

Introduction aux vibrations aléatoires

Alain Le Bot

Enseignant à l'École centrale de Lyon. Directeur de recherches CNRS

DUNOD

Couverture : 5800/istockphoto.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2018
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-078741-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

78741 - (I) - OSB 90° - PAF/LUM - MGS

JOUVE
1, rue du Docteur Sauvé, 53100 MAYENNE
Dépôt légal : janvier 2019

Imprimé en France

Table des matières

Avant-propos	5
1 Processus stochastiques	7
1.1 Généralités sur les probabilités	7
1.2 Variable aléatoire	11
1.3 Vecteur aléatoire	18
1.4 Processus stochastique	23
1.5 Analyse spectrale	30
1.6 Continuité, dérivation et intégration	35
Exercices	48
Solutions	51
2 Vibrations en petites déformations	57
2.1 Oscillateur à 1 degré de liberté	57
2.2 Oscillateurs à n degrés de liberté	65
2.3 Solides déformables	84
Exercices	107
Solutions	110
3 Réponse spectrale des systèmes linéaires	117
3.1 Présentation du problème	117
3.2 Moyenne, corrélation et spectre de la réponse	118
3.3 Corrélation et spectre entre excitation et réponse	128
Exercices	133
Solutions	136

4	Probabilité de seuil et maximum	144
4.1	Densité de probabilité de la réponse	144
4.2	Dépassement de seuil	149
4.3	Occurrence des maxima	153
	Exercices	162
	Solutions	164
5	Processus de Markov	167
5.1	Position du problème	167
5.2	Probabilité de transition	168
5.3	Équation de Fokker-Planck	173
	Exercices	185
	Solutions	187
A	Distribution de Dirac	191
A.1	Définition de la distribution de Dirac	191
A.2	Multiplication par une fonction	192
A.3	Dérivation de la distribution de Dirac	193
A.4	Composition avec une fonction	194
A.5	Distribution de Dirac à plusieurs dimensions	195
A.6	Relation de fermeture	195
B	Transformée de Fourier	197
B.1	Transformée de Fourier des fonctions	197
B.2	Transformée de Fourier des distributions	198
C	Convolution	199
C.1	Convolution des fonctions	199
C.2	Convolution des distributions	200
D	Intégrales utiles	201
D.1	Fraction rationnelle	201
D.2	Quelques exemples	202
	Bibliographie	205
	Index	207

Avant-propos

La mécanique aléatoire est une discipline essentielle à l'ingénierie et plus spécifiquement aux génies mécanique et civil. Les applications sont nombreuses dans les industries du transport, de l'aéronautique, du spatial, de l'énergie, de la construction. Elles concernent des problèmes aussi variés que la tenue mécanique des structures soumises au vent, à la houle ou aux séismes ; la réduction des niveaux vibratoires ou acoustiques, tant pour des questions de sécurité que de confort ; l'estimation de la durée de vie des équipements soumis à d'intenses vibrations ; ou l'estimation de la probabilité d'évènements rares comme le franchissement d'un seuil critique pouvant entraîner une rupture, perte de contact ou impact.

L'objet de cet ouvrage est l'étude des vibrations mécaniques et acoustiques de nature *aléatoire*. Il se situe dans le prolongement naturel des livres élémentaires sur l'acoustique ou les vibrations mécaniques le plus souvent restreints aux régimes harmoniques, périodiques ou transitoires. Ici, nous supposons que les vibrations sont issues de sources aléatoires caractérisées par leurs propriétés statistiques, écart type, corrélation, densité de probabilité. Le milieu de propagation des ondes sera toujours supposé parfaitement connu. Les *sources seront aléatoires* tandis que les *milieux de propagation resteront déterministes*. On distinguera bien ce propos du problème dual de vibrations issues de *sources déterministes* et se propageant dans un *milieu aléatoire* comme par exemple les ondes mécaniques dans les sols hétérogènes ou les ondes sonores dans l'atmosphère turbulent. Cet aspect de la question, quoique très important, relève d'une seconde classe de problèmes qui ne sera pas abordée dans ce livre.

L'enseignement des vibrations aléatoires est souvent partagé entre deux disciplines bien distinctes que sont la mécanique et le traitement du signal. En mécanique, on étudie les vibrations linéaires des cordes, poutres, plaques, coques, élastodynamique, acoustique. En traitement du signal, on étudie les signaux aléatoires, leur description spectrale ainsi que leur transformation par les systèmes linéaires régis par des équations différentielles. Puisque le traitement du signal ne précise pas la nature physique des systèmes décrits, son champ d'application est très vaste et inclut

naturellement la mécanique. À ces deux disciplines il faut bien sûr ajouter la théorie des probabilités. Elle permet de définir la notion de *fonction aléatoire* ou *processus stochastique* et en particulier son calcul différentiel et intégral, sans lequel il ne serait pas possible de fonder la mécanique aléatoire.

La motivation principale de cet ouvrage est de rassembler l'ensemble de ces connaissances de mécanique, de traitement du signal et de théorie des probabilités en un tout cohérent au sein du même enseignement. J'espère qu'il aidera ainsi à la propagation des idées de cette discipline encore trop peu enseignée dans les écoles d'ingénieurs et universités.

La difficulté de l'exercice tient à la grande diversité de styles de la littérature qui couvrent les mathématiques théoriques et appliquées, la physique et l'ingénierie. Voici quelle a été la méthode. Pour chaque concept difficile, j'ai veillé à préciser son fondement mathématique et résumer ses principales propriétés utiles en physique, sans jamais prétendre à l'exhaustivité bien sûr. Chaque résultat important est placé dans son cadre naturel le plus large. Ce faisant, je me suis efforcé d'extraire l'essence physique des théorèmes mathématiques tout en restant au plus près de la justesse mathématique. Difficile équilibre... Enfin, cet ouvrage se veut court et donc synthétique. C'est un livre qui va à l'essentiel. C'est à ce prix que le lecteur pourra en apprécier la portée et acquérir la vue d'ensemble nécessaire à sa maîtrise. J'ai donc évité les développements « métiers » et les applications à telle ou telle discipline de l'ingénierie seront traitées en exemple ou exercice.

Ce livre s'adresse aux étudiants des écoles d'ingénieurs ou des universités en filière mécanique, aux ingénieurs en exercice et aux chercheurs désireux d'apprendre les fondements et la pratique de la mécanique aléatoire. Il contient tous les rappels utiles de mathématique et de mécanique. Sa lecture ne requiert donc pas de pré-requis scientifique. Son enseignement pourra s'effectuer en cycle ingénieur ou en master mécanique.

Je tiens à remercier Joël Perret-Liaudet pour m'avoir confié la charge de ce cours et sans lequel cet ouvrage n'aurait pas pu exister, le CNRS pour la liberté d'action qu'il me confère, Monsieur Holub pour m'avoir transmis sa passion pour l'ingénierie mécanique dès mes plus jeunes années. Sans oublier, bien sûr, tous les étudiants de l'École centrale de Lyon pour leur attention et leurs remarques qui ont tant apporté à la pédagogie de ce livre.

ALB, Lyon, le 27 janvier 2018.

Chapitre 1

Processus stochastiques

Dans ce chapitre, nous introduisons le formalisme mathématique de la théorie des probabilités en vue de la description des forces et vibrations aléatoires. L'outil principal est la notion de fonction aléatoire aussi appelée processus stochastique.

1.1 Généralités sur les probabilités

Le calcul des probabilités est destiné à la description du comportement des systèmes **aléatoires**. Ce sont les systèmes imprévisibles au sens où on ne peut pas savoir à l'avance avec certitude quel sera leur état à la fin d'un processus physique. Ce processus est appelé **épreuve** dans le contexte de la théorie des probabilités.

Espace d'états, évènements

Un exemple simple de système aléatoire est le jeu de dés (voir figure 1.1). Un dé peut prendre six états correspondant à chaque face sélectionnée après qu'il a fini de rouler. On désigne par Ω l'ensemble des six états du dé

$$\Omega = \{ \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \}$$

Les éléments de Ω sont appelés **tirages**. Ce sont les résultats possibles de l'expérience ou épreuve. Les sous-ensembles de Ω sont appelés **évènements**. Par exemple $A = \{ \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \}$ ou $A' = \{ \cdot, \cdot \}$ sont des évènements.

D'une manière générale, en théorie des probabilités on dispose d'un ensemble Ω contenant tous les résultats possibles (ou tirages) de l'expérience (ou épreuve). On

dispose aussi d'une collection de sous-ensembles de Ω que nous appellerons évènements qui vont servir à calculer des probabilités. L'ensemble vide \emptyset et l'ensemble Ω seront toujours des évènements appelés respectivement évènement impossible et évènement certain.

Variable aléatoire

À chaque face du dé, on associe un nombre de 1 à 6 correspondant à la somme des points qui figurent sur la face. L'association $X : \Omega \mapsto \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ définit ce qu'on appelle une **variable aléatoire**. Dans le cas général, une variable aléatoire sert à « numériser » l'espace d'états Ω . Par exemple l'évènement, « il pleuvra demain » a bien un sens mais ne permet pas de distinguer une forte averse d'un simple crachin. C'est la variable aléatoire « quantité d'eau tombée » qui permet de faire cette distinction.

Une variable aléatoire est une fonction de Ω vers \mathbb{R} *a priori* quelconque. La seule restriction imposée aux variables aléatoires est que les sous-ensembles de Ω de la forme $X^{-1}(]-\infty, x])$ (ensemble des tirages $\omega \in \Omega$ pour lesquels $X(\omega) \leq x$) sont des évènements.

Le plus souvent, les évènements se présenteront sous la forme $X^{-1}(B)$ où $B \subset \mathbb{R}$. Par exemple dans le cas du jeu de dés, $A = \{ \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \} = X^{-1}(\{2, 4, 6\})$ constitue l'évènement « $X = 2$ ou $X = 4$ ou $X = 6$ » qui peut aussi se noter « le résultat est pair ». De même, l'évènement $A' = \{ \cdot, \cdot \}$ s'écrit « $X \leq 2$ ». D'une manière générale, l'évènement $X^{-1}(]-\infty, x])$ se note « $X \leq x$ ».

Probabilité

La **mesure de probabilité** \mathbb{P} associe à chaque évènement un nombre compris entre 0 et 1. La **probabilité** est donc une fonction d'ensemble définie sur les évènements et non sur les tirages eux-mêmes. Les évènements sont les seuls sous-ensembles de Ω auxquels on sache attribuer une probabilité.

Une mesure de probabilité doit vérifier deux axiomes. Tout d'abord la probabilité est dénombrablement additive, ce qui s'écrit

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$$

pour toute suite d'évènements deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$). Ensuite la probabilité de Ω est toujours égale à 1,

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

On dit que Ω est un évènement certain. Ceci peut se comprendre par le fait que le résultat de l'expérience doit toujours figurer dans Ω .

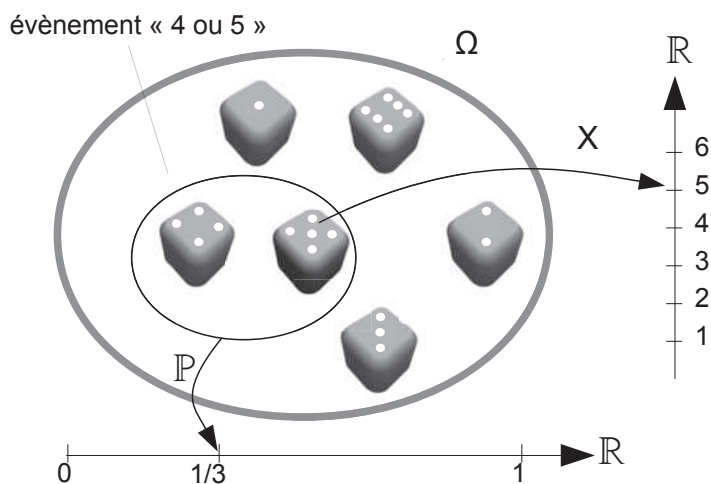


FIGURE 1.1 – Probabilités du jeu de dés et variable aléatoire.

On déduit de ces deux axiomes que l'évènement vide a une probabilité nulle.

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

C'est un évènement impossible (pour toute expérience il y a un résultat). Une seconde conséquence est que la probabilité de l'évènement contraire \bar{A} ($\bar{A} \cup A = \Omega$, $\bar{A} \cap A = \emptyset$) est toujours

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Le résultat de l'expérience est toujours soit dans A soit dans \bar{A} .

Dans le cas du dé, la probabilité de chaque évènement élémentaire (sous-ensemble de Ω constitué d'un seul tirage) vaut $1/6$. La probabilité de tout autre évènement peut s'en déduire en appliquant l'additivité. On obtient évidemment que la probabilité d'un évènement quelconque est $n/6$ où n est son cardinal (nombre de tirages). On peut aisément s'assurer que toutes les propriétés ci-dessus sont vérifiées.

On retiendra donc qu'en théorie des probabilités, on dispose d'un ensemble de tirages noté Ω contenant tous les résultats possibles de l'expérience, d'une collection de sous-ensembles de Ω qui seront appelés évènements desquels on sait calculer la probabilité, et d'une mesure de probabilité que l'on notera \mathbb{P} et qui vérifie l'additivité ainsi que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Probabilité conditionnelle

On peut s'intéresser à la probabilité d'un évènement A sachant qu'un autre évènement B est réalisé. C'est ce qu'on appelle une **probabilité conditionnelle**. On note $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité de A sachant B définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

lorsque $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Cette formule est fondamentale. Elle indique que la probabilité de A sachant B est en général différente de la probabilité de A (sans savoir que B est réalisé). Le fait que B soit réalisé apporte une information qui conduit à modifier l'appréciation que l'on porte sur la réalisation de A .

Si le fait que B soit réalisé n'apporte aucune information supplémentaire, on a alors l'égalité $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. On dit que les évènements A et B sont **indépendants**. Deux évènements A et B sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

◆ **Exemple.** On jette deux dés à six faces et on observe la somme S des deux résultats. Cette somme ne peut prendre que des valeurs entières de 2 à 12 et un simple calcul de dénombrement indique la probabilité des évènements suivants,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S=2) &= 1/36 & \mathbb{P}(S=3) &= 2/36 & \mathbb{P}(S=4) &= 3/36 & \mathbb{P}(S=5) &= 4/36 \\ \mathbb{P}(S=6) &= 5/36 & \mathbb{P}(S=7) &= 6/36 & \mathbb{P}(S=8) &= 5/36 & \mathbb{P}(S=9) &= 4/36 \\ \mathbb{P}(S=10) &= 3/36 & \mathbb{P}(S=11) &= 2/36 & \mathbb{P}(S=12) &= 1/36 \end{aligned}$$

Par exemple l'évènement $S = 4$ peut être obtenu avec les couples de dés suivants $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ de sorte que sa probabilité est $3/36$, où 36 est le nombre total de couples possibles.

La probabilité de l'évènement « S est pair » est

$$\mathbb{P}(S=2) + \mathbb{P}(S=4) + \mathbb{P}(S=6) + \mathbb{P}(S=8) + \mathbb{P}(S=10) + \mathbb{P}(S=12) = 18/36$$

et la probabilité de l'évènement « S est un multiple de 3 » vaut

$$\mathbb{P}(S=3) + \mathbb{P}(S=6) + \mathbb{P}(S=9) + \mathbb{P}(S=12) = 12/36$$

Par ailleurs, la probabilité de S est à la fois un multiple de 2 et de 3 est

$$\mathbb{P}(S=6) + \mathbb{P}(S=12) = 6/36$$

On observe que $18/36 \times 12/36 = 6/36$, c'est-à-dire que la probabilité que S soit à la fois un multiple de 2 et de 3 est égal au produit des probabilités que S soit un multiple de 2 et que S soit un multiple de 3. Les évènements « S est pair » et « S est un multiple de 3 » sont donc indépendants. Ce n'est évidemment pas le cas avec les évènements « S est un multiple de 2 » et « S est un multiple de 4 ». ◆

1.2 Variable aléatoire

Soit Ω un espace probabilisé de mesure \mathbb{P} et $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Fonction de répartition

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X et on note F_X la fonction

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad (1.1)$$

C'est la mesure de probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$. C'est une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[0, 1]$ et continue à droite. Elle vérifie la propriété.

Propriété.

- F_X est croissante,
- $\lim_{-\infty} F_X = 0, \quad \lim_{\infty} F_X = 1.$

Densité de probabilité

Lorsque F_X est dérivable, on parle alors de variable aléatoire absolument continue et on introduit la **densité de probabilité**

$$p_X(x) = \frac{dF_X}{dx} \quad (1.2)$$

Cette densité vérifie $p_X(x)dx = \mathbb{P}(x \leq X \leq x + dx)$ ou encore

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\chi) d\chi \quad (1.3)$$

Les propriétés de F_X se transposent sur p_X .

Propriété.

- $p_X(x) \geq 0,$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1.$

◆ **Exemple.** Variable aléatoire uniforme.

La variable aléatoire la plus simple est celle qui admet une densité de probabilité constante sur un intervalle borné (figure 1.2). Une variable aléatoire X est dite **uniforme** sur $[a, b]$ si

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$