J.-M. MONIER | G. HABERER | C. LARDON

MATHS PCSI-PTSI

J'intègre

MÉTHODES ET EXERCICES

4e édition

DUNOD

Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

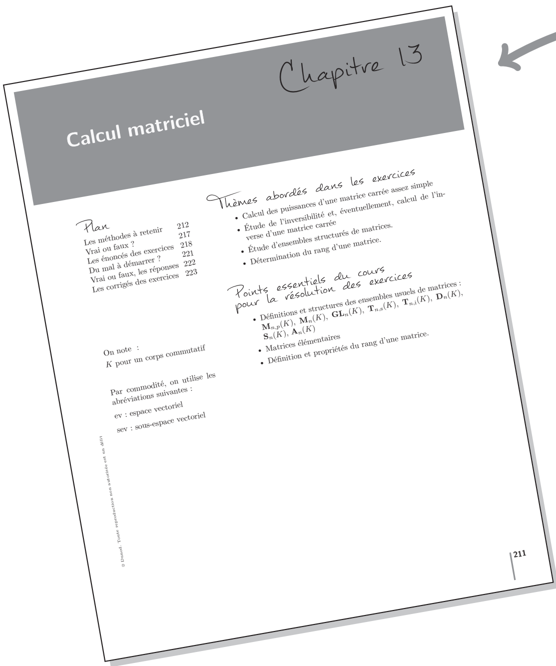
ISBN 978-2-10-077661-0

Table des matières

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur le site **dunod.com**, vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage



Chapitre 13

Calcul matriciel

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul des puissances d'une matrice carrée assez simple
- Étude de l'inversibilité et, éventuellement, calcul de l'inverse d'une matrice carrée
- Étude d'ensembles structurés de matrices.
- Détermination du rang d'une matrice.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et structures des ensembles usuels de matrices : $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, $\mathbf{M}_n(K)$, $\mathbf{GL}_n(K)$, $\mathbf{T}_{n,s}(K)$, $\mathbf{T}_{n,i}(K)$, $\mathbf{D}_n(K)$, $\mathbf{S}_n(K)$, $\mathbf{A}_n(K)$
- Matrices élémentaires
- Définition et propriétés du rang d'une matrice.

On note :
K pour un corps commutatif

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

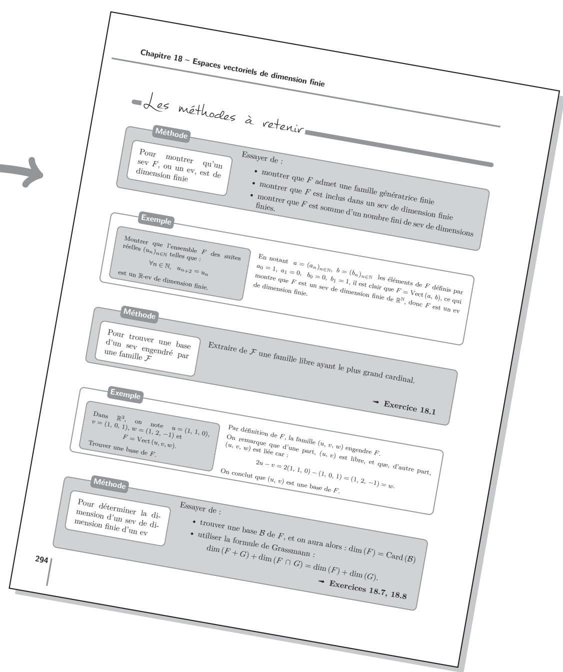
ev : espace vectoriel

sev : sous-espace vectoriel

211

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.



Chapitre 18 – Espaces vectoriels de dimension finie

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'un sev F, ou un ev, est de dimension finie

Essayer de :

- montrer que F admet une famille génératrice finie
- montrer que F est inclus dans un sev de dimension finie
- montrer que F est somme d'un nombre fini de sev de dimensions finies.

Exemple

Montrer que l'ensemble F des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n$$
est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

En notant $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les éléments de F définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, il est clair que $F = \mathrm{Vect}(a, b)$, ce qui montre que F est un sev de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc F est un ev de dimension finie.

Méthode

Pour trouver une base d'un sev engendré par une famille $\mathcal{F}$

Extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre ayant le plus grand cardinal.

➡ **Exercice 18.1**

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 2, -1)$ et
$$F = \mathrm{Vect}(u, v, w).$$
Trouver une base de F.

Par définition de F, la famille (u, v, w) engendre F.
On remarque que d'une part, (u, v) est libre, et que, d'autre part, (u, v, w) est liée car :
$$2u - v = 2(1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1) = w.$$
On conclut que (u, v) est une base de F.

Méthode

Pour déterminer la dimension d'un sev de dimension finie d'un ev

Essayer de :

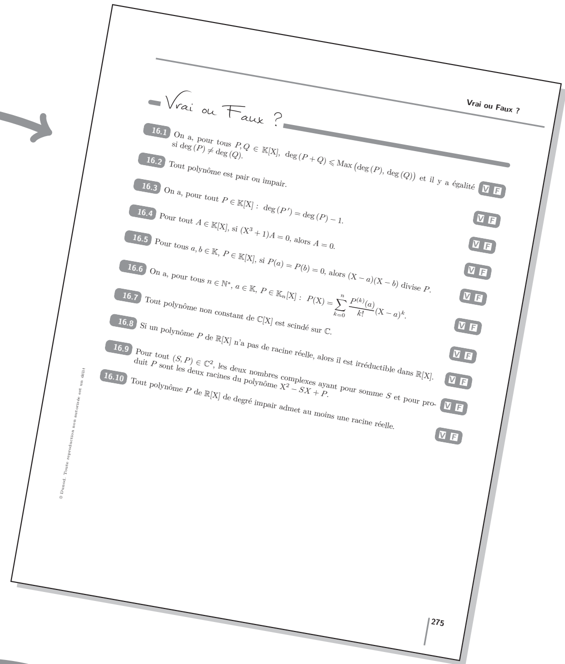
- trouver une base $\mathcal{B}$ de F, et on aura alors : $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$
- utiliser la formule de Grassmann :
$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

➡ **Exercices 18.7, 18.8**

294

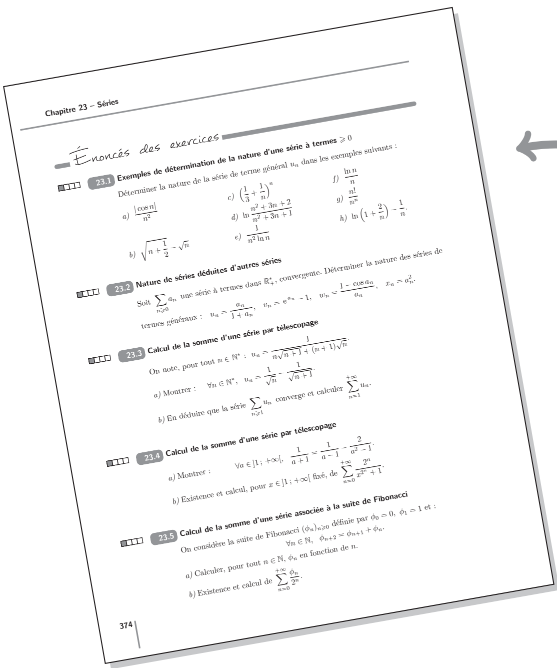
Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



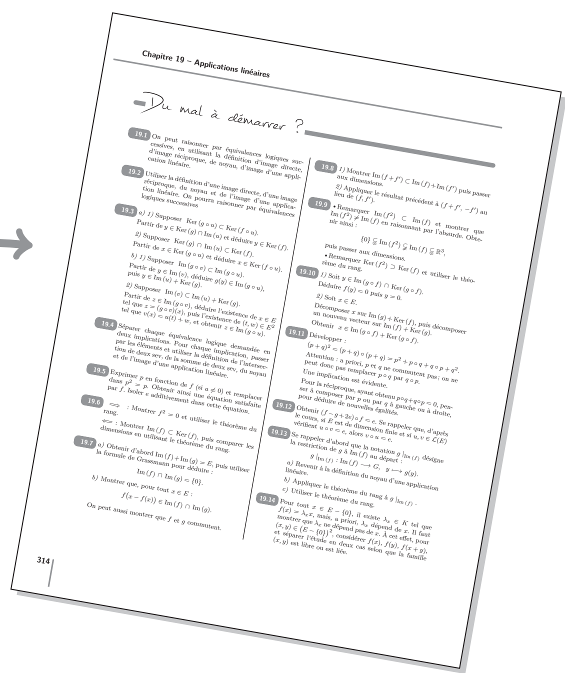
Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



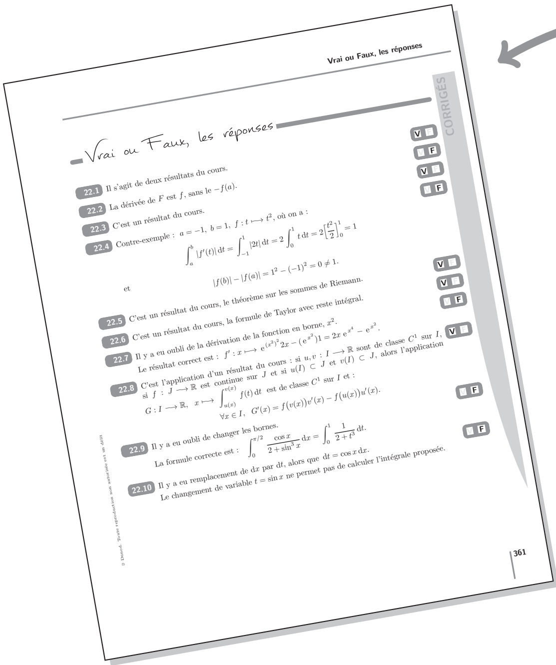
Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



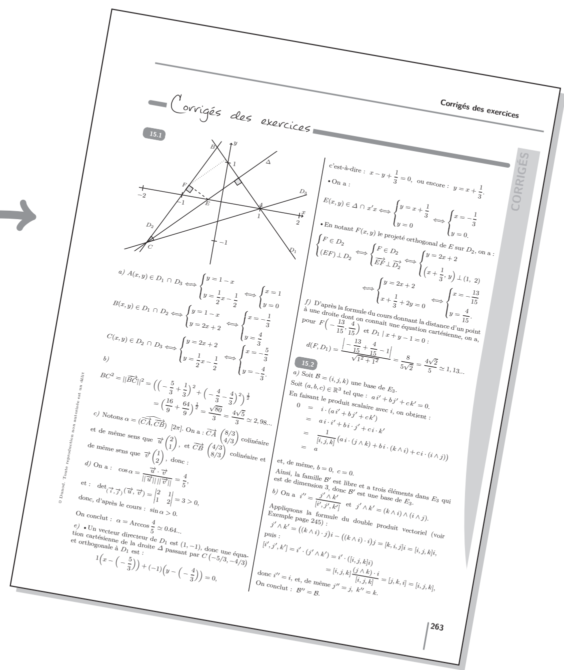
Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fausse est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.



Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

> Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Chapitre 1

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en œuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, $\complement_E$, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur les ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

➟ **Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.14 à 1.16**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer : $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
&= A \cap (\overline{B \cup C}) \\
&= A \setminus (B \cup C).
\end{aligned}$$

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble

➟ **Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.11, 1.16**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= A \cap \overline{B \cap C} \\
&= A \setminus (B \cap C).
\end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in [-1\,;\,2],\ \ y = x^2\} = [0\,;\,4].$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1\,;\,2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $y \in [0\,;\,1]$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $y \in [0\,;\,4]$.
On déduit $y \in [0\,;\,4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0\,;\,4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0\,;\,2] \subset [-1\,;\,2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.5**

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$,
donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\
&= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
&= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
&= -(-1)^n \ = \ (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.9**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n+2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.10**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 < u_n \leqslant 1.$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\quad 0 < u_k \leqslant 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} > \dfrac{0 + \cdots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} \leqslant \dfrac{1 + \cdots + 1}{n^n} = \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant 1.$

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 < u_n \leqslant 1.$

Méthode

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

Essayer de :

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.12 (en le redémontrant).

➟ **Exercices 1.3, 1.12, 1.13**

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

$\star$ • *Injectivité :* Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité :* Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f\big(f(y)\big)$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

$\star$ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \longrightarrow F,\ A \in \mathcal{P}(E),\ A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \big\{y \in F\,;\ \exists\, a \in A,\quad y = f(x)\big\},$$
$$f^{-1}(A') = \big\{x \in E\,;\ f(x) \in A'\big\}.$$

Autrement dit :

pour tout $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \big(\exists\, a \in A,\quad y = f(a)\big)$

et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'$.

➟ **Exercices 1.14, 1.15**

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}\Big(\complement_F(A')\Big) = \complement_E\big(f^{-1}(A')\big).$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\complement_F(A')\Big) &\iff f(x) \in \complement_F(A') \\ &\iff f(x) \notin A' \\ &\iff \text{Non } \big(f(x) \in A'\big) \\ &\iff \text{Non } \big(x \in f^{-1}(A')\big) \\ &\iff x \in \complement_E\big(f^{-1}(A')\big), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\quad \forall x \in E,\quad x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique : $\quad \forall (x, y) \in E^2,\quad \big(x\,\mathcal{R}\,y \implies y\,\mathcal{R}\,x\big)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\quad \forall (x, y, z) \in E^3,\quad \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,z \end{cases} \implies x\,\mathcal{R}\,z.$

➟ **Exercice 1.6**

Exemple

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y|\big).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

$\star$ • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \,\mathcal{R}\, x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

• On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \,\mathcal{R}\, x,$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

• On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \,\mathcal{R}\, z,$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

$\star$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\widehat{x} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ x \,\mathcal{R}\, y\} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $A \cap B = \varnothing \iff B \subset \complement_E(A)$. V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.5 Si les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective. V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives. V F

1.7 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$. V F

1.8 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \mathrm{Id}_E$. V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors : V F

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors : V F

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Énoncés des exercices

1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$.

a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.

1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ au départ et à $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \qquad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

c) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n \quad$ et $\quad L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

1.6 Exemple de relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y\big).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E, B_1, B_2 des parties de F.

a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

1.8 Équivalence entre trois assertions faisant intervenir des différences ensemblistes

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) $A \setminus B \subset C$, 2) $A \setminus C \subset B$, 3) $A \subset B \cup C$.

1.9 Applications : composition, injectivité, surjectivité

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications.

a) Montrer que, si $f \circ g \circ f = f$ et si f est injective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f \circ g = g$ et si g est surjective, alors f est injective.

1.10 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.11 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

On note 1 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$
$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \cap (A \cup B) = A$ et $A \cup (A \cap B) = A$.

1.12 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

1.13 Conséquences de la bijectivité d'une certaine composée

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ des applications.

On suppose que $g \circ f \circ g$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.12

1.14 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

1.15 Images réciproques de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

b) $f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.16 Différence symétrique, associativité

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \,\triangle\, B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B.

a) Deux exemples : Déterminer $A \,\triangle\, B$ dans les deux exemples suivants :

1) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$

2) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,; 2]$, $B = [1\,; +\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$, $A \,\triangle\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$: $\mathbf{1}_{A \triangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi $\triangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3, \quad (A \,\triangle\, B) \,\triangle\, C = A \,\triangle\, (B \,\triangle\, C).$$

Du mal à démarrer ?

1.1 *a)* Utiliser la distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1.2 *Première méthode :*

Raisonner par équivalences logiques en passant aux complémentaires.

Deuxième méthode :

Supposer $A \cup B = A \cup C$.

$\star$ Partir d'un élément quelconque x de $A \cup \overline{B}$ et raisonner par l'absurde, pour déduire $x \in A \cup \overline{C}$.

$\star$ L'autre inclusion s'en déduit en échangeant B et C.

1.3 *a)* $a = 2$. *b)* $b = 3$.

c) À partir de $y = f(x)$, calculer x en fonction de y.

1.4 Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que ces deux résultats soient différents.

1.5 Récurrence (faible) sur n, pour chacune des trois questions.

Pour *c)*, utiliser *a)*.

1.6 *a)* Revenir à la définition d'une relation d'équivalence.

Noter $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x^2 - 2x$, pour la commodité.

b) Revenir à la définition de la classe d'équivalence $\widehat{x}$ de x modulo $\mathcal{R}$: $\forall y \in \mathbb{R},\ \ \big(y \in \widehat{x} \iff x\,\mathcal{R}\,y\big)$.

1.7 *a)* Raisonner par équivalences logiques successives, en partant de $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

b) 1) Même méthode qu'en *a)*.

2) Envisager un élément de $A_1 \times B_2$.

1.8 Montrer 1) $\Longrightarrow$ 3) et 3) $\Longrightarrow$ 1) en passant par les éléments, puis échanger B et C pour en déduire 2) $\iff$ 3).

1.9 *a)* Partir d'un élément x de E, considérer $f(x)$ et déduire $x = \big(g\big(f(x)\big)\big)$.

b) Partir de $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, utiliser la surjectivité de g, puis $g = g \circ f \circ g$, et déduire $x_1 = x_2$.

1.10 Récurrence forte sur n.

1.11 *a)* • Un sens est évident.

Réciproquement, supposer $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ et partir d'un élément quelconque a de A, pour montrer $A \subset B$.

- Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A,\ x \notin A$.
- Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A \cap B,\ x \notin A \cap B$.
- Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.
- Utiliser les résultats précédents.

b) Calculer $\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)}$ et $\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)}$.

1.12 *a)* Revenir aux définitions.

b) Revenir aux définitions.

c) Se déduit directement de *a)* et *b)*.

1.13 Appliquer le résultat de l'exercice 1.12, en groupant en $(g \circ f) \circ g$ ou en $g \circ (f \circ g)$.

1.14 *a)* Supposer $A \subset B$.

Partir d'un élément quelconque y de $f(A)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

b) Partir de $a \in A$ et utiliser les définitions.

c) • Montrer, en utilisant *a)* :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Réciproquement, partir de $y \in f(A \cup B)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f.

d) Utiliser *a)*.

1.15 *a)* Supposer $A' \subset B'$.

Partir d'un éléments quelconque x de $f^{-1}(A')$ et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de F par f.

b) Partir de $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$ et utiliser les définitions.

c) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ et en appliquant les définitions.

d) Raisonner par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ et en appliquant les définitions.

1.16 *a)* **Réponses :**

1) $A \bigtriangleup B = \{2, 3\}$,

2) $A \bigtriangleup B =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[$.

b) Calculer $A \bigtriangleup B$ d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.

c) Utiliser *b)* et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.11).

En particulier, pour tous ensembles X, Y :

$$\mathbf{1}_{\overline{X}} = 1 - \mathbf{1}_X, \quad \mathbf{1}_{X \cap Y} = \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y,$$
$$\mathbf{1}_{X \cup Y} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y.$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

Vrai ou Faux, les réponses

1.1 $B \subset \complement_E(A) \iff (\forall x \in B, \quad x \notin A) \iff (\text{Non } (\exists x \in B, \quad x \in A))$
$\iff (\text{Non } (A \cap B \neq \varnothing)) \iff A \cap B = \varnothing.$ **V**

1.2 Contre-exemple : $E = \{1, 2\},\ A = \{1\},\ B = \{2\}$.
La formule correcte est : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **F**

1.3 Par exemple, $y = x + 1$. **V**

1.4 Il n'existe pas de réel y fixé plus grand que tout réel x. **F**

1.5 C'est un résultat du cours. **V**

1.6 Contre-exemple : $E = F = G = \mathbb{R},\ f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x},\ g : y \longmapsto |y|$.
On a alors $g \circ f : x \longmapsto |\,\mathrm{e}^{x}| = \mathrm{e}^{x}$, $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas. **F**

1.7 L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$, donc $x_1 = x_2$. **V**

L'application f est surjective car, pour tout $y \in E$, on a $y = f\big(f(y)\big)$.

Il en résulte que f est bijective, puis, en composant à gauche par f^{-1}, on obtient $f = f^{-1}$.

1.8 Contre-exemple : $E = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 0$. **F**

1.9 Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a alors $x \in A$ d'où $f(x) \in A$, ou $x \in B$ d'où $f(x) \in f(B)$, et donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. On obtient $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. **V**

Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où $x \in A \cup B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, on déduit $y \in f(A \cup B)$. On obtient $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Par double inclusion, on conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.10 Contre-exemple : $E = F = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2,\ A = \mathbb{R}_-,\ B = \mathbb{R}_+$.
On a alors : $A \cap B = \{0\},\ f(A \cap B) = \{0\},\ f(A) = \mathbb{R}_+,\ f(B) = \mathbb{R}_+,\ f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$. **F**

Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{\subset A}) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, donc $x \in C$.

Ceci montre : $A \subset C$.

• Réciproquement, supposons $A \subset C$.

On a alors, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = (\underbrace{A \cap C}_{= A}) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en *a)* si et seulement si $A \subset C$.

1.2

En appliquant la première implication avec $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C), on obtient la seconde implication.

Il suffit donc de montrer la première implication.

• *Première méthode : par les ensembles, globalement*

On a :
$$\begin{aligned} & A \cup B = A \cup C \\ \Longrightarrow\ & \overline{A \cup B} = \overline{A \cup C} \\ \Longrightarrow\ & \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{C} \\ \Longrightarrow\ & A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\ \Longrightarrow\ & (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\ \Longrightarrow\ & A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}. \end{aligned}$$

• *Deuxième méthode, par les éléments*

On suppose $A \cup B = A \cup C$.

$\star$ Soit $x \in A \cup \overline{B}$. Alors $x \in A$ ou $x \in \overline{B}$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \overline{C}$.

Supposons $x \notin A$, donc $x \in \overline{B}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \notin A \cup \overline{C}$.

Alors, $x \in \overline{A \cup \overline{C}} = \overline{A} \cap C$, donc $x \in C$,

puis $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cup B$, contradiction avec $x \notin A$ et $x \notin B$.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $x \in A \cup \overline{C}$,
et on a donc établi l'inclusion $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$.

$\star$ Par rôles symétriques de B et C dans l'égalité d'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on a alors aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que : $a = 2$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} &\iff xy - 2y = 3x - 1 \\ &\iff xy - 3x = 2y - 1 \iff (y-3)x = 2y - 1. \end{aligned}$$

Si $y \neq 3$, on a : $y = f(x) \iff x = \dfrac{2y-1}{y-3}$

donc y admet un antécédent et un seul par f, qui est $\dfrac{2y-1}{y-3}$.

Si $y = 3$, alors : $y = f(x) \iff 0x = 5$,

donc y n'a pas d'antécédent par f.

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\},\ x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$

est la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ à l'arrivée.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément y de l'arrivée admet un antécédent et un seul par g, donc g est bijective, et l'application réciproque de g est : $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\},\ y \longmapsto \dfrac{2y-1}{y-3}$.

1.4

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple : $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = 4$,
donc : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5

a) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et $$5(-1)^{n+1} = -5,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :
$$\begin{aligned} & L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+3} \\ = \ & L_{n+2}^2 - L_{n+1}(L_{n+2} + L_{n+1}) \\ = \ & (L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= L_{n+2}(L_{n+2} - L_{n+1}) - L_{n+1}^2 \\ &= L_{n+2}L_n - L_{n+1}^2 \\ &= -(L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2}) \\ &= -\big(5(-1)^{n+1}\big) \ = \ 5(-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$

et : $L_n L_{n+1} + 2 = L_0 L_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4,$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{n} L_k^2\Big) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + 2) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + L_{n+1}^2) + 2 \\ &= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) + 2 \ = \ L_{n+1}L_{n+2} + 2, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) • *Initialisation :*

Pour $n = 0$: $\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$

et $\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_n L_{n+1} - (-1)^n = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité :*

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} L_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n} \\ &= \big(L_n L_{n+1} - (-1)^n\big) + \big(L_n^2 - 2(-1)^n\big) \\ &= (L_n L_{n+1} + L_n^2) - 3(-1)^n \\ &= L_n(L_{n+1} + L_n) - 3(-1)^n \\ &= L_n L_{n+2} - 3(-1)^n \\ &= \big(L_{n+1}^2 - 5(-1)^{n+1}\big) - 3(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 + 2(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{2n+3} &= L_{2n+2} + L_{2n+1} \\ &= \big(L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}\big) + \big(L_n L_{n+1} - (-1)^n\big) \\ &= L_{n+1}\big(L_{n+1} + L_n\big) - (-1)^{n+1} \\ &= L_{n+1}L_{n+2} - (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n, que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6

a) Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 - 2x$.

1) Réflexivité :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)$, donc $x \,\mathcal{R}\, x$.

2) Symétrie :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \,\mathcal{R}\, y$.
On a alors $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$, d'où $y \,\mathcal{R}\, x$.

3) Transitivité :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$.
On a alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z)$, d'où $x \,\mathcal{R}\, z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Notons $\widehat{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & y \in \widehat{x} \\ \iff\ & x \,\mathcal{R}\, y \\ \iff\ & x^2 - 2x = y^2 - 2y \\ \iff\ & x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \\ \iff\ & (x - y)(x + y - 2) = 0 \\ \iff\ & \big(y = x \ \text{ ou } \ y = 2 - x\big). \end{aligned}$$

On conclut : $\widehat{x} = \begin{cases} \{1\} & \text{si} \quad x = 1 \\ \{x, \, 2 - x\} & \text{si} \quad x \neq 1. \end{cases}$

Il en résulte que $\widehat{x}$ est de cardinal 1 si $x = 1$, de cardinal 2 si $x \neq 1$.

1.7

a) On a, pour tout $(a, b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} & (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ \iff\ & \big((a, b) \in A_1 \times B_1 \ \text{ et } \ (a, b) \in A_2 \times B_2\big) \\ \iff\ & \big(a \in A_1 \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \ \text{ et } \ \big(a \in A_2 \ \text{ et } \ b \in B_2\big) \\ \iff\ & \big(a \in A_1 \ \text{ et } \ a \in A_2\big) \ \text{ et } \ \big(b \in B_1 \ \text{ et } \ b \in B_2\big) \\ \iff\ & \big(a \in A_1 \cap A_2 \ \text{ et } \ b \in B_1 \cap B_2\big) \\ \iff\ & (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) On a, pour tout $(a, b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} & (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\ \iff\ & \big((a, b) \in A_1 \times B_1 \ \text{ ou } \ (a, b) \in A_2 \times B_1\big) \\ \iff\ & \big((a \in A_1 \ \text{ ou } \ a \in A_2) \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \\ \iff\ & \big(a \in A_1 \cup A_2 \ \text{ et } \ b \in B_1\big) \\ \iff\ & (a, b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1, \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) L'ensemble $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ contient, entre autres, les couples (a, b) où $a \in A_1$ et $b \in B_2$, et ces couples ne sont pas nécessairement dans $A_1 \times B_1$ ou $A_2 \times B_2$.

Donnons un contre-exemple.

Notons $E = F = \{0,1\}$, $A_1 = B_1 = \{0\}$, $A_2 = B_2 = \{0,1\}$.

On a alors : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$

et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0,1\} \times \{0,1\}$

$$= \big\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\big\}.$$

Ainsi, $(0,1)$ est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.8

1) $\Longrightarrow$ 3) :

Supposons $A \setminus B \subset C$. Soit $x \in A$.

Si $x \in B$, alors $x \in B \cup C$.

Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$, donc $x \in C$, puis $x \in B \cup C$.

Ceci montre : $x \in B \cup C$.

On a donc : $A \subset B \cup C$.

3) $\Longrightarrow$ 1) :

Supposons $A \subset B \cup C$.

Soit $x \in A \setminus B$, donc $x \in A$ et $x \notin B$.

Comme $x \in A$ et $A \subset B \cup C$, on a $x \in B \cup C$.

Puisque $x \in B \cup C$ et $x \notin B$, on déduit $x \in C$.

Cela montre : $A \setminus B \subset C$.

On a donc établi l'équivalence logique : 1) $\Longleftrightarrow$ 3).

Comme $B \cup C = C \cup B$, on déduit, en remplaçant (B, C) par (C, B) dans le résultat précédent : 2) $\Longleftrightarrow$ 3).

Finalement, les trois assertions 1), 2), 3) sont deux à deux équivalentes.

1.9

a) On suppose $f \circ g \circ f = f$ et f injective.

Soit $x \in E$.

On a : $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f\big(g \circ f(x)\big)$.

Comme f est injective, on déduit :

$$x = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Cela montre que g est surjective.

b) On suppose $g \circ f \circ g = g$ et g surjective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Puisque g est surjective, il existe $y_1, y_2 \in F$ tels que :

$$x_1 = g(y_1) \quad \text{et} \quad x_2 = g(y_2).$$

On a alors :

$$x_1 = g(y_1) = (g \circ f \circ g)(y_1) = g\Big(f\big(g(y_1)\big)\Big) = g\big(f(x_1)\big)$$
$$= g\big(f(x_2)\big) = (g \circ f \circ g)(y_2) = g(y_2) = x_2,$$

et on conclut que f est injective.

1.10

Puisque u_{n+1} est donné (entre autres) en fonction de $u_0, ..., u_n$, on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.

• *Hérédité :*

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $u_0, ..., u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Comme $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}$, que $u_0, ..., u_n$ sont dans $\mathbb{Q}_+^*$ et que $0!, 1!, ..., n!$ sont dans $\mathbb{N}^*$, par opérations, on déduit : $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$.

On conclut, par récurrence forte sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.11

a) • Il est clair que, si $A = B$, alors $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Réciproquement, supposons $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Pour tout $a \in A$, on a $\mathbf{1}_B(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$, donc $a \in B$, ce qui montre $A \subset B$, puis, de même, $B \subset A$, donc $A = B$.

On conclut : $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Autrement dit, la connaissance de $\mathbf{1}_A$ détermine entièrement A.

• On a, pour tout $x \in E$:
si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 0$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$
si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E,\ \ \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$

si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et $\big(\mathbf{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbf{1}_B(x) = 0\big)$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E,\ \ \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\
&= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}} \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.
\end{aligned}$$

• On a :

$$\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) On a, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)$$
$$= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,$$

donc, d'après *a)* : $A \cap (A \cup B) = A$.

De même :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A \cap B} \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A,\end{aligned}$$

donc, d'après *a)* : $A \cup (A \cap B) = A$.

On peut aussi remarquer que, puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \cap (A \cup B) = A$, et que, puisque $A \cap B \subset A$, on a $A \cup (A \cap B) = A$.

1.12

a) Supposons $g \circ f$ injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$g \circ f(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = g \circ f(x_2).$$

Puisque $g \circ f$ est injective, il s'ensuit : $x_1 = x_2$.

On conclut que f est injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que : $z = g \circ f(x)$.

On a alors : $\quad z = g\big(f(x)\big)$ et $f(x) \in F$.

Ceci montre : $\forall z \in G,\ \exists y \in F,\quad z = g(y)$.

On conclut que g est surjective.

c) Si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est injective et surjective, donc, d'après *a)* et *b)*, f est injective et g est surjective.

1.13

Schématiquement, en utilisant le résultat de l'exercice 1.12, on a :

$$g \circ f \circ g \ \text{ bijective } \iff \begin{cases} g \circ f \circ g \ \text{ injective} \\ g \circ f \circ g \ \text{ surjective}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (g \circ f) \circ g \ \text{ injective} \\ g \circ (f \circ g) \ \text{ surjective}\end{cases} \implies \begin{cases} g \ \text{ injective} \\ g \ \text{ surjective}\end{cases}$$

$$\implies g \ \text{ bijective}.$$

Ceci montre que g est bijective.

On peut donc considérer l'application réciproque g^{-1} de g.
On a alors : $\quad f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$,
qui est la composée de trois applications bijectives, donc f est bijective.

Finalement, f et g sont bijectives.

1.14

a) Supposons $A \subset B$.

Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
Comme $a \in A \subset B$, on a $a \in B$, puis $y = f(a) \in f(B)$.

On obtient : $f(A) \subset f(B)$.

b) Soit $a \in A$. On a : $f(a) \in f(A)$, donc par définition d'une image réciproque, $a \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

On conclut : $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

c) • En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B\end{cases} \implies \begin{cases} f(A) \subset f(A) \cup f(B) \\ f(B) \subset f(A) \cup f(B)\end{cases}$$

$$\implies f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

• Soit $y \in f(A \cup B)$.
Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
On a : $x \in A$ ou $x \in B$.
Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$.
Si $x \in B$, alors $f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On a donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Ceci montre : $\forall (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) En utilisant *a)* :

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B\end{cases} \implies \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B)\end{cases}$$

$$\implies f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

1.15

a) Supposons $A' \subset B'$.

Soit $x \in f^{-1}(A')$.
On a $f(x) \in A'$, donc $f(x) \in B'$, puis $x \in f^{-1}(B')$.

On conclut : $\quad f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

b) Soit $y \in f\big(f^{-1}(A')\big)$.
Il existe $x \in f^{-1}(A')$ tel que $y = f(x)$.
Puis, comme $x \in f^{-1}(A')$, on a $f(x) \in A'$, donc $y \in A'$.

On conclut : $\quad f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$.

c) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A' \cup B') \\ \iff\ & f(x) \in A' \cup B' \\ \iff\ & \big(f(x) \in A' \quad \text{ou} \quad f(x) \in B'\big) \\ \iff\ & \big(x \in f^{-1}(A') \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B')\big) \\ \iff\ & x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

d) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A' \cap B') \\ \iff\ & f(x) \in A' \cap B' \\ \iff\ & \big(f(x) \in A' \quad \text{et} \quad f(x) \in B'\big) \\ \iff\ & \big(x \in f^{-1}(A') \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B')\big) \\ \iff\ & x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.16

a) 1) Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, on a :

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{1\},$$

$$\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4\}, \quad A \mathbin{\triangle} B = \{2, 3\}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,;2]$, $B = [1\,;+\infty[$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = [1\,;2],$$

$\overline{A \cap B} =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[$, $\quad A \,\triangle\, B =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[$.

b) On a, pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

c) On a, pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\triangle B} &= \mathbf{1}_{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}} + \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\overline{A}} - \underbrace{\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}}\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\overline{A}}}_{=0} \\ &= \mathbf{1}_A(1-\mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B(1-\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

d) Soit $(A,B,C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A\triangle B)\triangle C} &= \mathbf{1}_{A\triangle B} + \mathbf{1}_C - 2\cdot\mathbf{1}_{A\triangle B}\mathbf{1}_C \\ &= (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C - 2\cdot(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) + 4\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\triangle(B\triangle C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B\triangle C} - 2\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{B\triangle C} \\ &= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\cdot\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) - 2\cdot\mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\cdot\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) + 4\cdot\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C. \end{aligned}$$

Ceci montre : $\quad \mathbf{1}_{(A\triangle B)\triangle C} = \mathbf{1}_{A\triangle(B\triangle C)}$.

On déduit : $\quad (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$,

et on conclut que la loi $\triangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$.

Chapitre 2

Calculs algébriques

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole $\sum$ pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole $\prod$ pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=0}^{n} q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux $\displaystyle\binom{n}{p}$, en particulier :
  - l'expression à l'aide de factorielles $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$,
  - la formule fondamentale $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$,
  - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer certaines sommations indexées par un entier

- Si le résultat est fourni, essayer de raisonner par récurrence
- Essayer de se ramener aux sommations classiques :
  - la sommation géométrique :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\quad \sum_{q=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  - la sommation d'entiers, de carrés d'entiers consécutifs :
  $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
  - la formule du binôme de Newton :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$
- Essayer de faire apparaître un télescopage

➟ **Exercices 2.1 à 2.3, 2.7, 2.8, 2.14, 2.19 à 2.21**

Exemple

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1).$$

Récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, la formule proposée est évidente.
- Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé :
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (2k+1) = (-1)^n (n+1).$$

On a alors :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) \\
&= (-1)^n (n+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) \\
&= (-1)^{n+1}\big(-(n+1) + (2n+3)\big) \\
&= (-1)^{n+1}(n+2),
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.