OLIVIER SARFATI – FRÉDÉRIC BROSSARD
BAPTISTE FRELOT – PAUL-LOUIS DONNARD

ECS 1RE ANNÉE

MATHS TOUT-EN-UN

DUNOD

Ressources numériques. Comment y accéder ?

Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté pour réussir vos concours, des compléments sont disponibles sur le site www.dunod.com.

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil). Sur la page de l'ouvrage, cliquez sur le logo « Les + en ligne ».

LES + EN LIGNE

Couverture : Hokus Pokus Créations

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-077875-1

Sommaire

Guide d'utilisation

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait **la synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation »**. Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils utiles** que nous vous invitons à respecter :

• **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de vos deux années de prépa, tout doit être maîtrisé.

• Avant de vous livrer aux exercices sans correction demandés par votre professeur(e) de prépa, essayez de **faire toutes les questions de l'ouvrage concernant le chapitre en jeu** (sauf bien sûr si certaines questions de l'ouvrage font appel à des notions que vous n'avez pas encore vues).

• **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.

• Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières de l'ouvrage pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.

• Quand vous analysez vos devoirs passés (devoirs maison, devoirs surveillés ou concours blancs), **identifiez les questions qui vous ont posé problème**. Pour chacune d'elles, plongez-vous dans la table des matières de l'ouvrage et **refaites les méthodes et exercices relatifs aux questions qui s'en rapprochent.**

• Avant chaque DS important ou concours blanc, rendez-vous sur le site de Dunod pour **vous entraîner sur les sujets de synthèse que nous vous proposons en ligne.**

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de mé-**

thodes et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, **il n'est pas un livre de recettes** : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Les auteurs de l'ouvrage

Olivier Sarfati, diplômé d'HEC (promotion 2000), enseigne les mathématiques aux étudiants de prépa HEC (ECS et ECE) depuis plus de 20 ans et dirige MyPrepa, institut de soutien scolaire en ligne et en live.

Frédéric Brossard, diplômé de Centrale Paris, enseigne les mathématiques en prépa HEC chez MyPrepa et à Intégrale (Paris). Ses relectures précieuses ont permis de valider le professionnalisme de l'ouvrage.

Baptiste Frelot, admis à HEC en 2016, enseigne les mathématiques chez MyPrepa et a eu 20/20 de moyenne en maths aux concours BCE. Sa finesse de raisonnement, son sens aigu de la pédagogie et de l'organisation ont grandement servi la qualité de l'ouvrage.

Paul-Louis Donnard, admis à HEC en 2015, enseigne les mathématiques chez MyPrepa et a eu 19,5/20 de moyenne en maths aux concours BCE. Sa connaissance encyclopédique des sujets de concours a donné à l'ouvrage une vision synthétique de 40 années d'annales.

Partie I

Généralités

Chapitre 1
Récurrence, Logique, Ensembles, Applications

On commence par un chapitre très structurant pour vos deux années. Les démonstrations par récurrence seront notamment présentes dans bien des chapitres (suites, séries, probabilités, variables aléatoires, matrices...) tandis que les démonstrations par l'absurde ou les raisonnements par équivalences vous suivront à peu près partout ! Les notions d'applications injectives, surjectives ou bijectives interviendront quelque peu en analyse mais mobiliseront surtout votre attention sur les chapitres d'algèbre linéaire. Vous l'aurez compris, il ne faut pas négliger ce chapitre introductif alors n'hésitez pas à vous y plonger et à y revenir régulièrement.

DANS CE CHAPITRE

23	questions classiques
48	méthodes
27	rappels de cours
49	exercices
5	morceaux choisis du concours

1.1. Logique

Question 1 Comment déterminer le contraire d'une proposition ?

Méthode **En écrivant le contraire de chaque élément de la proposition**

RAPPEL DE COURS

Soit A un ensemble, P et Q des propositions.
On note $\neg P$ le contraire de P.
On rappelle que $\forall$ se lit "pour tout" et $\exists$ se lit "il existe".

- Le contraire de $\geq$ est $<$
- Le contraire de $(\forall x \in A, P)$ est $(\exists x \in A, \neg P)$
  Ex : le contraire de $\forall x \geq 1,\ f(x) < 1$ est :
  $\exists x \geq 1,\ f(x) \geq 1$
- Le contraire de $(\exists x \in A, P)$ est $(\forall x \in A, \neg P)$
- Le contraire de $(P \Longrightarrow Q)$ est $(P$ et $\neg Q)$
  Ex : le contraire de $x \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow f(x) > g(x)$ est :
  $x \in \mathbb{R}_+$ et $f(x) \leq g(x)$
- Le contraire de $(P \Longleftrightarrow Q)$ est $((P$ et $\neg Q)$ ou $(\neg P$ et $Q))$
- Le contraire de $(P$ et $Q)$ est $(\neg P$ ou $\neg Q)$
- Le contraire de $(P$ ou $Q)$ est $(\neg P$ et $\neg Q)$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer le contraire d'une proposition, on procède en respectant les règles sur les contraires ci-dessus, en écrivant le contraire de chaque composant de la proposition. On commence par l'élément de gauche, puis on écrit le contraire des différents éléments jusqu'au dernier élément de droite. Le brouillon de l'exercice ci-dessous permet de mieux comprendre la méthode à appliquer.

Exercice

Ecrire le contraire de :
$$"\forall x > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Longrightarrow \left(\frac{1}{n} \leq x\right)"$$

Corrigé

Brouillon

- Le contraire de $\forall x > 0,\ P_1$ est $\exists x > 0,\ \neg P_1$
- Le contraire de $\exists N \in \mathbb{N}, P_2$ est $\forall N \in \mathbb{N}, \neg P_2$
- Le contraire de $\forall n \in \mathbb{N},\ P_3$ est $\exists n \in \mathbb{N},\ \neg P_3$
- Le contraire de $(n \geq N) \Longrightarrow \left(\frac{1}{n} \leq x\right)$ est :
  $(n \geq N)$ et $\left(\frac{1}{n} > x\right)$

Le contraire de la proposition est :

$$\boxed{\exists x > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in N,\ (n \geq N) \text{ et } \left(\frac{1}{n} > x\right)}$$

Question 2 Comment montrer qu'une proposition est vraie ?

Méthode 1 Pour un $\forall$, en montrant que pour un x quelconque vérifiant les conditions, la proposition est vérifiée

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, "$\forall x \in A, ...$" signifie que quel que soit x pris dans A, on a la proposition qui suit qui est vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, on prend donc un x quelconque dans A (on commence le raisonnement par "soit $x \in A$"), puis on va chercher à montrer la proposition qui suit.

Exercice

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x \geq -1$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$
Donc $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ et $x^2 + 2x \geq -1$
Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x \geq -1}$

Méthode 2 Pour un $\exists$, en trouvant un x vérifiant les conditions telle que la proposition soit vérifiée

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, "$\exists x \in A, ...$" signifie qu'on peut trouver x dans A tel que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, il faut donc trouver un x tel que la proposition soit vérifiée (un raisonnement comme cela peut se terminer par exemple par "Donc pour $x = ...$, on a bien...")

Exercice

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 5x + 2 \end{cases}$
Montrer que $\exists\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) \geq 2$

Corrigé

Pour $x=0,\ f(x)=f(0)=2\geq 2$
Donc $\boxed{\exists x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 2}$

Méthode 3

En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un $\forall$ et un $\exists$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Souvent, la proposition à prouver contiendra à la fois $\forall$ et $\exists$. Il faudra donc combiner les *Méthodes 1 et 2* vues ci-dessus pour pouvoir montrer que la proposition est vraie.

Exercice

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x\leq y$

Corrigé

Soit $x\in\mathbb{R}$, posons $y=x+1$.
On a $x+1\geq x$ donc $y\geq x$
On a donc bien $\exists y\in\mathbb{R},\ x\leq y$
Ainsi $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x\leq y}$

Méthode 4

Si la phrase est écrite avec des mots et non des termes quantifiés, en traduisant l'expression en termes quantifiés puis en utilisant les méthodes précédentes

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition à montrer est du type "Montrer que..." avec des termes en français et non des termes quantifiés, il faut d'abord traduire la phrase en termes quantifiés pour pouvoir ensuite utiliser les méthodes 1,2 et 3 vues ci-dessus pour montrer que la proposition est vraie.

Exercice

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissantes sur $\mathbb{R}$ et $h=f\circ g$. Montrer que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Montrons que h est croissante sur $\mathbb{R}$
i.e. montrons que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\leq y \implies h(x)\leq h(y)$
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, supposons $x\leq y$.
On a alors $g(x)\geq g(y)$ car g est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(g(x)) \leq f(g(y))$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$
Donc $h(x) \leq h(y)$
Donc $\boxed{h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

Méthode 5 Par l'absurde

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut raisonner par l'absurde : on suppose que le contraire de la proposition est vrai, puis on poursuit le raisonnement jusqu'à aboutir à une contradiction. Notre supposition étant fausse, le contraire de la proposition est donc faux, et donc la proposition est vraie.
Les raisonnements par l'absurde sont très utiles, notamment dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Exercice

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}, \quad \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$

Corrigé

Supposons par l'absurde $\exists\ x \in \mathbb{R}\ \backslash\{-2\}, \dfrac{x+1}{x+2} = 1$
On a alors $x + 1 = x + 2$ donc $1 = 2$, ce qui est absurde.
On a une contradiction, donc la supposition est fausse.
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}, \ \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1}$

Méthode 6 Pour un ∃! (ou un ∃), par analyse synthèse

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, "$\exists! x \in A, ...$" se lit "il existe un unique x appartenant à A tel que..." et signifie qu'on peut trouver un et un seul x dans A telle que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer cela, on peut procéder par analyse synthèse, c'est un raisonnement en deux étapes :
• **Etape 1 :** L'analyse (pour montrer l'unicité si existence).
On suppose l'existence et on va par une série de déductions montrer qu'il n'y a qu'un seul élément x (que l'on va expliciter) qui peut vérifier les conditions
• **Etape 2 :** La synthèse (pour montrer l'existence).
On prend cet élément x explicité au cours de la phase d'analyse et on montre qu'il vérifie bien les conditions.
Cette méthode peut aussi permettre de montrer un $\exists$, dans la mesure où si l'on montre l'existence d'un unique, on montre alors l'existence.

Exercice

Notons F l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P l'ensemble des fonctions paires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des fonctions impaires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall f \in F,\ \exists!(p,i) \in P \times I,\ f = p + i$

RAPPEL DE COURS

- Pour A et B deux ensembles, $(x,y) \in A \times B$ signifie que $x \in A$ et $y \in B$
- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = p(x)$
- $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = -i(x)$

Corrigé

Soit $f \in F$, montrons que $\exists!(p,i) \in P \times I,\ f = p + i$
Procédons par analyse-synthèse.
Analyse :
Supposons qu'il existe $(p,i) \in P \times I$ tels que $f = p + i$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = p(x) + i(x) \quad (*)$
$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) \quad (**)$ car p est paire et i impaire
En sommant les égalités $(*)$ et $(**)$,
On obtient : $f(x)+f(-x) = 2p(x)$ donc $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$
On a alors d'après $(*)$,
$i(x) = f(x) - p(x) = f(x) - \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Synthèse :
Posons p et i définies pour tout x dans $\mathbb{R}$ par :
$p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien :
$f(x) = p(x) + i(x)$
$p(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x)$
Donc p est paire.
$i(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = -i(x)$
Donc i est impaire. Donc p et i conviennent.
On a donc bien $\boxed{\forall f \in F,\ \exists!(p,i) \in P \times I,\ f = p + i}$

Méthode 7 **Pour un $\exists!$, en trouvant un x vérifiant les conditions telle que la proposition soit vérifiée, puis en montrant que si y vérifie aussi la proposition alors $x = y$**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer "$\exists! x \in A, ...$" on peut démontrer d'abord l'existence en donnant un x dans A pour lequel cela fonctionne. Pour l'unicité, on prend un y quelconque dans A vérifiant également les conditions et on montre que $x = y$

Exercice

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $K \in \mathbb{R}^*$.
1) Soit $f \in E$ vérifiant $f' = Kf$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f ne s'annule pas. (On pourra introduire la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$)
2) Montrer alors $\exists! f \in E,\ f' = Kf$ et $f(0) = 1$

Corrigé

1) Posons $g : x \mapsto f(x)f(-x)$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, on a : $g'(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x)$
$= Kf(x)f(-x) - Kf(-x)f(x) = 0$
Donc g est constante sur $\mathbb{R}$, i.e. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = c$
Or $g(0) = f(0)f(0) = 1$ donc $c = 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1$ i.e. $f(x)f(-x) = 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ et $f(-x) \neq 0$ car sinon on aurait $g(x) = 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$

2) **Existence** : Posons $f : x \mapsto e^{Kx}$.
f convient car $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = Ke^{Kx} = Kf(x)$ et $f(0) = 1$
Unicité : Soit $h \in E$ vérifiant également ces conditions.
Posons $i = \dfrac{f}{h}$, i est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$i'(x) = \dfrac{f'(x)h(x) - h'(x)f(x)}{h^2(x)} = \dfrac{Kf(x)h(x) - Kh(x)f(x)}{h^2(x)}$
$= 0$ donc i est constante sur $\mathbb{R}$
Donc $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, i(x) = c$. Or $i(0) = \dfrac{f(0)}{h(0)} = 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ i(x) = 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(x)}{h(x)} = 1$ i.e. $f(x) = h(x)$
Donc $f = h$ et on a bien l'unicité de f.
Donc $\boxed{\exists! f \in E,\ f' = Kf \text{ et } f(0) = 1}$

Méthode 8 Pour un $\exists!$, en raisonnant par équivalence

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer un $\exists!$ lorsqu'il s'agit d'une équation, et qu'on cherche donc à prouver que cette équation admet une unique solution, on peut partir de l'équation et raisonner par équivalences successives jusqu'à arriver à une unique solution.
Attention, l'utilisation des équivalents est source de nombreuses erreurs : si vous procédez par équivalences successives, assurez-vous que le sens direct et le sens réciproque sont vérifiés pour chaque équivalence. Trop souvent, les étudiants écrivent une équivalence alors qu'il n'y a en réalité qu'une implication.

Exercice

Montrer que $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1$ et $3x - 2y = 1$

Corrigé

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\boxed{\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1 \text{ et } 3x - 2y = 1}$

Méthode 9 Pour un $\exists!$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en utilisant le théorème de la bijection

RAPPEL DE COURS

Soit f une fonction de I ($I \subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f établit une bijection de I dans $f(I)$, et on a $\forall a \in f(I),\ \exists! x \in I,\ f(x) = a$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition est de la forme $\exists ! \ x \in I, f(x) = a$ où $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on peut parfois montrer cette proposition en utilisant le théorème de la bijection. Il faut alors montrer que f est continue et strictement monotone sur I, et que $a \in f(I)$.
Attention à ne pas vous tromper pour déterminer $f(I)$:
Par exemple, si f est croissante avec $I =]-\infty, a]$,
on a $f(I) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(a)]$

Exercice

Soit $n \geq 2$, montrer que $\exists! x \in]1, +\infty[, \ x^n - x - 1 = 0$

Corrigé

Posons $f : \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n - x - 1 \end{cases}$

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = nx^{n-1} - 1 > 0$
car $nx^{n-1} \geq n(1)^{n-1} \geq n \geq 2 > 1$
Donc f est strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$,
or $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Donc f établit une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]-1, +\infty[$.
Or 0 appartient à $]-1, +\infty[$, donc $\exists!\ x \in]1, +\infty[, \ f(x) = 0$
Donc $\boxed{\exists! x \in]1, +\infty[, \ x^n - x - 1 = 0}$

Question 3 Comment montrer qu'une proposition est fausse ?

Méthode 1 S'il s'agit d'un $\forall$, en trouvant un contre-exemple

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition commençant par "$\forall x \in A$" est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple (un seul suffit, il ne faut raisonner dans le cas général), i.e. trouver un x dans A telle que la proposition ne soit pas vérifiée.

Exercice

La proposition suivante est-elle vraie ?
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \Longrightarrow \sin(x) \leq \sin(y)$

Corrigé

Pour $x = 0$ et $y = \dfrac{3\pi}{2}$, on a $x \leq y$
Et pourtant $\sin(x) = 0 > -1 = \sin(y)$
Donc $\boxed{\text{la proposition est fausse}}$

Méthode 2 S'il s'agit d'un $\exists$, en montrant que quel que soit le x choisi vérifiant les conditions, la proposition n'est pas vérifiée

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition du type "$\exists x \in A, \ P$" est fausse, il faut montrer que "$\forall x \in A,\ \neg P$". En effet, si quel que soit x dans A, P n'est pas vérifiée, alors on ne peut pas trouver de x dans A tel que P soit vérifiée.

Exercice

La proposition suivante est-elle vraie ?
$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = -2$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ donc $x^2 - 1 \geq -1$ donc $x^2 - 1 > -2$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \neq -2$
Donc $\boxed{\text{la proposition est fausse}}$

Méthode 3 En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un $\forall$ et un $\exists$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, la proposition est composée à la fois de $\exists$ et de $\forall$. Il faudra donc combiner les *Méthodes 1 et 2* vues ci-dessus pour montrer que la proposition est fausse.

Exercice

La proposition suivante est-elle vraie ?
$\forall n \in \mathbb{N},\quad \exists p \in \mathbb{N},\quad n = 2p$

Corrigé

Posons $n = 1$.
$\forall p \in \mathbb{N},\ n \neq 2p$ car $2p$ est pair et $n = 1$ est impair
On a donc trouvé un contre-exemple.
Donc $\boxed{\text{la proposition est fausse}}$

Question 4 Comment montrer une implication directe $(H \Longrightarrow P)$?

Méthode 1 En supposant H vraie, et en montrant P vraie

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que $(H \Longrightarrow P)$, on commence la rédaction par "supposons H", et on cherche à montrer que P est vraie.

Exercice

Soit $f:\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ a+ib\mapsto(a+b)+i(a-b)\end{cases}$

Montrer que $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad (f(z)=f(z'))\Longrightarrow(z=z')$

Corrigé

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, supposons $f(z)=f(z')$.
Notons $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ avec $(a,b,a',a')\in\mathbb{R}^4$
On a $f(z)=f(z')$ donc $(a+b)+i(a-b)=(a'+b')+i(a'-b')$
Or, deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie imaginaire et même partie réelle.
Ainsi : $\begin{cases}a+b=a'+b'\\ a-b=a'-b'\end{cases}$ donc $\begin{cases}b=b'\\ a=a'\end{cases}$ donc $z=z'$

Donc $\boxed{\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,(f(z)=f(z'))\Rightarrow(z=z')}$

Méthode 2 Par contraposée

RAPPEL DE COURS

- La contraposée de $P\Longrightarrow Q$ est $\urcorner Q\Longrightarrow\urcorner P$
- Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une implication est vraie, on peut montrer que sa contraposée est vraie. On va donc montrer que le contraire de Q implique le contraire de P.

Exercice

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, montrer : $(\forall\varepsilon>0,a<b+\varepsilon)\Longrightarrow(a\leq b)$

Corrigé

Montrons la contraposée : $(a>b)\Longrightarrow(\exists\varepsilon>0,\ a\geq b+\varepsilon)$.
Supposons $a>b$. On a $a-b>0$.
Posons $\varepsilon=a-b$, on a alors $\varepsilon>0$.
On a bien $a\geq b+\varepsilon$ car $b+\varepsilon=b+a-b=a$
Donc $(a>b)\Longrightarrow(\exists\varepsilon>0,\quad a\geq b+\varepsilon)$
Ainsi, par contraposée : $\boxed{(\forall\varepsilon>0,a<b+\varepsilon)\Longrightarrow(a\leq b)}$

Question 5 Comment montrer une équivalence $(H \iff P)$?

RAPPEL DE COURS

__Vocabulaire__
On dit que P est une **condition nécessaire** pour H si et seulement si $H \implies P$
On dit que P est une **condition suffisante** pour H si et seulement si $P \implies H$
On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour H si et seulement si $H \iff P$

Méthode 1 En raisonnant par équivalences successives

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence $(H \iff P)$, on peut raisonner par équivalences successives, en partant de H jusqu'à arriver à P (ou dans l'autre sens). On a un raisonnement de la forme suivante : $H \iff A \iff B \iff ... \iff P$
Attention, ce raisonnement peut être source d'erreurs car de nombreux étudiants mettent des $\iff$ alors qu'il y a seulement une implication. Il faut donc s'appliquer pour chaque $\iff$ à vérifier qu'il y a bien implication et implication réciproque pour ne pas faire d'erreur dans le raisonnement.

Remarque

Si l'on applique une fonction f à une égalité ou une inégalité de réels, il faut justifier la bijectivité de f (le plus souvent en disant que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle auquel appartiennent les éléments de l'équivalent) pour obtenir une relation d'équivalence, et pas juste une implication.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $(x \geq 1) \iff \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0\right)$

Corrigé

$(x \geq 1) \iff (\sqrt{x} \geq 1)$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$
$\iff (\sqrt{x} - 1 \geq 0) \iff \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0\right)$ car $x > 0$

Donc $\boxed{(x \geq 1) \Longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0\right)}$

Méthode 2 Par implication directe puis implication réciproque

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence lorsqu'on ne peut pas raisonner par équivalences successives, il faut raisonner par implication directe puis implication réciproque.
On montre d'abord l'implication directe ($H \Longrightarrow P$) : "Supposons H, montrons P".
Puis on montre l'implication réciproque ($P \Longrightarrow H$) :"Supposons P, montrons H".

Exercice

Pour A une partie de $\mathbb{R}$, on note 1_A la fonction définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.
Montrer que : $(1_A = 1_B) \Longleftrightarrow (A = B)$

Corrigé

• Supposons $(1_A = 1_B)$, montrons que $A = B$
- Soit $x \in A$, $1_A(x) = 1$ car $x \in A$.
Or $1_A(x) = 1_B(x)$ donc $1_B(x) = 1$ donc $x \in B$
Donc $A \subset B$.
- Soit $x \in B$, $1_B(x) = 1$ car $x \in B$.
Or $1_B(x) = 1_A(x)$ donc $1_A(x) = 1$ donc $x \in A$
Donc $B \subset A$ et ainsi $A = B$

• Supposons $A = B$, montrons que $(1_A = 1_B)$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
Cas 1 : $x \in A$ (donc $x \in B$), on a $1_A(x) = 1 = 1_B(x)$
Cas 2 : $x \notin A$ (donc $x \notin B$), on a $1_A(x) = 0 = 1_B(x)$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $1_A(x) = 1_B(x)$ et ainsi $1_A = 1_B$

Ainsi $\boxed{(1_A = 1_B) \Longleftrightarrow (A = B)}$

Question 6

Comment montrer une triple équivalence ($A \iff B \iff C$) ?

Méthode **En montrant** $A \Longrightarrow B,\ B \Longrightarrow C$ **et** $C \Longrightarrow A$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une triple équivalence $A \iff B \iff C$, on peut raisonner par implications successives en montrant $A \Longrightarrow B,\ B \Longrightarrow C$ et $C \Longrightarrow A$ (ou $C \Longrightarrow B,\ B \Longrightarrow A$ et $A \Longrightarrow C$) de sorte à former un « cercle » d'implications $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow A$ permettant ainsi d'avoir des équivalences entre les 3 propositions.
Pour montrer une quadruple ou quintuple équivalence, il faudrait procéder de la même manière en montrant les implications successives.

Exercice

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ($I \subset \mathbb{R}$)
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
1. La fonction f est convexe sur I
2. La dérivée f' est croissante sur I
3. La courbe C_f de f est située au-dessus de ses tangentes, i.e. $\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$

Indications :
(i) pour montrer que (1) $\Rightarrow$ (2), on pourra utiliser la proposition rappelée ci-dessous :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et, $\forall x \in I\backslash\{a\},\ \varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

Les assertions suivantes sont équivalentes
1. La fonction f est convexe sur I
2. Pour tout $a \in I$, la fonction φ_a est croissante sur I

(ii) Pour montrer que (3) $\Rightarrow$ (1), on pourra poser les éléments suivants :
Soient $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$ deux points de la courbe de f et soit $x \in [x_1, x_2]$.
Soit P le point du segment $[M_1, M_2]$ d'abscisse x.
Soit M le point de l'arc $\overset{\frown}{M_1, M_2}$ d'abscisse x.
On note T_M la tangente en M à la courbe C_f.
On pourra montrer successivement les points suivants :
- M_1 et M_2 sont tous deux au-dessus de T_M
- Tout point du segment $[M_1, M_2]$ est au-dessus de T_M
- P est au-dessus de M

On conclura alors en utilisant l'inégalité des cordes rappelée ci-dessous :
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. La fonction f est convexe sur I.

2. Tout arc de la courbe C_f de f est situé sous la corde qui joint ses extrémités.

Corrigé

• Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2). On suppose f convexe sur I.
Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
Posons $(x, y) \in I^2$ tel que $a < x < y < b$
D'après les résultats rappelés dans l'énoncé,
$\forall a \in I$, $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante
Donc $\varphi_x(a) \leq \varphi_x(y) = \varphi_y(x) \leq \varphi_y(b)$
i.e. $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b}$
Comme f est dérivable sur I, en faisant tendre $x \to a$ et $y \to b$, on a $f'(a) \leq f'(b)$ (on a reconnu un taux d'accroissement) i.e. f' est croissante sur I
D'où (1) $\Rightarrow$ (2)
• Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3). On suppose f' croissante sur I.
Soit $a \in I$.
On pose $g_a : x \mapsto f(x) - f(a) - f'(x)(x - a)$ définie sur I
$g_a \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $\forall x \in I,\ g_a'(x) = f'(x) - f'(a)$
Par croissance de f', $f'(x) - f'(a)$ est du signe de $x - a$, et on a alors

x	a
$g_a'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
	$\searrow$ $\quad 0 \quad$ $\nearrow$

$\forall x \in I,\ g_a(x) \geq 0$ i.e. $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$
D'où (2) $\Rightarrow$ (3)
• Montrons que (3) $\Rightarrow$ (1)
On suppose que C_f est située au-dessus de ses tangentes i.e. $\forall (a, x) \in I^2,\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$
On suit les indications de l'énoncé et on pose :

- $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$ deux points de la courbe ($x_1 < x_2$)
- $x \in [x_1, x_2]$
- P le point du segment $[M_1, M_2]$ d'abscisse x
- M le point de l'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ d'abscisse x
- T_M la tangente en M à la courbe C_f

Pour montrer que f est convexe, on montre que $\overset{\frown}{M_1M_2}$ est au-dessous de $[M_1, M_2]$ autrement dit que M est au-dessous de P.

$$P \in [M_1, M_2] \iff \exists \lambda \in [0,1],\ P = \lambda M_1 + (1-\lambda) M_2$$

En particulier $\begin{cases} x = x_P & = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \\ \quad\ y_P & = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \end{cases}$

Par hypothèse : $\begin{cases} \bullet \quad f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x) \\ \bullet \quad f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x) \end{cases}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_P &\geq \lambda[f(x) + f'(x)(x_1 - x)] + (1-\lambda)[f(x) + f'(x)(x_2 - x)] \\ &\geq f(x) + f'(x)[\lambda(x_1 - x) + (1-\lambda)(x_2 - x)] \\ &\geq f(x) + f'(x)[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x] \end{aligned}$$

Et, comme $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = x$

$$\geq f(x)$$

Donc $y_P \geq y_M$, ainsi P est situé au-dessus de M

Donc tout arc de la courbe C_f de f est situé sous la corde qui joint ses extrémités.

D'après l'inégalité des cordes, on conclut que f est convexe.
D'où (3) $\Rightarrow$ (1)

Ainsi, on peut conclure que les propositions (1), (2) et (3) sont équivalentes entre elles.

1.2. Récurrence

Remarque

1. Lorsque l'on doit faire une récurrence, deux cas de figure peuvent se présenter :
• L'hypothèse de récurrence est donnée par l'énoncé : il suffit alors d'appliquer la méthode de récurrence adaptée.
• L'hypothèse de récurrence n'est pas donnée par l'énoncé : il faut alors réfléchir au brouillon pour déterminer cette hypothèse de récurrence.

2. Attention à ces erreurs fréquentes :
• Dans le cas d'une récurrence portant sur un entier n, le $\forall n$ doit être placée avant la proposition $P(n)$ et non à l'intérieur de celle-ci.
• Au niveau de l'hérédité on choisit de raisonner sur un entier n quelconque **fixé** et non $\forall n$.

Question 1 Comment prouver une proposition par récurrence ?

Méthode 1 Par récurrence simple

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On utilise une récurrence simple sur n dans $\mathbb{N}$ pour montrer un résultat faisant intervenir une somme ou un produit fini indexé sur n, une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ou encore une expression explicitée directement en fonction de n.
1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0, \quad P(n)$.

2. Initialiser la propriété pour n_0 : montrer $P(n_0)$ vraie.
3. Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n)$. On montre alors $P(n+1)$.
4. On conclut.

Exercice

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "$(1+x)^n \geq 1+nx$"
• $\underline{n=0}$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0.x$ et $P(0)$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $P(n)$ vraie, i.e. $(1+x)^n \geq 1+nx$
En multipliant par $1+x \geq 0$, on a :
$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$
Or $nx^2 \geq 0$, et donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
D'où $P(n+1)$ vraie.
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx}$

Remarque

L'expression en jeu dépend ici de deux éléments distincts : un réel x et un entier n. Il y a alors deux possibilités de rédaction :
1. Poser le réel x en amont puis rédiger la propriété de récurrence en fonction de n. Le réel x est, dans toute la récurrence, quelconque et fixé.
2. Ne pas poser le x en amont et l'inclure dans la propriété de récurrence. La rédaction, appliquée à cet exemple, serait alors la suivante :
Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "$\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$"
On répètera alors le pour tout x dans toute la récurrence.

Méthode 2 Par récurrence double

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Ce type de récurrence s'utilise quasiment exclusivement pour montrer un résultat portant sur une suite sur laquelle on possède une relation liant $u_{n+2},\ u_{n+1}$ et u_n.
Voici le raisonnement à appliquer :
1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0,\quad P(n)$
2. Initialiser la propriété pour pour n_0 et n_0+1.
Attention à ne pas oublier d'initialiser la propriété pour deux entiers, et pas uniquement pour n_0.

3. Procéder à l'hérédité : on pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$. On montre alors $P(n+2)$.
4. On conclut.

Exercice

La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Montrer que $\forall n \geq 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé

Posons $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ P(n)$: "$u_n \in \mathbb{N}^*$"
• <u>$n = 2$ et $n = 3$</u> : $u_2 = u_1 + u_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $P(2)$ vraie.
$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}^*$ et $P(3)$ vraie.
• Soit $n \geq 2$, supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies.
Alors $u_n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Donc $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$ d'où $P(n+2)$ vraie.
Donc $\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\quad u_n \in \mathbb{N}^*}$

Remarque

Nous avons jusqu'ici vu les récurrences simples et doubles. Des récurrences triples, quadruples ou plus peuvent de même être menées. Pour réaliser une récurrence d'ordre p, il faut :
1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0,\quad P(n)$.
2. Initialiser la propriété pour les p premiers termes.
3. Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n),\ P(n+1), ...$ et $P(n+p-1)$. On montre alors $P(n+p)$.
4. On conclut.
L'exercice ci-dessous illustre une récurrence triple.

Exercice

Extrait d'ESSEC 1994

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant :
$\forall n \geq 1,\ 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0 \quad (1)$
Soit v une suite vérifiant (1) avec $v_1 = v_2 = v_3 = 0$
Montrer que $\forall n \geq 1,\ v_n = 0$

Corrigé

Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "$v_n = 0$"
• <u>Initialisation</u> : $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ d'où $P(1), P(2)$ et $P(3)$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n), P(n+1)$ et $P(n+2)$.
(v_n) vérifie (1) donc $9v_{n+3} = 9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n$
Et par hypothèses de récurrence : $9v_{n+3} = 0$ i.e. $v_{n+3} = 0$
D'où $P(n+3)$ vraie.

Ainsi, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 0}$

Méthode 3

Par récurrence forte

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode s'applique quasiment exclusivement aux suites définies avec une relation liant u_{n+1} à $u_{n_0}, u_{n_0+1}, ..., u_n$
Voici comment raisonner pour faire une récurrence forte :
1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0, \quad P(n)$
2. Initialiser la propriété pour n_0
3. Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n_0), \ P(n_0+1), ...,$ et $P(n)$. On montre alors $P(n+1)$.
4. On conclut

Si la récurrence simple est possible, elle doit être priviligiée à la récurrence forte. La récurrence forte ne doit être utilisée que si la récurrence simple ne fonctionne pas.

Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n \end{cases}$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq 2^n$

Corrigé

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$: "$u_n \leq 2^n$"
• <u>Pour $n = 0$</u> : $\quad u_0 = 1 \leq 2^0$ donc $P(0)$ vraie
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(k)$ vraies. Par sommation des $(n+1)$ inégalités des hypothèses de récurrence, il vient :
$$u_0 + u_1 + ... + u_n \leq 2^0 + 2^1 + ... + 2^n \quad \text{i.e} \quad u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k$$
On reconnaît une somme géométrique $(2 \neq 1)$,
Donc $u_{n+1} \leq \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$
D'où $\quad u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2^n}$

Méthode 4

Par récurrence descendante

POINT MÉTHODOLOGIQUE

La récurrence descendante procède en sens inverse, et celle-ci doit se faire sur un intervalle de la forme $]\!] -\infty, n_0]\!]$.
On initialise la propriété au dernier rang.

L'hérédité, elle, consiste à prouver que la propriété est vraie pour un rang inférieur.
On peut faire des récurrences descendantes simples, doubles et fortes.
La récurrence simple descendante étant la plus fréquente, la manière dont il faut l'appliquer est résumée ci-dessous :
1. Poser la propriété de récurrence : $\forall i \in]\!] -\infty, n_0]\!], \quad P(i)$
2. Initialiser la propriété au rang n_0.
3. Procéder à l'hérédité. On pose un i fixé appartenant à $]\!] -\infty, n_0]\!]$ et on suppose $P(i)$. On montre alors $P(i-1)$.
4. On conclut.

Exercice

Extrait d'ESSEC 1978

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $N = a + b$.
On définit $\forall k \in]\!]0, a-1]\!], (p(n,k))_{n\geq 1}$ la suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n, a-1) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in]\!]0, a-1]\!]$,

$$p(n+1,k) = \frac{b+k}{N}\, p(n,k) + \frac{a-k+1}{N}\, p(n,k-1)$$

Montrer que $\forall k \in]\!] -\infty, a-1]\!], \lim\limits_{n\to+\infty} p(n,k) = 0$

Corrigé

Posons $\forall k \in]\!] -\infty, a-1]\!], \; P(k) :$ " $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n,k) = 0$"

• Initialisation : pour $k = a-1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n,a-1) = 0$ donc $P(a-1)$ est vraie

• Soit $k \in]\!] -\infty, a-1]\!]$. Supposons $P(k)$ vraie.
D'après la relation de l'énoncé, on a :

$$p(n+1,k) - \frac{b+k}{N} p(n,k) = \frac{a-k+1}{N}\, p(n,k-1)$$

et comme $\dfrac{a-k+1}{N} \neq 0$, on a :

$$\frac{N}{a-k+1}\left[p(n+1,k) - \frac{b+k}{N} p(n,k)\right] = p(n,k-1)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n+1,k) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(n,k) = 0$ d'après $P(k)$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} p(n,k-1) = 0$ d'où $P(k-1)$ est vraie.

Ainsi on a $\boxed{\forall k \in]\!] -\infty, a-1]\!], \quad \lim\limits_{n\to+\infty} p(n,k) = 0}$

Méthode 5 Par récurrence sur une partie de $\mathbb{N}$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Les récurrences sur une partie de $\mathbb{N}$ sont employées lorsqu'on

veut démontrer une propriété $P(i)$ pour tout i appartenant à une partie de $\mathbb{N}$. Il faut ici être très rigoureux au niveau de la rédaction. La récurrence simple sur une partie de $\mathbb{N}$ étant la plus fréquente, voici la manière dont il faut procéder pour l'appliquer :
1. Poser la propriété de récurrence : $\forall i \in [\![n_0, n_1]\!],\ P(i)$
2. Initialiser la propriété au rang n_0
3. Procéder à l'hérédité : on pose un i fixé appartenant à $[\![n_0, n_1-1]\!]$ et on suppose $P(i)$. On montre alors que $P(i+1)$.
Attention : i a été pris dans $[\![n_0, n_1-1]\!]$ et non dans $[\![n_0, n_1]\!]$. En effet, il faut que les entiers i et $(i+1)$ appartiennent à l'intervalle $[\![n_0, n_1]\!]$ i.e. que i appartienne à $[\![n_0, n_1-1]\!]$.
4. On conclut.
La méthode décrite ci-dessus est celle de la récurrence simple ascendante sur un segment, on pourrait très bien avoir une récurrence double, forte ou même une récurrence descendante. Il faut donc penser à adapter cette méthode à la récurrence que l'on fait.

Exercice

Extrait d'HEC 1996

Soit $n \geq 2$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (x^2-1)^n$.
Etablir l'existence, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, d'un polynôme Q_j tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j} Q_j(x) \\ Q_j(-1) \neq 0 \text{ et } Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$

Corrigé

Posons pour tout $j \in [\![0, n]\!]$: $P(j)$:
"il existe un polynôme Q_j tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j} Q_j(x)$ avec $Q_j(-1) \neq 0$ et $Q_j(1) \neq 0$"
• $\underline{j = 0}$: on a $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n^{(0)}(x) = (x^2-1)^{n-0} \times 1$
Donc en posant $Q_0 = 1$, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P_n^{(0)}(x) = (x^2-1)^{n-0} Q_0(x)$ avec $Q_0(-1) \neq 0$ et $Q_0(1) \neq 0$
Donc $P(0)$ est vraie
• Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons $P(j)$ vraie. On a :
Il existe un polynôme Q_j tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j} Q_j(x)$
Et par dérivation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$P_n^{(j+1)}(x) = (n-j)(x^2-1)^{n-j-1} Q_j(x) 2x + (x^2-1)^{n-j} Q_j'(x)$
$= (x^2-1)^{n-j-1} \left[2x(n-j) Q_j(x) + (x^2-1) Q_j'(x)\right]$
Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ Q_{j+1}(x) = 2x(n-j) Q_j(x) + (x^2-1) Q_j'(x)$
On remarque que $Q_{j+1}(-1) = -2(n-j) Q_j(-1) \neq 0$ car $Q_j(-1) \neq 0$ et $n - j \neq 0$; et de même $Q_{j+1}(1) \neq 0$
Donc $P(j+1)$ est vraie.

Ainsi pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, il existe un polynôme Q_j tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j} Q_j(x)$ avec $Q_j(-1) \neq 0$ et $Q_j(1) \neq 0$

1.3. Ensembles

Question 1 Comment montrer une inclusion d'ensembles $(A \subset B)$?

Méthode 1 En montrant que pour $x \in A$, on a $x \in B$

RAPPEL DE COURS

Si $\forall x \in A,\ x \in B$ alors $A \subset B$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est la plus utilisée pour montrer l'inclusion de deux ensembles. Pour montrer que $A \subset B$, on va choisir un x quelconque dans A puis ensuite montrer que $x \in B$.

Exercice

Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et C des ensembles tels que $\forall i \in \mathbb{N},\ \overline{A}_i \subset \overline{B}_i$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ C \cup \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)} \subset \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{B}_i)$

RAPPEL DE COURS

- $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$
- $x \in B \cap C$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in C$

Distributivité :

- Soient A, B et C des ensembles. On a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et B des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \left(\bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap B)\right)$$
$$B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right) = \left(\bigcap_{i=0}^{n} (A_i \cup B)\right)$$

Lois de Morgan :
• Soient A et B des ensembles. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

• Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\overline{\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)} = \left(\bigcup_{i=0}^{n} \overline{A_i}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)} = \left(\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}\right)$$

Corrigé

Soit $n \geq 0$, $C \cup \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)} = C \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i}\right) = \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{A_i})$

Soit $x \in \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{A_i})$, on a $\forall i \in [\![0, n]\!],\ x \in C \cup \overline{A_i}$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Ou bien $x \in C$, et alors $x \in C \cup \overline{B_i}$

Ou bien $x \in \overline{A_i}$, or $\overline{A_i} \subset \overline{B_i}$ donc $x \in \overline{B_i}$ et donc $x \in C \cup \overline{B_i}$

Donc $\forall i \in [\![0, n]\!],\ x \in C \cup \overline{B_i}$ et $x \in \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{B_i})$

Donc $\bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{A_i}) \subset \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{B_i})$

D'où $\boxed{C \cup \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)} \subset \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{B_i})}$

Méthode 2 En montrant que pour $x \in \overline{B}$, on a $x \in \overline{A}$

RAPPEL DE COURS

• Si $\forall x \in \overline{B}$, on a $x \in \overline{A}$, alors $A \subset B$
• $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est à maîtriser absolument et peut rendre très facile un démonstration qui peut sembler difficile. Dans certains cas, il est quasi-impossible de montrer l'inclusion en procédant classiquement : il faudra donc avoir le réflexe de passer par les complémentaires.

Exercice

Soient $A = \{n \in \mathbb{N},\ n^2 \text{ pair}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ pair}\}$
Montrer que $A \subset B$.

Corrigé

Soit $n \in \overline{B} = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ impair}\}$
Alors $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1$

D'où $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
Or $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$ donc n^2 est impair.
Ainsi $n \in \overline{A} = \{n \in \mathbb{N},\ n^2 \text{ est impair}\}$ et $\overline{B} \subset \overline{A}$
On a donc $\boxed{A \subset B}$

Question 2 Comment montrer une égalité d'ensembles ?

Méthode 1 Par double inclusion

RAPPEL DE COURS

Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit d'un grand classique pour montrer l'égalité de deux ensembles. Pour montrer que $A = B$, on va d'abord montrer que $A \subset B$ en utilisant les méthodes vues précédemment. On montre ensuite de même que $B \subset A$.

Exercice

Montrer que $\{x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \leq x\} = [0, 1]$

Corrigé

• Soit $x \in \{x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \leq x\}$
On a alors $x \geq 0$ et $x^2 \leq x$
Donc $x^2 - x \leq 0$ i.e. $x(x-1) \leq 0$ $(*)$
Si $x = 0$, alors on a bien $x \in [0, 1]$
Si $x > 0$, alors d'après $(*)$ on a $x - 1 \leq 0$
Donc $x \leq 1$ et $x > 0$, et on a bien $x \in [0, 1]$
Dans tous les cas on a donc $x \in [0, 1]$.
• Soit $x \in [0, 1]$.
Alors $x^2 - x = x(x-1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$
Donc $x^2 \leq x$ et $x \in \{x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \leq x\}$

Finalement, on a $\boxed{\{x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \leq x\} = [0,1]}$

Méthode 2 **Par équivalence**

RAPPEL DE COURS

Si $x \in A \iff x \in B$ alors $A = B$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certaines situations, il est possible de raisonner directement par équivalence pour montrer l'égalité de deux ensembles. Il faut néanmoins faire attention car souvent les étudiants font l'erreur de conserver une équivalence alors que seule une implication est valable. Il faut donc bien s'assurer que le raisonnement par équivalence est possible ! Sinon, on raisonnera par double inclusion.
Le raisonnement par équivalence est très utilisé pour déterminer les solutions d'une équation ou d'un système d'équations.

Exercice

Soit $B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (u_n)$ est une suite géométrique telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\}$

Démontrer que $B = \left\{((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}; \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$

Corrigé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique telle que $u_0 = 1$
$\exists q \in \mathbb{R}_*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$ ($q \neq 0$ car sinon, $u_0 = 0 \neq 1$)
$(u_n) \in B \iff \forall n \in \mathbb{N},\ 2q^{n+3} + 3q^{n+2} - q^n = 0$
$\iff q^n \left[2q^3 + 3q^2 - 1\right] = 0$
$\iff 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$ car q est non nul
On remarque que -1 est une racine évidente de $2q^3 + 3q^2 - 1$
Donc $2q^3 + 3q^2 - 1 = (q+1)(2q^2 + q - 1) = (q+1)^2(2q-1)$
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B \iff q = -1$ ou $q = \frac{1}{2}$
Donc $\boxed{B = \left\{((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}}$

1.4. Parties de $\mathbb{R}$

Question 1 Comment montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ admet un majorant / minorant ?

Méthode **En utilisant la définition d'un majorant / minorant**

RAPPEL DE COURS

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
• A est **majorée** $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M$.
M est appelé un **majorant** de A. En cas d'existence d'un majorant, il y en a une infinité.
• A est **minorée** $\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \ x \geq m.$ m est appelé un **minorant** de A. En cas d'existence d'un minorant, il y en a une infinité.
Tout réel est un majorant et minorant de $\emptyset$ (l'ensemble vide).

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (respectivement minorée), on trouve un réel M pour lequel tous les éléments de l'ensemble sont inférieurs (respectivement supérieurs) ou égaux à M.

Exercice

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, croissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $A_p = \{x \in \mathbb{R},\quad f(x) < p\}$
On admet que $A_p \neq \emptyset$. Montrer que A_p est majoré.

RAPPEL DE COURS

Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue sur I.
Soit $(a, b) \in I^2$. Quel que soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = y$

Corrigé

f est continue sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
Or $p \in]0, 1[$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists y \in \mathbb{R},\ f(y) = p$
Soit $x \in A_p$, on a $f(x) < p$, donc $f(x) < f(y)$
Or f est croissante sur $\mathbb{R}$
Donc $x < y$ et ainsi $\forall x \in A_p,\ x < y$.

Donc $\boxed{A_p \text{ est majoré par } y}$

Question 2 Comment montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas de majorant / minorant ?

Méthode **En utilisant la définition d'un majorant / minorant**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée (respectivement minorée), on montre que quel que soit le réel pris, on peut trouver un élément de A qui soit strictement supérieur (respectivement strictement inférieur) à ce réel.

Exercice

Soit f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ est pair} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^+,\quad f(x) = 0\}$ est-il majoré ?

Corrigé

RAPPEL DE COURS

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Ex : $\lfloor 2.1 \rfloor = 2$; $\lfloor 1 \rfloor = 1$; $\lfloor -3.2 \rfloor = -4$

Soit $M \in \mathbb{R}_+$, on sait que $M < \lfloor M \rfloor + 1$
$\lfloor M \rfloor + 1$ est un entier donc $2(\lfloor M \rfloor + 1)$ est pair.
Donc $f(2(\lfloor M \rfloor + 1)) = 0$, et donc $2(\lfloor M \rfloor + 1) \in A$.
Or $2(\lfloor M \rfloor + 1) > 2M > M$ car $M \geq 0$
Donc $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists y \in A,\ M < y$ (avec $y = 2(\lfloor M \rfloor + 1)$)
Donc $\boxed{A \text{ n'est pas majoré}}$