

Mathématiques

IUT 2^e année

Mathématiques

IUT 2^e année

Thierry Alhalel

Professeur à l'IUT de Blagnac

Florent Arnal

Professeur à l'IUT de Bordeaux

Laurent Chancogne

Professeur à l'INP de Bordeaux

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



DES MÊMES AUTEURS DANS LA MÊME COLLECTION :

Mathématiques IUT 1^{re} année

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Malakoff, 2018
ISBN 978-2-10-077758-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1. Probabilités	1
1.1 Généralités	1
1.1.1 Dénombrement	1
1.1.2 Probabilités	3
1.2 Variables aléatoires discrètes	6
1.2.1 Généralités	6
1.2.2 Espérance, variance et écart-type	8
1.2.3 Somme de deux variables aléatoires	11
1.3 Lois usuelles discrètes	12
1.3.1 Loi de Bernoulli	12
1.3.2 Loi binomiale	13
1.3.3 Loi de Poisson	15
1.3.4 Loi hypergéométrique	17
1.4 Variables aléatoires continues	18
1.5 Lois continues usuelles	22
1.5.1 Loi uniforme	22
1.5.2 Loi normale	24
1.5.3 Loi exponentielle	28
1.6 Exercices	30
Chapitre 2. Statistiques	41
2.1 Séries statistiques à 1 variable	41
2.2 Covariance d'une série à 2 variables	44
2.3 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés	44
2.4 Ajustement exponentiel par la méthode des moindres carrés	48
2.5 Statistiques inférentielles	49
2.5.1 Distribution d'échantillonnage des moyennes	49
2.5.2 Tests de conformité d'une moyenne	51
2.6 Exercices	53

Chapitre 3. Graphes (non orientés)	61
3.1 Introduction	61
3.2 Premières notions et notations	62
3.3 Chaînes, cycles et connexité	64
3.4 Graphes eulériens	65
3.5 Codage d'un graphe	66
3.6 Coloration d'un graphe	68
3.7 Exemples d'optimisations dans un graphe	70
3.7.1 Exemple de recherches de chaînes optimales	70
3.7.2 Arbres	72
3.7.3 Arbres couvrants	73
3.8 Exercices	75
Chapitre 4. Arithmétique	85
4.1 Division euclidienne	85
4.2 Nombres premiers	86
4.2.1 Test de primalité	86
4.2.2 Décomposition en facteurs premiers	88
4.3 Congruences	89
4.4 PGCD	90
4.5 Résolution d'équations diophantiennes (exemples)	93
4.5.1 Résoudre dans \mathbb{Z} : (E) $9x + 15y = 11$	93
4.5.2 Résoudre dans \mathbb{Z} : (E) $9x + 15y = 18$	93
4.6 Les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	93
4.7 Application à la « cryptographie » (système RSA)	94
4.7.1 Principe du R.S.A. (Rivest, Shamir, Adleman)	94
4.7.2 Pourquoi $(M^e)^d = M$?	95
4.8 Exercices	96
Chapitre 5. Séries numériques	105
5.1 Introduction	105
5.2 Notion de convergence et de divergence	106
5.3 Séries de Riemann	107
5.4 Critère de Cauchy et D'Alembert	108
5.5 Critère de comparaison	109
5.6 Convergence absolue et semi convergence	110
5.7 Exercices	111

Chapitre 6. Séries de Fourier	119
6.1 Introduction	119
6.1.1 Rappels	119
6.1.2 Séries trigonométriques	120
6.2 Séries de Fourier	120
6.2.1 Définitions	120
6.2.2 Cas des fonctions paires ou impaires	121
6.3 Développement en série de fourier d'une fonction périodique	122
6.4 Exercices	123
Chapitre 7. Transformées de Laplace et Fourier	131
7.1 Généralités sur la transformée de Laplace	131
7.1.1 Généralités	131
7.1.2 Transformées de Laplace de fonctions usuelles	133
7.1.3 Propriétés des transformées de Laplace	134
7.2 Applications de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles	136
7.3 Généralités sur la transformée de Fourier	138
7.4 Exercices	140
Chapitre 8. Séries entières et transformée en Z	145
8.1 Séries entières	145
8.1.1 Introduction	145
8.1.2 Domaine de convergence	145
8.1.3 Détermination pratique du rayon de convergence	146
8.1.4 Propriétés des séries entières	147
8.1.5 Développement en séries entières des fonctions usuelles	149
8.2 Transformée en Z	150
8.2.1 Définitions	150
8.2.2 Propriétés de la transformée en Z	152
8.2.3 Transformées usuelles	154
8.2.4 Recherche d'originaux	154
8.3 Exercices	155
Chapitre 9. Diagonalisation de matrices	161
9.1 Vecteurs propres et valeurs propres	161
9.2 Polynôme caractéristique	162

9.3	Diagonalisation	164
9.4	Trigonalisation	165
9.5	Théorème de Cayley-Hamilton	166
9.6	Application : calcul de la puissance d'une matrice	167
9.7	Exercices	168
Chapitre 10. Dérivées partielles et opérateurs vectoriels		179
10.1	Notion de fonctions réelles de plusieurs variables	179
10.2	Dérivées partielles	180
10.3	Différentielles et dérivées totales	182
10.4	Dérivation vectorielle, opérateur nabla et vecteur gradient	183
10.5	Opérateurs divergent et rotationnel	185
10.6	Opérateur Laplacien	186
10.7	Exercices	186
Chapitre 11. Calcul des incertitudes		191
11.1	Introduction au calcul et à la présentation des incertitudes	191
11.2	Propagation des incertitudes : une introduction	192
11.3	Calcul des incertitudes en quadrature (moderne)	193
11.4	Incertitude de type A et de type B : généralités	197
11.5	Calcul des incertitudes de type A	197
11.6	Calcul des Incertitudes systématiques (de type B)	200
Chapitre 12. Intégrales multiples et applications		203
12.1	Rappels sur le calcul des aires planes par intégration	203
12.2	Calcul du volume des solides de révolution	204
12.3	Coordonnées cylindriques et sphériques	206
12.4	Intégrales doubles et triples	207
12.5	Application des intégrales multiples	208
12.6	Exercices	209
Chapitre 13. Le calcul numérique des intégrales		217
13.1	La méthode des rectangles.....	217
13.1.1	Principe de la méthode et code C.....	217
13.1.2	Code python	221
13.2	La méthode des trapèzes.....	222

13.2.1	Principe de la méthode et code C.....	222
13.2.2	Code python	224
13.3	Le cas des intégrales multiples	225
13.4	La méthode de MonteCarlo : évaluation d'une intégrale.....	225
13.4.1	Mise en jambes et principe de l'algorithme : cas d'une intégrale simple.	225
13.4.2	Code python	229
13.4.3	Un exemple : le cas des intégrales doubles	229
13.4.4	Code python pour l'intégrale double	232
Chapitre 14.	Exercices de révision	235
	Questions tirées du concours 2016.....	235
	Thème : Algèbre linéaire	235
	Questions tirées du concours 2015	236
	Thème : Algèbre linéaire	236
	Questions tirées du concours 2014.....	236
	Thème : Algèbre linéaire	236
	Questions tirées du concours 2013	237
	Thème : Algèbre linéaire, (Suites)	237
	Correction	238
	Questions tirées du concours 2012	245
	Probabilités	245
	Séries de Fourier	246
	Questions tirées du concours 2015	246
	Probabilités	246
	Correction	248
Annexe A.	Rappels de géométrie vectorielle.....	253
A.1	Produit scalaire de 2 vecteurs de \mathbb{R}^3	253
A.2	Produit vectoriel	254
A.3	Produit mixte	255
A.4	Double produit vectoriel	255
A.5	Exercices	256
Annexe B.	Table de la loi normale centrée réduite	259
B.1	Loi normale centrée réduite	259
B.2	Table pour des grandes valeurs de t	260

Objectifs

- Effectuer un dénombrement et en déduire une probabilité.
- Distinguer une loi de probabilité discrète et une loi continue.
- Modéliser un problème au travers d'une loi adaptée.
- Approximer une loi par une autre.
- Calculer et interpréter une espérance, une variance.

1.1 GÉNÉRALITÉS

1.1.1 Dénombrement

Définition 1.1

Soit E un ensemble fini.

Le cardinal de E , noté $\text{card}(E)$, est le nombre d'éléments de E .

Propriété 1.1

Soient E et F deux ensembles finis. On a :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Si, de plus, E et F sont disjoints ($E \cap F = \emptyset$) alors

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$$

Propriété 1.2

Soient E et F deux ensembles finis.

Le cardinal de $E \times F = \{(x, y) \text{ où } x \in E \text{ et } y \in F\}$ est tel que :

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$



La propriété précédente permet de dénombrer les tirages correspondants à des tirages successifs (ou dans lesquels la notion d'ordre est sous-jacente...).

Exercice 1.1

On prélève successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules vertes et une boule noire.

- Dénombrer les tirages avec une boule rouge puis une boule verte.
- Dénombrer les tirages avec une boule rouge et une boule verte.

Solution :

a. Dénombrer les tirages avec une boule rouge puis une boule verte revient à déterminer le cardinal de l'ensemble $R \times V$ où R correspond à l'ensemble constitué par les boules rouges et V correspond à l'ensemble des boules vertes.

On a : $\text{card}(R \times V) = \text{card}(R) \times \text{card}(V) = 3 \times 2 = 6$.

b. Dans ce second cas, il faut prendre en compte la position de la boule rouge (ou verte). Il s'avère qu'il y a deux positions envisageables pour la boule rouge donc le nombre de tirages avec une boule rouge et une boule verte est $2 \times 3 \times 2 = 12$.

Propriété 1.3

Soient E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tel que $p \leq n$.

Le nombre de sous-ensembles de E ayant p éléments est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Les parties à p éléments de E sont également appelées combinaisons de E à p éléments.



Les combinaisons sont utilisées lorsqu'on est confronté à des situations dans lesquelles l'ordre d'apparition d'un élément n'a pas d'importance...

Exercice 1.2

On prélève simultanément trois boules dans une urne contenant quatre boules rouges, trois boules vertes et une boule noire.

- Dénombrer les tirages avec trois boules rouges.
- Dénombrer les tirages avec deux boules rouges et une boule verte.

Solution

a. On souhaite dénombrer les tirages avec trois boules rouges parmi quatre donc il

y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages possibles.

b. Dans cette question, on peut choisir deux boules parmi quatre rouges et une boule parmi les trois vertes. Il y a donc $\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$ tirages possibles.



$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

$$\text{Plus généralement, on a : } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

1.1.2 Probabilités

Définition 1.2

Une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance est appelée expérience aléatoire.

Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une issue.

L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire est appelé univers noté Ω .

Toute partie de l'univers est appelée un événement.

Ω est appelé « événement certain » ; \emptyset est appelé « événement impossible ».

Un événement qui ne contient qu'une éventualité est un événement élémentaire.

Définition 1.3

Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils n'ont aucune éventualité commune.
- L'événement constitué de toutes les éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A est appelé l'événement contraire de A , noté \bar{A} .

Définition 1.4

Soit Ω un ensemble fini et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

L'application $p : P(\Omega) \rightarrow [0;1]$ est une probabilité sur Ω si :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour tous A et B de $P(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$
- $p(\Omega) = 1$.



La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A .

La somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent l'univers Ω est égale à 1.

Exercice 1.3

On fait tourner une roue de loterie dont les numéros sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

On note p_i la probabilité de l'événement $\{i\}$.

On suppose que : $p_1 = p_6 = 0,2$; $p_5 = 0,3$ et $p_2 = p_3 = p_4$.

Calculer la probabilité de l'événement A : « on obtient un nombre pair ».

Solution

$A = \{2;4;6\}$ et les événements $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$ sont deux à deux incompatibles.

On a donc : $P(A) = p_2 + p_4 + p_6$. De plus, $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$ donc $p_2 = p_4 = 0,1$ donc

$$P(A) = 0,4.$$

Propriété 1.4

Soient A et B deux événements de l'univers Ω , on a :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Définition 1.5

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.

Propriété 1.5

En situation d'équiprobabilité, on a, pour tout événement A d'un univers Ω fini :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exercice 1.4

On lance deux dés non truqués. Calculer la probabilité des événements A : "on obtient un double 6" et B : "on obtient une somme égale à 5".

Solution

Pour être en situation d'équiprobabilité, on est amené à considérer l'univers Ω comme un ensemble de 36 couples. Ainsi : $P(A) = \frac{1}{36}$.

De plus $B = \{(1;4), (4;1), (2;3), (3;2)\}$ donc $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Définition 1.6 : probabilité conditionnelle

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et B un événement de probabilité non nulle.

On appelle probabilité de A sachant B le nombre, noté $P_B(A)$, défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$$

Propriété 1.6 : formule des probabilités totales

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et A, B deux événements de probabilité non nulle. On a :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \text{ soit } P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\bar{B}}(A)P(\bar{B}).$$

Exercice 1.4

Une célèbre marque produit des objets de très bonne qualité, avec une probabilité de panne de 0,01.

Malheureusement, des contrefaçons de mauvaise qualité ont été mises sur le marché et elles occupent 20 % du marché. Ces contrefaçons ont une probabilité de panne de 0,1.

- Si on achète cet objet, quelle est la probabilité qu'il ne fonctionne pas ?
- Si on achète un produit défectueux, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une contrefaçon ?

Solution

On note D l'événement : « le produit est défectueux » et V l'événement : « le produit n'est pas une contrefaçon ».

a. $P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap \bar{V}) = P_V(D)P(V) + P_{\bar{V}}(D)P(\bar{V})$ donc
 $P(D) = 0,01 \times 0,8 + 0,1 \times 0,2 = 0,028$.

b. $P_D(\bar{V}) = \frac{P(D \cap \bar{V})}{P(D)} = \frac{0,2 \times 0,1}{0,028} = \frac{5}{7}$.

Définition 1.7 : événements indépendants

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

On dit que les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1.2 VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

1.2.1 Généralités

Exercice 1.5

On lance 3 fois une pièce de monnaie non truquée. On gagne 2 € si le résultat est « pile » (noté P) et on perd 1 € si le résultat est « face » (noté F).

Quels sont les gains possibles ? Avec quelle probabilité ?

Solution

L'univers associé à cette expérience est :

$$\Omega = \{(P,P,P);(P,P,F);(P,F,P);(P,F,F);(F,P,P);(F,P,F);(F,F,P);(F,F,F)\}$$

(P,P,P) est associé à un gain de 6 €, (P,P,F) est associé à un gain de 3 €...

De plus : $\text{card}(\Omega) = 8$ et on est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité de chacun des 8 événements élémentaires est égale à $\frac{1}{8}$.

On a ainsi le tableau suivant :

Gains x_i	-3	0	3	6
Probabilités p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On constate que la variable X permet d'effectuer un « transfert » de loi de probabilité de Ω sur le nouvel ensemble d'issues $\{-3 ; 0 ; 3 ; 6\}$.

Définition 1.8

Une variable aléatoire discrète X est une application de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui prend des valeurs isolées x_1, x_2, x_3, \dots

Définition 1.9

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω , muni d'une probabilité P telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

On appelle loi de probabilité de X , la suite (p_i) de réels définis par :

$$p_i = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}) = P(X = x_i).$$



$$\sum_i P(X = x_i) = 1.$$

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est donnée soit par la liste des probabilités (présentées dans un tableau), soit par une formule.

Définition 1.10

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

On appelle fonction de répartition de la variable X , la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par : $F_X(t) = P(X \leq t)$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on obtient :

$$\text{Si } t < -3 \text{ alors } F_X(t) = P(X \leq t) = 0$$

$$\text{Si } t \in [-3; 0[\text{ alors}$$

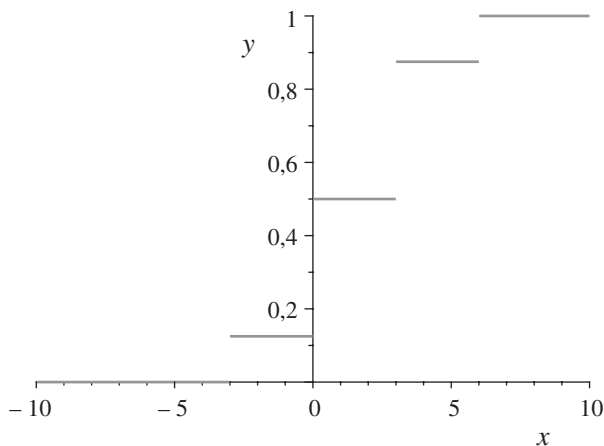
$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t) = P(X < -3) + P(X = -3) + P(-3 < X < t) \\ &= P(X = -3) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Si } t \in [0; 3[\text{ alors } F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = -3) + P(X = -3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 0,5$$

Plus précisément, la fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 0,125 & \text{si } x \in [-3; 0[\\ 0,5 & \text{si } x \in [0; 3[\\ 0,875 & \text{si } x \in [3; 6[\\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases} .$$

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier admettant des discontinuités en chacun des éléments de $X(\Omega)$.

1.2.2 Espérance, variance et écart-type

L'espérance a été introduite au XVII^e siècle pour représenter le gain moyen qu'un joueur était en droit d'attendre dans un jeu de hasard lorsqu'il engageait différents paris. Les définitions de ce paragraphe sont données sous réserve que la série considérée soit convergente.

Définition 1.11

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, x_3, \dots

L'espérance de X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i).$$



$E(X)$ est donc la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités $P(X = x_i)$.

Soit une application $g : I \rightarrow R$ telle que $X(\Omega) \subset I$.

$$\text{On a : } E(g(X)) = \sum_{i \geq 1} g(x_i) P(X = x_i).$$

Exemple

On dispose d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le 1 apparaisse.

On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

En outre, si on a obtenu l'as pour la première fois au k -ième lancer, cela signifie que l'on a obtenu un des résultats 2, 3, 4, 5, 6 aux $k - 1$ premiers lancers (avec une probabilité égale à $\frac{5}{6}$ à chaque fois). Ainsi, pour tout $k \geq 1$, on a : $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)$.

L'espérance de X est donc définie par : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)$

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

En utilisant $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$ et en dérivant par rapport à x (cf. chapitre 8),

$$\text{on a : } \sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi : $E(X) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = 6$ ce qui signifie, qu'en moyenne, le premier as

apparaîtra au sixième lancer.

Propriété 1.7 : linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire discrète et a, b deux réels. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Démonstration

Considérons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

$$E(aX + b) = \sum_{i \geq 1} (ax_i + b)P(X = x_i) = a \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) + b \sum_{i \geq 1} P(X = x_i) \text{ avec}$$

$$\sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) = E(X) \text{ et } \sum_{i \geq 1} P(X = x_i) = 1 \text{ donc } E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Définition 1.12

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, x_3, \dots et admettant une espérance.

La variance de X est le réel noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i \geq 1} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i).$$

L'écart-type de X est le réel noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.



La variance et l'écart-type permettent de mesurer la dispersion des valeurs x_i autour de l'espérance de X .

L'écart-type est exprimé dans la même unité que les valeurs x_i contrairement à la variance (sans unité). On utilise cependant très fréquemment la variance car elle est plus facile à manipuler que l'écart-type...

Exemple

Reprenons l'exemple d'introduction sur les variables aléatoires discrètes. On a obtenu la loi de probabilité suivante :

Gains x_i	-3	0	3	6
Probabilités	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = 1,5$ donc la variance de X est telle que :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i \geq 1} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i) \\ &= (-3 - 1,5)^2 \times \frac{1}{8} + \dots + (6 - 1,5)^2 \times \frac{1}{8} = 6,75 \end{aligned}$$

Il en résulte que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,6$.

On peut donc conclure que l'espérance de gain à ce jeu est de 1,50 € par partie (en moyenne) avec un écart-type d'environ 2,60 € (il y a donc une forte variabilité de gain).



Pour le calcul de la variance, on utilise parfois la formule suivante (formule de Koenig-Huyghens) :

$$V(X) = \sum_{i \geq 1} x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

En effet : $V(X) = \sum_{i \geq 1} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$. En développant $[x_i - E(X)]^2$, on

obtient : $V(X) = \sum_{i \geq 1} [x_i^2 - 2x_i E(X) + 2E(X)^2] P(X = x_i)$ soit

$$V(X) = \sum_{i \geq 1} x_i^2 P(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) + 2E(X)^2 \sum_{i \geq 1} P(X = x_i).$$

On a ainsi : $V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

Propriété 1.8

Soient X une variable aléatoire discrète et a, b deux réels.

On a : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E([aX + b]^2) - E(aX + b)^2 \\ &= E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - [aE(X) + b]^2 \end{aligned}$$

En développant et en utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient :

$$V(aX + b) = a^2 \{E(X^2) - E(X)^2\} = a^2 V(X).$$

1.2.3 Somme de deux variables aléatoires

On se contentera, dans ce paragraphe, de donner quelques notions fondamentales pour la bonne compréhension des prochains paragraphes.

Définition 1.13

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

X et Y sont indépendantes si, pour tout $(i, j) \in \{1; 2; \dots; m\} \times \{1; 2; \dots; n\}$, on a :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j).$$

Propriété 1.9

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et une variance.

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$.

Si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.



Ces relations sont également valables pour des variables aléatoires continues.

1.3 LOIS USUELLES DISCRÈTES**1.3.1 Loi de Bernoulli****Définition 1.14**

On dit que X est distribuée selon la loi de Bernoulli de paramètre p si :

- $X(\Omega) = \{0;1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

Propriété 1.10

Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi de Bernoulli de paramètre p .
On a : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration

$$E(X) = \sum_{k=0}^1 k P(X = k) = P(X = 1) = p. \text{ De plus, } X = X^2 \text{ donc } E(X^2) = p.$$

$$\text{Ainsi : } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

1.3.2 Loi binomiale

Définition 1.15

Supposons que l'on répète n fois, dans des conditions similaires, une expérience aléatoire dont l'issue est :

soit un succès (noté S) avec la probabilité p ;

soit un échec (noté E) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On suppose que le résultat d'une expérience est indépendant des résultats précédents et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n expériences.

On dit que X est distribuée suivant la loi binomiale de paramètres n et p notée $B(n; p)$.



$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}.$$

Une loi binomiale peut donc intervenir lorsqu'on s'intéresse au nombre de succès, lors de tirages successifs, **avec remise**. Lorsque les n tirages s'effectuent dans une population contenant un grand nombre N d'individus tel que $N > 10n$ (c'est-à-dire dès que la population est dix fois plus grande que l'échantillon), les tirages pourront être assimilés à des tirages avec remise.

Lien entre variable binomiale et variable de Bernoulli

Considérons désormais que, pour chaque expérience, le succès (S) sera associé à la valeur 1 alors que l'échec (E) sera associé à la valeur 0. Un résultat possible lorsque l'on répète n fois une telle expérience aléatoire est : (S ; E ; E ; ... ; S ; E ; S ; E).

Avec la notation binaire introduite précédemment, on a : (1,0,0,...,1,0,1,0).

De plus, pour chaque expérience, le résultat est 1 avec la probabilité p ou 0 avec la probabilité $1 - p$. On peut constater que le nombre de succès correspond à la somme des entiers du n -uplet. De façon plus générale, on peut définir ainsi une loi binomiale :

À chaque expérience numérotée i , $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, on peut donc associer une variable de Bernoulli de paramètre p notée X_i telle que : $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

Un résultat possible tel que $(X = k)$ est : (S ; ... ; S ; E ; ... ; E) (avec k fois S). En utilisant les variables de Bernoulli introduites précédemment, on obtient que la probabilité p_k de cet événement est :

$$p_k = P[(S ; \dots ; S ; E ; \dots ; E)] = P[(X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)]$$

On a vu que les résultats sont indépendants les uns des autres ce qui permet de dire que les variables X_i sont mutuellement indépendantes d'où

$$p_k = P(X_1 = 1) \times \dots \times P(X_k = 0) \times P(X_{k+1} = 0) \times \dots \times P(X_n = 0) = p^k (1 - p)^{n-k}.$$

De plus, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les positions des k succès parmi les n places

disponibles. Ainsi : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 1.11

Si une variable aléatoire X est distribuée suivant la loi binomiale $B(n; p)$ alors, pour tout $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Exercice 1.6

On suppose que la probabilité qu'un Smartphone fonctionne correctement durant les deux premières années d'utilisation est égale à 0,8.

Une entreprise achète pour ses employés dix Smartphones.

Quelle est la probabilité qu'au moins deux Smartphones tombent en panne durant les deux années à venir ?

Solution

On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de Smartphones défectueux dans les deux années à venir.

On peut supposer que les Smartphones ont des propriétés de fonctionnement indépendantes les unes des autres.

D'après l'énoncé, X est donc distribuée suivant la loi binomiale $B(10; 0,2)$.

Ainsi : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ soit

$$P(X \geq 2) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^{10} - \binom{10}{1} \times 0,2 \times 0,8^9.$$

La probabilité qu'au moins deux Smartphones tombent en panne durant les deux années à venir est environ égale à 0,624.

Propriété 1.12 : espérance et variance

Si X est distribuée selon la loi binomiale $B(n; p)$ alors on a :

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p).$$

Démonstration

On a vu précédemment que $X = \sum_{i=1}^n X_i$ où les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernouilli de paramètre p donc $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ avec $E(X_i) = p$.

Il en résulte que : $E(X) = np$.

De plus, les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes donc $V(X) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$ avec $V(X_i) = p(1-p)$. Il en résulte que : $V(X) = np(1-p)$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on a : $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$.

Ainsi, en moyenne, sur un lot de dix Smartphones, deux seront défectueux.

1.3.3 Loi de Poisson

Les lois de Poisson ont été introduites en 1838 par Siméon Denis Poisson (1781-1840). Elles ne correspondent pas à une situation type mais apparaissent pour modéliser certaines observations statistiques (pannes de machine, nombre de personnes passant à un guichet dans un temps donné,...) ou comme loi limite.

Définition 1.16

On dit que la variable aléatoire X est distribuée suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

La loi de Poisson de paramètre λ se note $P(\lambda)$.



Il s'agit bien d'une loi de probabilité car (cf. chapitre 8)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Propriété 1.13 : espérance et variance

Si X est distribuée selon la loi de Poisson $P(\lambda)$, alors on a :

$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda.$$