

En posant de plus :

$$a^1 = a \; ; \; a^0 = 1 \text{ (pour } a \neq 0) \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (pour } a \neq 0)$$

on définit a^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

• Propriétés

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad ; \quad a^n b^n = (ab)^n \quad ; \quad (a^n)^p = a^{np}.$$

• Racine n-ième et puissance fractionnaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On appelle **racine n-ième** de x, l'unique réel positif a tel que $a^n = x$. On écrit :

$$a = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

En particulier, $\sqrt{x}$ se note $x^{\frac{1}{2}}$.

Pour $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, on note $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.
Les règles de calcul sur les exposants rationnels sont alors les mêmes que pour les exposants entiers.

B. Logarithme népérien

- La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie pour $x > 0$.
  Ses valeurs sont fournies par votre calculatrice.
  Elle est telle que :

$$\begin{aligned} a < b &\iff \ln a < \ln b \\ a = b &\iff \ln a = \ln b \end{aligned}$$

  ce qui permet de transformer une égalité (ou une inégalité) en une égalité (ou une inégalité) équivalente.

- Elle vérifie les propriétés algébriques :

$$\ln\,(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \text{ pour } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\ln\,(a^r) = r \ln a \text{ pour tout } r \text{ rationnel.}$$

Remarque : Du fait de cette dernière propriété, chaque fois que l'inconnue est en exposant, pensez à prendre le logarithme.

Exemple

Déterminez n tel que $(1{,}06)^n = 1{,}5$.
En écrivant que les logarithmes des deux membres de l'égalité sont eux-mêmes égaux, on obtient :

$$\begin{aligned} (1{,}06)^n = 1{,}5 &\iff n \ln\,(1{,}06) = \ln\,(1{,}5) \\ &\iff n = \frac{\ln\,(1{,}5)}{\ln\,(1{,}06)} \approx 7 \end{aligned}$$

- Comme $\lim_{h \to 0} \frac{\ln (1+h)}{h} = 1$,
  lorsque h est « petit » on peut utiliser l'approximation : $\ln (1+h) \approx h$.

C. Exponentielle

- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie pour tout x. Ses valeurs sont fournies par votre calculatrice.
  Elle est telle que :

$$\ln (\mathrm{e}^x) = x \text{ pour tout } x \text{ ; } \mathrm{e}^{\ln x} = x \text{ pour } x > 0.$$

- Elle vérifie les propriétés algébriques :

$$\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b} \text{ ; } \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$$

$$(\mathrm{e}^a)^r = \mathrm{e}^{ra} \text{ pour tout } r \text{ rationnel.}$$

- Comme $\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$,
  lorsque h est « petit » on peut utiliser l'approximation : $\mathrm{e}^h \approx 1 + h$.

D. Suites arithmétiques

• Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite.

> **Remarque :** Pour vérifier qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique, il suffit de vérifier que $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

• Terme général

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 + nr,$$

ou encore en partant de u_1:

$$u_n = u_1 + (n-1)\,r.$$

• Sommes des n premiers termes

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}.$$

E. Suites géométriques

• Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un réel $q \neq 0$ tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le réel q est appelé raison de la suite.

> **Remarque :** Pour vérifier qu'une suite (u_n) est une suite géométrique, il suffit de vérifier que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n.

• Terme général

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0\, q^n,$$

ou encore en partant de u_1 :

$$u_n = u_1\, q^{n-1}.$$

• Somme des n premiers termes

$$\text{Si } q \neq 1 \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

III Complément : notation Σ

• Symbole

Une somme comme $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{86} + x_{87}$ se note :

$$S = \sum_{i=1}^{87} x_i.$$

D'une façon générale, la notation $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ désigne le réel obtenu en remplaçant i dans x_i par tous les entiers successifs de 1 à n et en faisant la somme de tous ces nombres.

Dans cette écriture, la lettre choisie pour désigner l'indice est sans importance. On dit qu'il s'agit d'un *indice muet*.

• **Propriétés**

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Si λ est une constante :

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\, x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda) = n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exemple

Cf. Application 5.

Applications

Énoncé 1

Un pays a 20 millions d'habitants et la population augmente de 25 $^{0}/_{00}$ par an.

1. Si ce taux se maintient, au bout de combien de temps la population aura-t-elle doublé ?

2. Après avoir observé que le résultat de la question précédente est voisin de $\frac{700}{25}$, démontrez que le temps nécessaire pour qu'une population double est toujours voisin de $\frac{700}{1\,000\,i}$ où i est le taux d'accroissement pour une personne (pour i petit).

Solution 1

Si l'augmentation annuelle de la population est constante et si i désigne le taux d'accroissement pour une personne, la population est multipliée chaque année par $1 + i$. Au bout de n années, la population initiale P_0 devient $P_n = P_0(1 + i)^n$ (*cf.* fiche 5. Intérêts composés).

1. Si n est le nombre d'années au bout duquel la population double, on a :

$$(1{,}025)^n \geqslant 2.$$

L'inconnue étant en exposant, on va utiliser la fonction logarithme népérien.

$$(1{,}025)^n \geqslant 2 \iff n \ln\,(1{,}025) \geqslant \ln 2 \iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln\,(1{,}025)}$$
$$\iff n \geqslant 28{,}072.$$

Le temps nécessaire est donc très légèrement supérieur à 28 ans.

2. Dans la question précédente, on constate que le nombre obtenu est très voisin de $\frac{700}{25} = 28$.

D'une manière générale, le temps n nécessaire pour qu'une population double vérifie $(1+i)^n \geqslant 2$ et on a :

$$(1+i)^n \geqslant 2 \iff n \ln(1+i) \geqslant \ln 2 \iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}.$$

Or $\ln 2 \approx 0{,}693\,147 \approx 0{,}7$.
D'autre part, lorsque i est petit, on a $\ln(1+i) \approx i$.
La valeur de n est donc voisine de $\frac{0{,}7}{i} = \frac{700}{1000\,i}$.
Ce résultat s'énonce en démographie : *lorsque la croissance a lieu à taux constant, le temps nécessaire pour qu'une population double est égal à 700 divisé par le taux en pour mille*.

Énoncé 2

1. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation :

$$u_{n+1} = 1{,}01u_n + 200 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrez que la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n + 20\,000$$

est une suite géométrique.
Déduisez-en la valeur de u_n en fonction de u_0 et de n.

2. Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2014, une ville possède 30 000 habitants. Chaque année, la population augmente naturellement de 1 % et 200 personnes viennent s'établir définitivement dans cette ville.

- **Quelle sera la population au 1$^{\text{er}}$ janvier 2019 ?**
- **L'ensemble des élèves de l'enseignement élémentaire représente 15 % de la population au 1$^{\text{er}}$ janvier 2014 et la valeur de ce pourcentage diminue de 2 % par an (attention, la diminution annuelle est de 2 % et non de 2).**

Déterminez le nombre d'élèves de l'enseignement élémentaire au 1$^{\text{er}}$ janvier 2019.

Solution 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 20\,000 = 1{,}01u_n + 200 + 20\,000 = 1{,}01\,(u_n + 20\,000) \\ &= 1{,}01v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 20\,000$.
Son terme général s'écrit donc $v_n = v_0\,(1{,}01)^n$, d'où l'on déduit :

$$u_n = (u_0 + 20\,000)(1{,}01)^n - 20\,000\,.$$

2. • Désignons par u_n la population de la ville le 1er janvier de l'année $2014 + n$.
D'après les hypothèses démographiques formulées, il s'agit de la suite de la question 1, avec $u_0 = 30\,000$.
On en déduit que $u_5 = 32\,551$, ce qui serait la population au 1er janvier 2019 avec les hypothèses énoncées.

• Notons p_n le pourcentage de la population dans l'enseignement élémentaire au 1er janvier $2014 + n$.
Comme p_n diminue de 2 % par an, on a :

$$p_n = p_0\,(1 - 0{,}02)^n = 0{,}15\,(0{,}98)^n\,.$$

Le nombre d'élèves concernés est égal à $p_n\,u_n$, ce qui donne
au 1er janvier 2014 :

$$p_0\,u_0 = 0{,}15 \times 30\,000 = 4\,500\ ;$$

au 1er janvier 2019 :

$$p_5\,u_5 = 0{,}15\,(0{,}98)^5 \times 32\,551 = 4\,414\,.$$

Énoncé 3

Pour la location d'un engin, une société de location propose à une entreprise de travaux publics trois types de contrats, valables à partir du 1er janvier 2014 :

Contrat A : le montant mensuel de la location est de 2 000 € et ce montant mensuel augmentera de 10 % chaque année au 1er janvier (la première augmentation ayant donc lieu le 1er janvier 2015).

Contrat B : le montant annuel de la location est de 41 000 € pour 2014 et il augmente de 4 000 € chaque année, dès le 1er janvier 2015.

Contrat C : le montant mensuel de la location est de 3 000 € pour janvier 2014 et il augmente de 2 % les 1er janvier et 1er juillet de chaque année et ce dès le 1er juillet 2014.

La société de location précise d'autre part à l'entreprise que la location de l'engin est valable pour des années complètes d'utilisation et que le montant total dû pour l'année est payable en début d'année.
On désigne par n le nombre d'années de location et par a_n, b_n et c_n respectivement le montant annuel, en euros, de la location pour chacun des trois contrats possibles.

1. Déterminez les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

2. En quelle année le montant annuel de la location avec le contrat A atteint-il le montant annuel de la location avec le contrat C ?

Solution 3

1. • Pour le **contrat A**, la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $1{,}10$ et de premier terme $a_1 = 12 \times 2\,000 = 24\,000$, d'où :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n = 24\,000\,(1{,}1)^{n-1}.$$

• Pour le **contrat B**, la suite (b_n) est une suite arithmétique de raison $4\,000$ et de premier terme $b_1 = 41\,000$, d'où :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad b_n = 41\,000 + (n-1)\,4\,000.$$

• Pour le **contrat C**, on a :

$$c_1 = 6 \times 3\,000 + 6 \times 3\,000 \times 1{,}02 = 36\,360.$$

Pour passer de l'année n à l'année $n+1$, on remarque que chaque montant mensuel est augmenté à deux reprises de 2 %, c'est-à-dire qu'il est multiplié par $(1{,}02)^2 = 1{,}0404$.
La suite (c_n) est donc une suite géométrique de raison $1{,}0404$ et l'on a :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad c_n = 36\,360\,(1{,}0404)^{n-1}.$$

2. Remarquons tout d'abord que le problème a un sens puisqu'au départ, on a $a_1 < c_1$ et que la suite (a_n) croît plus vite que la suite (c_n).

On cherche n tel que $a_n = c_n$, ce qui s'écrit :

$$24\,000\,(1,1)^{n-1} = 36\,360\,(1,0404)^{n-1}$$

$$\iff \left(\frac{1,1}{1,0404}\right)^{n-1} = \frac{36\,360}{24\,000}$$

$$\iff n-1 = \frac{\ln\left(\dfrac{36\,360}{24\,000}\right)}{\ln\left(\dfrac{1,1}{1,0404}\right)} \approx 7,457$$

$$\iff n \approx 8,457\,.$$

Le montant annuel de la location avec le **contrat A** atteindra le montant annuel de la location avec le **contrat C** en 2022.

Énoncé 4

La population d'une agglomération est passée de 320 000 habitants en 2007 à 332 000 habitants en 2014.

Estimez la population de cette agglomération en 2012 dans chacune des trois hypothèses suivantes :

1. l'accroissement annuel de la population est constant sur la période 2007-2014 ;

2. le taux d'accroissement annuel est constant sur cette période ;

3. l'accroissement annuel est constant et égal à 1 500 sur la période 2007-2009 et le taux d'accroissement annuel est constant sur la période 2009-2014.

Solution 4

Prenons l'année 2007 comme année 0 et désignons par P_n la population de l'agglomération l'année n.

Par hypothèse, on a : $P_0 = 320\,000$ et $P_7 = 332\,000$.

1. Soit r l'accroissement annuel de la population. La suite (P_n) est une suite arithmétique de raison r; d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P_n = P_0 + nr.$$

On en déduit : $r = \dfrac{P_7 - P_0}{7} = 1\,714$ habitants.