

Mathématiques en physique

Mathématiques en physique

Concepts et outils

Cours et applications

Jean-Pierre Provost

Ancien professeur à l'université de Nice-Sophia Antipolis.

Bernard Raffaelli

Enseignant chercheur à l'ESME Sudria Lyon.

Gérard Vallée

Ancien maître de conférences à l'université de Nice-Sophia Antipolis.

DUNOD

Illustration de couverture : tony max – istock.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	 <p>DANGER LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	---

© Dunod, 2019
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-079023-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Liste des abréviations	vii
Table des sujets de physique	viii
Avant-propos	xi
1 Nombres réels ; grandeurs physiques ; dimensions	1
1.1 Grandeurs physiques ; continuité ; paramétrages additifs	1
1.1.1 Survol « physique » des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}	1
1.1.2 Paramétrage additif des lois de composition ; logarithmes	4
1.1.3 Fonction et notation exponentielles ; applications	6
1.1.4 Mesure additive du désordre microscopique ; grands nombres et entropie ; exemples ; irréversibilité	8
1.2 Caractère algébrique des grandeurs physiques	9
1.2.1 Pensée « naïve » et pensée algébrique	9
1.2.2 Conventions et lois de l'électricité	11
1.3 Grandeurs physiques et dimensions	14
1.3.1 Changements d'unités et invariance des lois physiques	14
1.3.2 Applications et limites de l'analyse dimensionnelle	17
1.3.3 Analyse d'échelle ; fractals ; percolation ; renormalisation	20
2 Nombres et notation complexes ; plan et mouvements plans	23
2.1 Calculs avec les nombres complexes	23
2.1.1 Règles de calcul ; exponentielle imaginaire ; fonctions complexes . .	23
2.1.2 « Théorème fondamental de l'algèbre » ; application aux E.D. . . .	25
2.2 Plan complexe et transformations associées	27
2.2.1 Plan complexe et plan cartésien ; produit scalaire ; aire	27
2.2.2 Transformations dans le plan complexe ; applications physiques . .	28
2.3 Etude de courbes et de mouvements plans	31
2.3.1 Mouvements et courbes en coordonnées polaires	31
2.3.2 Coniques en coordonnées polaires et cartésiennes ; foyers	32
2.3.3 Mouvement de Kepler ; diffusion de Rutherford	36
2.3.4 Mouvement harmonique ; vecteurs tournants	37
2.4 Notation complexe en physique classique	38
2.4.1 Signaux réels et complexes ; propriétés ; fonction de corrélation . .	38
2.4.2 Systèmes entrée-sortie ; fonctions de transfert et impédances	39
2.4.3 Signaux modulés ou quasi-monochromatiques	41
2.5 Applications à l'optique ondulatoire	41
2.5.1 Interférences ; réseaux ; fonction de corrélation	41
2.5.2 Diffraction en lumière monochromatique	43

2.5.3	Polarisations des ondes planes électromagnétiques	45
2.5.4	Etats de polarisation des photons ; hélicité ; introduction à la physique quantique	48
3	Espace ; calcul vectoriel ; symétries et lois physiques ;	51
3.1	Symétrie, invariance et relativité	52
3.1.1	Groupes de symétrie et invariance	52
3.1.2	Le groupe de symétrie d'espace-temps de la physique	53
3.1.3	Symétries spatiales (présentation « expérimentale »)	55
3.1.4	Transformation des grandeurs et des champs physiques	58
3.2	Calcul vectoriel ; applications	60
3.2.1	Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte ; pseudovecteurs	60
3.2.2	Ondes planes ; fréquences spatiales ; réseaux	62
3.2.3	Différentielles de chemins ; effet Doppler ; lois de Descartes	64
3.2.4	Vecteurs surface et moments ; flux de grandeurs physiques	66
3.2.5	Sphère, angle solide, théorème de Gauss, étendue d'un pinceau	69
3.2.6	Géométrie sphérique ; transport parallèle ; pendule de Foucault	71
3.3	Vecteurs tournants ; mécanique du solide	73
3.3.1	Vecteurs tournants ; changements de référentiels ; référentiel local ; champ de marée	73
3.3.2	Référentiel du centre de masse ; problème à deux corps	75
3.3.3	Cinématique et dynamique d'un corps solide ; équations d'Euler	76
3.4	Systèmes physiques possédant des symétries	79
3.4.1	Invariance des lois physiques et principe de Curie	79
3.4.2	Symétries de translation ; lois de Descartes et des réseaux	80
3.4.3	Symétries de rotation et symétries discrètes ; applications en électromagnétisme et en acoustique	81
4	Calcul linéaire et physique classique ; relativité	83
4.1	Espaces vectoriels	83
4.1.1	Définitions ; changements de bases ; applications linéaires ; somme ; produit tensoriel	83
4.1.2	Structures métriques ; inégalité de Schwarz ; fonctions orthonormées	86
4.1.3	Formes quadratiques et antisymétriques ; volume ; calcul extérieur	87
4.2	Calcul matriciel	90
4.2.1	Bases du calcul matriciel ; lien avec les espaces vectoriels	90
4.2.2	Matrices $n \times n$; trace ; déterminant ; inverse	91
4.2.3	Spectre d'une matrice $n \times n$; vecteurs propres ; diagonalisabilité ; décomposition spectrale des matrices remarquables	92
4.2.4	Exponentielles ; groupes de Lie ; algèbre de Lie des rotations	95
4.2.5	Matrices de Pauli ; espace-temps ; spineurs	96
4.2.6	Groupe des rotations et classification des grandeurs physiques	99
4.3	Applications en physique classique	101
4.3.1	Déformations et contraintes ; élasticité ; viscosité	101
4.3.2	Optique de Gauss des systèmes centrés ; matrices de transfert ; chemins optiques	104
4.3.3	Relativité 1 ; quadrivecteurs ; cinématique ; dynamique	108

4.3.4	Relativité 2; électromagnétisme; notation quadridimensionnelle; tenseur énergie-impulsion; spin; hélicité	113
5	Fonctions d'une variable; analyse des signaux	117
5.1	Savoir-faire concernant les fonctions	118
5.1.1	Graphe et informations sur une fonction	118
5.1.2	Dérivation, développements limités : principaux résultats	120
5.1.3	Intégration; cas des fonctions piquées ou rapidement oscillantes	122
5.1.4	Concavité de l'entropie; travail maximum; transitions de phase liquide-solide et para-ferromagnétisme	124
5.2	Opérations sur les fonctions; analyse de Dirac	128
5.2.1	Principales opérations sur les fonctions ou signaux	128
5.2.2	Impulsion de Dirac (« fonction delta »); exemples mécaniques	130
5.2.3	Analyse de Dirac; réponse impulsionnelle; convolution; filtrage	132
5.3	Transformation de Fourier; analyse de Fourier	134
5.3.1	Décomposition de Fourier; spectre d'un signal; formule de Poisson	134
5.3.2	Propriétés de la T.F.; dualité temps fréquence	136
5.3.3	Transformée de Laplace; importance des conditions initiales	139
5.3.4	Signaux stationnaires; signaux chaotiques; langage probabiliste	139
5.4	Optique de Fourier; filtrage optique	143
5.4.1	Décomposition en ondes planes; filtrage; diffraction	143
5.4.2	Illustrations optiques de la transformée de Fourier	144
6	Equations différentielles; systèmes dynamiques	147
6.1	Systèmes dynamiques et espace de phase	148
6.1.1	Définitions; propriétés générales	148
6.1.2	Exemples de systèmes dynamiques et de leurs portraits de phase	151
6.2	Equations linéaires stationnaires; modes propres; stabilité	154
6.2.1	Equations du premier et du second ordre; modes propres; cas général; oscillateurs couplés	154
6.2.2	Stabilité et instabilité d'un système dynamique linéaire stationnaire	158
6.3	Dix équations vectorielles classiques de la physique	160
6.4	Equations différentielles linéaires à coefficients variables	164
6.4.1	Quatre exemples (mécanique; optique; quantique; ondes); matrices de transfert	165
6.4.2	Ondes; quantification des fréquences; réflexion, transmission; matrice S	167
6.4.3	Equations avec paramètres périodiques; théorème de Floquet-Bloch	170
6.4.4	Equations d'amplitude; oscillateur paramétrique; approximation adiabatique	171
6.5	Oscillateurs non linéaires	174
6.5.1	Oscillateurs linéairement stables faiblement non linéaires	174
6.5.2	Oscillateurs linéairement instables; exemple de Van der Pol; bifurcations de Hopf et d'un cycle limite	177

7 Fonctions de plusieurs variables ; analyse vectorielle	181
7.1 Calcul différentiel	181
7.1.1 Développement de Taylor ; différentielles ; variation seconde ; extremum ; E.D.P. simples	181
7.1.2 Changements de variables ; règles de calcul différentiel	184
7.1.3 Dérivées spatiales de champs scalaires et vectoriels ; gradient ; Laplacien ; divergence ; rotationnel	185
7.1.4 Dérivées temporelles et applications hydrodynamiques	189
7.2 Calcul intégral	191
7.2.1 Intégration à n dimensions ; jacobien ; cas des très grandes dimensions	191
7.2.2 Formes différentielles ; théorème de Stokes	194
7.2.3 Analyse vectorielle ; circuits, volumes et champs dépendant du temps ; loi de Lenz ; milieux continus	199
7.2.4 Flux et bilans de grandeurs ; E.D.P. d'Euler, de Navier-Stokes et des milieux élastiques	201
7.3 Applications à la mécanique et à l'optique géométrique	205
7.3.1 Forces, couples et fonctions énergie potentielle ; théorème du viriel	205
7.3.2 Optique géométrique : rayons ; surfaces d'onde ; caustiques et problèmes d'extremum ; aberrations	208
7.4 Applications à la thermodynamique	211
7.4.1 Rôle clé de l'entropie ; équations d'état ; coexistence de phases	212
7.4.2 Potentiels thermodynamiques ; équilibres ; transitions de phase	214
7.5 Applications à l'électromagnétisme	217
7.5.1 Formulation intégrale ; champs statiques ; milieux	217
7.5.2 Potentiel scalaire et potentiel vecteur ; bilans d'énergie et de quantité de mouvement ; A.R.Q.S	221
7.5.3 Calculs avec des densités microscopiques ; moments électriques et magnétique ; rayonnements dipolaire et synchrotron	222
8 Equations aux dérivées partielles ; propagation ; diffusion	225
8.1 Chaines de systèmes dynamiques couplés ; limite continue	225
8.1.1 Chaines d'oscillateurs ; rôle des conditions aux limites ; phonons	226
8.1.2 Limite continue ; cordes vibrantes ; lignes électriques ; analogues hydrodynamiques ; impédances	228
8.2 Solutions de quelques E.D.P. dynamiques	232
8.2.1 E.D.P. linéaires à coefficients constants ; solutions ondes planes, électromagnétisme ; milieux continus	232
8.2.2 Choix des solutions onde plane, ; vitesse de l'énergie, sommes d'ondes planes	236
8.2.3 Equations de diffusion et de propagation ; solutions générales ; fonc- tions de Green ; ondes stationnaires	240
8.2.4 Principales E.D.P. de la physique liées à une loi de conservation	244
8.2.5 Trois exemples d'E.D.P. non linéaires ; ondes solitaires	245
8.3 E.D.P. « spatiales » impliquant l'opérateur laplacien	246
8.3.1 E.D.P. de Laplace, de Poisson et de Helmholtz ; laplacien et har- moniques sphériques	246

8.3.2	E.D.P. $\Delta f = 0$ (Laplace) et $\Delta^2 f = 0$ dans le plan et fonctions d'une variable complexe ; applications hydrodynamiques	251
9	Probabilités ; processus aléatoires ; physique statistique	255
9.1	Langage des probabilités	255
9.1.1	Grandeurs aléatoires et raisonnements logiques ; conditionnement	256
9.1.2	Probabilités ; lois de probabilité	257
9.1.3	Grandeurs moyennes ; moments ; corrélations	261
9.2	Origine et discussion de quelques lois importantes en physique	263
9.2.1	Théorème de la limite centrale et lois gaussiennes	263
9.2.2	Loi binomiale et loi de Poisson ; l'aléatoire du temps	265
9.2.3	Loi de Boltzmann ; théories de champ moyen ; modèle d'Ising ; statistiques quantiques ; réponse linéaire et fluctuations	267
9.2.4	Estimation ; lois et test de χ^2 (khi-deux)	270
9.3	Processus aléatoires	272
9.3.1	Marche aléatoire ; processus de diffusion et de Fokker Planck ; bruit blanc ; mouvement brownien	272
9.3.2	Processus de Markov ; probabilités de transition ; bilan détaillé	274
9.3.3	Processus stationnaires ; théorème de Wiener-Khintchine ; ergodicité	276
10	Principes variationnels et action	279
10.1	Exemples historiques ; schéma général	279
10.1.1	Principes de Fermat, Maupertuis, Lagrange	279
10.1.2	Principe de Hamilton dans l'espace de phase ; théorème de Liouville	282
10.1.3	Equations d'Euler-Lagrange ; symétries et lois de conservation ; E.D.P. d'Hamilton-Jacobi	283
10.1.4	Equations de Hamilton et géométrie symplectique de l'espace de phase	285
10.2	Principes de moindre action et généralisation des mouvements inertiels	286
10.2.1	Collisions et introduction de la masse inertielle	286
10.2.2	Particules chargées et interactions électromagnétiques	287
10.2.3	Temps propre et gravitation ; métriques d'espace-temps	289
10.2.4	Géodésiques ; transport parallèle ; courbure de Riemann	293
10.3	Champs et principes de moindre action	295
10.3.1	E.D.P. d'Euler-Lagrange ; corde vibrante ; électromagnétisme ; gravitation	295
10.3.2	Symétries et courants conservés ; théorème de Noether ; tenseur énergie-impulsion	297
10.3.3	Equations d'Einstein de la gravitation ; cosmologie ; action d'Hilbert	299
11	Quantique ; états ; symétries ; interactions	301
11.1	Cadre général	302
11.1.1	Etats ; symétries ; moyennes ; opérateur densité	302
11.1.2	Evolution ; théorème adiabatique ; intrication, corrélations	304
11.1.3	Dynamique des systèmes à deux états ; transitions quantiques ; règle d'or de Fermi ; loi exponentielle de désexcitation	307

11.1.4	Fonctions d'ondes; E.D.P. de Schrödinger; états gaussiens; chemins de Feynman	311
11.1.5	Oscillateur harmonique; mode électromagnétique	314
11.2	Champs et particules	317
11.2.1	E.D.P. relativiste de Klein-Gordon; champs quantiques; particules et antiparticules (bosons); masse et fréquence	317
11.2.2	E.D.P. de Weyl et de Dirac; fermions	319
11.3	Interactions; symétries et théories de jauge	321
11.3.1	Electromagnétisme et symétrie $U(1)$; dérivée covariante et transport; brisure de symétrie	321
11.3.2	Gravitation et symétrie $SL(2, \mathbb{C})$; spineurs $\psi_{R,L}$; constante cosmologique; symétrie conforme	325
11.3.3	Modèle standard	327
12	Analyse numérique; physique discrète	329
12.1	Discrétisation	330
12.1.1	Représentation des nombres; erreurs; stabilité numérique	330
12.1.2	Dérivation et intégration; extrapolation de Richardson	332
12.2	Résolution numérique d'E.D. et d'E.D.P.	333
12.2.1	Systèmes dynamiques; schémas d'Euler et de Runge Kutta	333
12.2.2	E.D.P. avec conditions initiales : propagation, diffusion	336
12.3	Approximation de fonctions	338
12.3.1	Approximations polynomiales (Tchebychev, B-splines...)	338
12.3.2	Interpolation de Lagrange et par "cubic-splines"	341
12.3.3	Méthode des moindres carrés	343
12.4	Résolution d'équations, d'E.D. et d'E.D.P. linéaires	344
12.4.1	Equations linéaires régulières et singulières	344
12.4.2	E.D. et E.D.P.; méthodes spectrales; éléments finis	348
12.5	Recherche de minima; méthodes de Newton, du simplex, du recuit simulé	350
Index		353

Liste des abréviations

A.R.Q.S. approximation des régimes quasi-stationnaires.

c.d.m. centre de masse.

C.I. condition initiale.

C.L. condition aux limites.

E.D. équation différentielle.

E.D.L. équation différentielle linéaire.

E.D.L.S. équation différentielle linéaire stationnaire.

E.D.P. équation aux dérivées partielles.

E.V. espace vectoriel.

L.C. loi de conservation.

S.D. système dynamique.

S.D.L. système dynamique linéaire.

S.D.L.S. système dynamique linéaire stationnaire.

T.F. transformée de Fourier.

T.L. transformation de Lorentz.

T.L.P. transformation de Lorentz pure.

v.a. variable aléatoire.

Table des sujets de physique

1. Généralités

- 1.1 *Caractère algébrique des grandeurs physiques* : pages 9-14.
- 1.2 *Dimensions ; analyse dimensionnelle* : pages 14-22.
- 1.3 *Grandeurs scalaires, (pseudo)vectorielles, quadrupolaires* : pages 58-62 et 99-101.
- 1.4 *Notation complexe* : pages 38-41.
- 1.5 *Statistiques de Gauss et de Poisson* : pages 263-267.
- 1.6 *Loi du χ^2 , estimation* : pages 270-272.

2. Mécanique classique

2.1 *Etude de mouvements*

- Coordonnées polaires : pages 32-33.
- Mouvements de Kepler, harmonique, uniformément accéléré, de précession, d'une particule chargée dans un champ magnétique, pendule de Foucault : pages 36-38 et 160-164.
- Portraits de phase de mouvements à une dimension : pages 151-154.

2.2 *Oscillateurs*

- Oscillateurs linéaires amortis, paramétriques, approximation adiabatique : pages 154-155 et 170-173.
- Oscillateurs non linéaires : pages 152-154 et 174-180.
- Oscillateurs linéaires couplés : pages 88, 94 et 154-158.
- Chaîne d'oscillateurs, limite continue, corde vibrante : pages 225-230.

2.3 *Mécanique et principes de moindre action*

- Principes de Lagrange et de Hamilton, équations d'Euler-Lagrange, symétries et lois de conservation : pages 279-284.
- Introduction de la masse inertielle et des interactions électromagnétique et gravitationnelle : pages 286-290.
- Champs et principe de moindre action ; courants conservés ; tenseur énergie-impulsion : pages 295-298.

2.4 *Autres sujets*

- Changements de référentiels, problème des deux corps : pages 74-76. Cinématique et dynamique du solide : pages 76-78. Energie potentielle ; théorème du viriel : pages 205-207. Résonance magnétique nucléaire : pages 156-157.

3. Hydrodynamique et milieux continus

- 3.1 *Déformations et contraintes ; élasticité, viscosité* : pages 101-104.
- 3.2 *Dérivée en suivant le mouvement ; théorèmes de l'hydrodynamique* : pages 189-191.
- 3.3 *Flux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie ; bilans* : pages 67-68 et 200-204.
- 3.4 *Ondes élastiques ; ondes de gravité* : pages 233-235.
- 3.5 *Autres sujets*
 - Equations adimensionnées : page 19. Ecoulements à deux dimensions et variables complexes : pages 251-254.

4. Thermodynamique et physique statistique

4.1 Entropie

- Introduction statistique : pages 8-9.
- Propriétés des fonctions $S(U)$ et applications (thermalisation, travail maximum, transitions solide-liquide et paramagnétique-ferromagnétique) : pages 124-127.
- Propriétés des fonctions $S(U, V)$ et applications (gaz parfait, fluide de Van der Waals, corps noir) : pages 211-214.

4.2 *Potentieux thermodynamiques ; équilibres, déplacements d'équilibres, paramètre d'ordre* : pages 214-217 et 19-20.

4.3 *Loi de Boltzmann ; théories de champ moyen ; modèle d'Ising ; statistiques quantiques ; réponse linéaire, fluctuations* : pages 267-270.

4.4 Phénomènes de diffusion et de transport

- Marche au hasard ; bruit blanc ; équations de Fokker-Planck ; mouvement brownien : pages 272-274.
- Equations de diffusion et de Boltzmann : pages 232, 236 et 240-244.

5. Electricité et électromagnétisme

5.1 Circuits électriques

- Conventions et lois de l'électricité : pages 11-14.
- Forces exercées sur les circuits : pages 206-207.
- Limite continue, lignes électriques : pages 229-231.

5.2 Equations de Maxwell.

- Formulation intégrale, approximation des régimes quasi-stationnaires, milieux diélectriques et magnétiques, équations de propagation, rayonnement : pages 217-224.
- Invariance relativiste : pages 113-114
- Formulation variationnelle : page 296.

5.3 Autres sujets

- Utilisation des symétries : pages 79-82. Conducteurs en mouvement, loi de Lenz : page 200. Images électriques : pages 248-249. Milieux diélectriques anisotropes : pages 233-234. Electromagnétisme et symétrie de jauge : pages 287-288.

6. Relativité

6.1 Groupe de symétrie et invariance des lois physiques

- Généralités ; transformations de Lorentz ; approximation galiléenne : pages 52-55.

6.2 Relativité d'Einstein

- Temps propre, quadrivecteurs ; mécanique : pages 108-113 et 286-287.
- Electromagnétisme ; notation quadridimensionnelle ; tenseur énergie-impulsion ; spin ; action de Schwarzschild : pages 113-116 et 296.
- Espace-temps et matrices de Pauli ; spineurs : pages 96-99.

6.3 Relativité et gravitation

- Temps propre et gravitation ; métriques ; géodésiques ; courbure : pages 289-295.
- Equations d'Einstein ; cosmologie ; action d'Hilbert : pages 297-300.
- Gravitation, constante cosmologique et symétrie de jauge : pages 325-327.

7. Optique

7.1 Optique géométrique

- Principe de Fermat, lois de Descartes, théorème de Malus ; caustiques et aberrations :

pages 64-66, 208-211 et 279-280.

- Optique matricielle des systèmes centrés : pages 104-107 et 165-166.

- Etendue optique et luminance : pages 70-71.

7.2 Interférences

- Interférences en lumière monochromatique ; localisation : pages 41-43, 63 et 65-66.

- Interférences en lumière non monochromatique : pages 43 et 141.

7.3 Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

- Principe d'Huygens-Fresnel : pages 43-45 et 133.

- Filtrage optique ; optique de Fourier : pages 143-146.

7.4 Lumière polarisée ; états de polarisation ; interférences : pages 45-48.

8. Ondes

8.1 Ondes planes

- Fréquences spatiales ; lois de Descartes et des réseaux, formule de Bragg : pages 62-64 et 80-81.

- Quantification ; réflexion ; transmission ; impédance : pages 167-169 et 230-231.

- Relations de dispersion ; paquets d'ondes ; vitesse de l'énergie ; ondes guidées : pages 232-240.

8.2 Approximation de l'optique géométrique ; surfaces d'onde et rayons : pages 208-211.

8.3 Equations de propagation à une et trois dimensions

- Solution générale ; fonctions de Green ; ondes stationnaires : pages 241-244.

- Diffusion ; approximation de Born : pages 248 et 250.

8.4 Ondes non linéaires ; ondes de choc ; ondes solitaires : pages 183, 201-202 et 245-246.

9. Physique quantique

9.1 Etats quantiques, amplitudes de probabilité, intrication, évolution, matrice densité : pages 49-51 et 301-307.

9.2 Dynamique des systèmes à deux états ; transitions quantiques ; désexcitation exponentielle : pages 307-311.

9.3 Equation de Schrödinger à une dimension

- Fonctions d'onde ; états gaussiens ; oscillateur harmonique : pages 311-316

- Puits et barrières de potentiel ; matrice S ; potentiels périodiques ; diffusion : pages 165-171 et 248-250.

9.4 Symétrie de rotation, moment angulaire, spineurs : pages 96-101.

9.5 Physique quantique relativiste

- Champs quantiques ; particules et antiparticules : pages 317-321.

- Interactions, symétries et théories de jauge ; modèle standard : pages 321-328.

9.6 Autres sujets

- Lois de conservation : page 81.

- Emissions spontanée et induite ; coefficients d'Einstein : pages 276 et 316-317.

- Statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein : pages 269-270.

- Théorème adiabatique ; distinction « travail-chaleur » ; phase de Berry : pages 305-306.

- Diamagnétisme, paramagnétisme ; effets Meissner, Aharonov-Bohm : pages 288-289.

- Chemins de Feynman ; pages 312-313.

Avant-propos

Cet avant-propos est destiné à expliciter l'esprit qui a prévalu à la rédaction de cet ouvrage et à permettre au lecteur d'en tirer le meilleur profit.

Esprit et originalité de l'ouvrage

Cet ouvrage reprend les principaux **concepts et techniques mathématiques intervenant dans la physique enseignée à l'université du L1 aux masters** et les illustre par de nombreux exemples.

Il a eu son origine dans l'élaboration de documents de travail pour "agrégatifs" de physique constitués de questions-exercices de mathématiques ayant un rapport direct avec le programme du concours. Sous sa forme actuelle il s'adresse en priorité aux étudiants de L3 et de masters de physique mais de nombreux sujets concernent les programmes de L1 et de L2, de classes préparatoires et d'écoles d'ingénieurs.

Son objectif est de mettre en avant l'intérêt des mathématiques pour la physique en montrant comment un même concept ou résultat mathématique intervient dans des domaines de physique parfois très éloignés les uns des autres, ce qui souligne **l'essence mathématique de beaucoup d'idées physiques**. A ce titre il peut s'adresser à un large public d'enseignants et de chercheurs intéressés par les liens profonds qui historiquement ont toujours existé entre ces deux disciplines.

Il ne s'agit donc ni d'un livre de "méthodes mathématiques pour la physique", avec définitions, lemmes et théorèmes, offrant un cadre rigoureux à un nombre limité d'applications, ni d'un livre d'entraînement à la résolution de problèmes réduisant les mathématiques au rôle d'outils de calcul.

Quelques exemples d'intrication maths-physique

Des savoir-faire "typiques" de physicien, comme par exemple

- 1) l'établissement du signe correct dans une relation en raisonnant sur un cas particulier,
- 2) l'utilisation d'**arguments dimensionnels** pour rétablir des paramètres posés égaux à 1 lors du calcul d'une expression,
- 3) l'emploi d'**arguments de symétrie** pour déterminer la direction d'un champ vectoriel en un point,

reposent tous sur la **propriété d'invariance des lois physiques** par rapport à un groupe de transformations et sont donc d'essence mathématique.

S'il veut transmettre ce savoir le physicien se doit d'explicitier cette notion d'invariance, ce qui implique de préciser les transformations considérées et la manière dont elles agissent sur les grandeurs physiques. **Ces informations** sont non seulement fondamentales mais aussi très pratiques et **concernent tout étudiant de physique quel que soit son niveau**.

Dans le premier cas ce sont le caractère algébrique des grandeurs physiques et l'invariance des lois par rapport aux changements de conventions de signe qui sont en jeu. L'exemple, donné au chapitre 1, d'un système électromécanique simple, avec 64 combinaisons de

signe possibles, montre la relativité des conventions et la possibilité d'en choisir une sans perte de généralité (de même qu'on traite un problème dans un référentiel).

Dans le second cas c'est l'invariance des lois par rapport aux changements d'unités qui est concernée. Cette propriété permet d'adimensionner des équations (ce qui simplifie beaucoup de calculs) et de faire des prédictions dimensionnelles (par exemple estimer des ordres de grandeurs).

Quant aux arguments de symétrie, on montre par exemple au chapitre 3 que, conjuguée à la linéarité, l'invariance par rapport aux transformations les plus simples (les translations) conduit à la fois aux lois de Descartes (translations "continues"), aux formules des réseaux optiques et de Bragg pour les cristaux (translations "discrètes") et aussi à la loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (translations spatiales et temporelles) en physique quantique.

Beaucoup d'autres exemples pourraient être donnés. Ainsi au chapitre 5 on verra que ce qui se cache derrière une analyse de Fourier des fonctions est la notion physique de filtrage, derrière une analyse de Dirac celle de réponse impulsionnelle et derrière une analyse "probabiliste" celle de corrélation.

Organisation de l'ouvrage

L'ouvrage contient **12 chapitres regroupant plus de 140 sous-sections** traitant d'un thème précis, à dominante mathématique ou physique et illustrées par **plus de 300 figures**. La rédaction a été conçue de sorte à rendre chaque sous-section la plus autonome possible afin qu'un lecteur disposant d'un minimum de connaissances puisse s'y reporter directement (moyennant éventuellement des renvois, signalés dans le texte, à d'autres sous-sections).

Les premiers chapitres sont consacrés à **dix grands domaines des mathématiques** (nombres réels, complexes, espace et symétries, calcul linéaire, fonctions d'une variable, de plusieurs variables, équations différentielles, aux dérivées partielles, probabilités, principes variationnels) ainsi qu'aux applications physiques correspondantes.

Le onzième chapitre concerne plus précisément les mathématiques de la **physique quantique** et le douzième une introduction à l'**analyse numérique** utilisée en physique.

Chaque chapitre commence par une brève introduction du sujet (souvent historique) permettant de motiver son étude. Les aspects les plus mathématiques (définitions, principaux résultats...) sont ensuite présentés dans les premières sections. Ces résultats font en général l'objet d'une démonstration rapide, certains calculs étant laissés au lecteur ; sinon l'idée de la démonstration est donnée. Ils ne sont donc jamais "parachutés" et leur appropriation par le lecteur est facilitée par la présence de nombreux exemples et éventuellement contre-exemples.

Les dernières sections d'un chapitre sont généralement consacrées à des domaines particuliers de physique utilisant les techniques et concepts introduits auparavant. C'est le cas par exemple de l'optique de Fourier (en liaison avec la transformation de Fourier), de l'hydrodynamique et la formulation intégrale de l'électromagnétisme (en liaison avec l'analyse vectorielle), de la physique statistique (en liaison avec les probabilités), de l'étude des déformations (en liaison avec le calcul matriciel)...

A la table des matières usuelle a été ajoutée une “**table des sujets de physique**” destinée aux lecteurs qui souhaitent retrouver un sujet de physique connu dans le “découpage classique” par spécialités : Généralités, Mécanique classique, Hydrodynamique et milieux continus, Thermodynamique et physique statistique, Electricité et électromagnétisme, Relativité, Optique, Ondes, Physique quantique.

Différents niveaux de lecture ; exemples

Les chapitres ne sont pas conçus pour être lus de façon linéaire de la première à la dernière page. Bien que ce livre s’adresse principalement à des étudiants de niveau L3 de nombreuses parties introductives peuvent être profitables à ceux de L1 et L2 ainsi qu’aux élèves de classes préparatoires. Inversement d’autres parties d’un même chapitre sont traditionnellement enseignées en Master.

Par exemple au chapitre 1 à propos de l’analyse dimensionnelle dont les bases sont exposées à la section 1.3.1 on ne devra pas être étonné de voir des applications classiques (niveau L1, L2) être suivies de compléments sur les ensembles fractaux, l’analyse d’échelle et la renormalisation. Chacun adaptera sa lecture en fonction de ses propres connaissances et de sa curiosité.

Au chapitre 5 “fonctions d’une variable; analyse des signaux” tout ce qui concerne la première section, à savoir l’information contenue dans un graphe, les dérivées et développements limités, l’intégration et le lien entre la concavité de l’entropie et la thermodynamique relève des premières années de licence ; même l’intégration par la méthode du col ou celle de la phase stationnaire, rarement introduites à ce niveau, peuvent être lues compte tenu des exemples physiques choisis. Le contenu des deuxième section “opérations sur les fonctions et analyse de Dirac” et troisième section “transformée et analyse de Fourier” est en général enseigné en troisième année ; cependant certaines parties comme la transformée de Laplace sont abordables par un étudiant de deuxième année tandis que d’autres comme l’application du filtrage d’un bruit blanc à l’équation de Langevin et aux télécommunications sont d’un niveau master. De même dans la dernière section “optique de Fourier ; filtrage optique”, du niveau master, certaines parties peuvent intéresser un étudiant de deuxième année.

Enfin pour ne pas interrompre la lecture des parties essentielles, de nombreux passages sont écrits en **petits caractères**. Dans l’esprit des auteurs ces passages sont considérés, indépendamment de leurs niveau, comme réservés à une **seconde lecture**. C’est le cas en particulier pour certaines démonstrations de théorèmes ou pour des remarques et des compléments.

Parties originales de l’ouvrage

En plus du caractère nouveau de son approche ce livre contient certaines présentations, discussions et démonstrations originales (ou partiellement originales) comme :

- les introductions des dimensions (section 1.3.1), des groupes de symétrie (section 3.1.1), des bilans de grandeurs et ondes de choc (section 7.2.4), de la masse d’inertie (section 10.2.1), de la constante cosmologique (section 11.3.2)...
- les discussions de la concavité de l’entropie dans des cas simples (section 5.1.4) et pour le gaz de Van der Waals (section 7.4.1), du principe d’Huygens-Fresnel en liaison avec la notion de filtrage (section 5.4.1), des volumes en grande dimension (section 7.2.1), de

l'identité des vitesses de groupe et de l'énergie (section 8.2.1), de la formulation intégrale de l'électromagnétisme (section 7.5.1)...

- les démonstrations des lois de Descartes et de ses généralisations (section 3.4.2), de l'invariance relativiste de l'électromagnétisme (section 4.3.4), de la règle d'or de Fermi et de la loi exponentielle de désexcitation en quantique (section 11.1.3), des théorèmes adiabatique classique (section 6.4.4) et quantique (section 11.1.2)...

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier leurs collègues Y. Gabellini, O. Legrand, F. Peters, L. Petit, J.A. Sepulchre et D. Wilkowski pour la relecture de certains chapitres et leurs suggestions pertinentes, ainsi que G. Gonczi pour son aide à la réalisation de certaines figures, en particulier le tracé de la surface $S(U, V)$ pour un fluide de Van der Waals. Ils sont également conscients que la rédaction de certaines parties de cet ouvrage a bénéficié indirectement de conversations avec de nombreux autres collègues notamment P. Couillet, J.L. Féménias, J.M. Levy Leblond, J.L. Meunier, ainsi que de l'expérience tirée de nombreux enseignements effectués en licence et maîtrise de physique, licence E.E.A, écoles d'ingénieurs post-bac et préparation à l'agrégation de physique.

Concernant le chapitre 12 "Analyse numérique ; Physique discrète" nous tenons à remercier B. Cessac, T. Corbard, J.L. Féménias, O. Legrand et J. Provost qui nous ont aidé dans le choix des sujets retenus.

Nice et Lyon Octobre 2018

Chapitre 1

Nombres réels ; grandeurs physiques ; dimensions

Le but de ce chapitre n'est pas de rappeler au lecteur des techniques de calcul qu'il connaît, mais d'insister sur des notions non triviales que recouvre l'emploi des réels en physique. Parmi elles figurent la continuité, le caractère algébrique de la plupart des grandeurs physiques, et la notion de dimension qui traduit l'invariance des lois physiques pour certains changements d'unités, avec ses limites (fractals, renormalisation).

1.1 GRANDEURS PHYSIQUES ; CONTINUITÉ ; PARAMÉTRAGES ADDITIFS

Les nombres servent à comparer entre elles, notamment avec celle qui sert d'unité, des grandeurs de même nature et à transcrire la loi de composition de ces grandeurs. L'exemple qui a servi de prototype depuis la théorie des grandeurs d'Euclide ($\simeq 400$ av. J.-C.) jusqu'à la construction récente des nombres réels (Cantor, Dedekind $\simeq 1870$) est la description des longueurs sur une "droite". Aujourd'hui encore, même si la plupart des appareils de mesure avec une aiguille se déplaçant devant un cadran sont remplacés par des appareils à affichage numérique, l'identification ("isomorphisme local") grandeur physique-longueur sur une droite reste valable.

1.1.1 Survol « physique » des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}

▷ Composition de grandeurs additives ; permutations ; comptages

L'introduction de l'ensemble \mathbb{N} des **nombres entiers** 0,1,2... n'est évidemment pas qu'une question de numérotation. L'important est qu'ils sont générés par une opération récurrente : le passage de n à $n + 1$. C'est cette opération fondamentale "addition d'une unité" que l'on reconnaît dans de très nombreuses situations expérimentales : mise bout à bout de segments identiques sur une droite, répétition d'une rotation autour d'un axe, accrochages successifs de masses pesantes identiques à un ressort, mise en série de forces électromotrices identiques, *etc.* Ces opérations physiques possèdent les propriétés

de commutativité et d'associativité qu'on transcrit par l'addition au niveau des nombres. L'entier $q = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ représente alors la grandeur obtenue en composant q fois avec elle-même la grandeur unité, et le nombre 0 l'opération "neutre", qui consiste par exemple à ne rien accrocher au ressort. Enfin si on compose la grandeur associée à q avec elle-même, on obtient les grandeurs associées à $2q, 3q \dots$. L'opération de multiplication ainsi introduite est, on le sait, commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Le nombre **factorielle** $n, n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ (0! $\stackrel{\text{def}}{=} 1$), ainsi que les factorielles multiples $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_q!}$ (où $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$), par exemple les **combinaisons**

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^{n-p},$$

interviennent dans de nombreux comptages. Ainsi $n!$ est le nombre de façons d'associer en série n générateurs différents, ou d'ordonner n objets différents A, B, C, \dots , ou encore de les numéroter en les écrivant $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$, les nombres i_1, i_2, \dots, i_n étant tous différents et pris entre 1 et n . Les opérations qui font passer de $1, 2, \dots, n$ à i_1, i_2, \dots, i_n sont appelées **permutations** et sont au nombre de $n!$ car i_1 peut être choisi de n façons, i_2 de $n-1$ façons, i_3 de $n-2$ façons, ..., et i_n d'une façon. Si les n objets sont choisis parmi q catégories, ceux d'une même catégorie étant considérés comme identiques (générateurs de même tension par exemple), il n'y a pas lieu de distinguer les façons d'ordonner les objets à l'intérieur d'une même catégorie. Le comptage s'obtient alors en divisant $n!$ par le produit des nombres de permutations "inopérantes" $n_1!n_2!\dots n_q!$, où n_p ($p = 1, 2, \dots, q$) est le nombre d'objets pris dans la catégorie p . Une application est la **formule du binôme** $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$ valable dès lors que les opérations $+$ et \times sur les "objets" a et b sont commutatives et distributives. On retiendra :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ et}$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

▷ Changements d'unité ; nombres algébriques ; commensurabilité

Au lieu de considérer la grandeur associée à q comme composée de q fois l'identité, on peut adopter un autre point de vue qui est l'analogie du point de vue passif lors d'un changement de référentiel (cf. section 3.1.1). Il consiste à considérer que le regroupement q par q de la grandeur unité définit une nouvelle unité q fois plus grande. Alors des grandeurs correspondant aux nombres $x' = 0, 1, 2, 3 \dots$ lorsqu'elles sont obtenues par composition de cette nouvelle unité correspondent comme on l'a vu aux nombres $x = 0, q, 2q, 3q \dots$ pour l'ancienne unité. Inversement pour représenter numériquement avec la nouvelle unité des grandeurs correspondant à $x = 0, 1, 2 \dots p \dots$ on est amené à introduire les nombres fractionnaires, $x' = \frac{p}{q}$ signifiant $x = p$.

Pour de nombreuses grandeurs physiques il existe une **opération inverse** de l'addition, comme par exemple lors de la mise bout à bout de segments orientés. On est alors amené à introduire l'ensemble des **entiers algébriques** $\mathbb{Z} = (\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots)$, l'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \in \mathbb{Z} \right\}$, et les règles du calcul algébrique (les fameuses "règles des signes") afin d'étendre à \mathbb{Z} et \mathbb{Q} les propriétés de l'addition et de la multiplication sur \mathbb{N} . Compte tenu de son importance deux sections (1.2.1,2) sont consacrées au **caractère algébrique des grandeurs physiques**.

Enfin, une question a de longue date préoccupé les scientifiques : peut-on toujours comparer deux grandeurs (de même nature) à l'aide de \mathbb{Q} ? Si oui elles sont commensurables et il existe une unité telle que la première vaut $p \in \mathbb{Z}$ et la seconde $q \in \mathbb{Z}$. Mais la réponse

à cette question est non, et était déjà connue des Grecs (relations $\frac{d^2}{a^2} = 2$ entre diagonale et côté d'un carré, $l = \pi d$ entre circonférence et diamètre d'un cercle...). D'où les autres questions : les grandeurs "irrationnelles" vis-à-vis d'une unité sont-elles une exception ou la règle quasi générale ? Peut-on les comparer entre elles et par quel ensemble doit-on remplacer \mathbb{Q} pour les mesurer ? Les Grecs avaient constaté que les irrationnels sont "plus nombreux" que les rationnels mais ils n'ont pu répondre de manière complète à la deuxième question. On sait aujourd'hui que les rationnels forment un ensemble dense, bien que de mesure de Lebesgue nulle, dans l'ensemble des réels \mathbb{R} .

▷ Continuité ; nombres réels ; mesure de Lebesgue

L'approche moderne des nombres réels reprend à son compte toutes les propriétés relatives à \mathbb{Q} (addition, multiplication, ordre, distance...) et donne une méthode de construction par "approximations successives" de l'ensemble \mathbb{R} . Cette méthode fait appel à l'**axiome d'Archimède**, qui stipule que quels que soient x et y il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|x| \geq |y|$, et à l'**axiome de Cauchy des intervalles emboîtés**, selon lequel il existe un nombre x et un seul dans la famille d'intervalles $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ tels que $I_{n+1} \subset I_n$ et $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En pratique le premier axiome permet d'encadrer tout réel x par des rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$, et le second permet par des encadrements

emboîtés $\dots \left[\frac{p_n}{q_n} \left[\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \left[\dots, \dots \right] \frac{p_{n+1}+1}{q_{n+1}} \right] \frac{p_n+1}{q_n} \right] \dots$ de définir x comme la limite des $\frac{p_n}{q_n}$ ou $\frac{p_n+1}{q_n}$ lorsque q_n tend vers l'infini ; on dit que \mathbb{Q} est un **ensemble dense** dans \mathbb{R} . Bien évidemment on s'assure que cette définition des réels comme limite de suite de rationnels est unique (notion de suites équivalentes), et qu'elle est compatible avec les opérations définies sur \mathbb{Q} (si $\frac{p_n}{q_n}$ tend vers x et $\frac{r_n}{s_n}$ vers y alors $\frac{p_n r_n}{q_n s_n}$ tend vers $xy = yx$, etc.).

En base 10, $q_n = 10^n$ ($25,37\dots = 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + \dots$) ; en base 2, $q_n = 2^n$ (le même nombre est représenté par une suite de 0 et de 1).

En toute base on montre que les rationnels correspondent à des suites de chiffres qui deviennent périodiques à partir d'un certain rang, par exemple $\frac{1}{12} = 0,8333\dots 3\dots$ en base 10 et $0,00101\dots 01\dots$ en base 2, tandis que les non rationnels correspondent à des suites "chaotiques" (cf. π , $\sqrt{2}$, le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dont la suite des décimales peut servir à générer des nombres aléatoires...).

Le résultat le plus remarquable de cette construction est que \mathbb{R} est un **ensemble complet** : toute suite de Cauchy de nombres réels (suite de nombres x_n tels que $|x_n - x_m| < \epsilon$ arbitrairement petit dès que n et $m > N(\epsilon)$) converge vers un nombre réel. On peut donc parler de "continuité des nombres réels" (à l'inverse de \mathbb{Q} pour lequel les suites de Cauchy "sortent en général de l'ensemble"). Ceci permet par exemple de définir la **continuité d'une fonction** f ou sa **dérivabilité** : f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $|f(x) - f(x_0)|$ peut être rendu arbitrairement petit pour x suffisamment proche de x_0 , et est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}$ admet une limite (dérivée en x_0 notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$) pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Définie par $\mu([a, b]) = b - a$ pour un intervalle $[a, b]$, la **mesure de Lebesgue** d'un

domaine de \mathbb{R} est nulle pour un point (encadré par les intervalles I_n) de même que pour un ensemble fini ou dénombrable de points (par exemple \mathbb{Q}), et s'étend à toutes les intersections et unions dénombrables d'intervalles. Elle est invariante par translation et permet de définir l'**intégrabilité** d'une fonction.

Au sens de **Lebesgue** (resp. **Riemann**) une fonction $y = f(x)$ est intégrable si en partitionnant l'axe y (resp. x) en domaines D_n la quantité $\sum_n y_n \mu(f^{-1}(D_n))$ (resp. $\sum_n f(x_n) \mu(D_n)$) a une limite, quels que soient les y_n (resp. x_n) appartenant à D_n , lorsque les $\mu(D_n)$ tendent vers 0 (figure 1a, resp. 1b). Le premier point de vue est mathématiquement plus général (cf. $\int_0^1 f(x) dx$, avec $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 1 ailleurs, qui vaut 1 pour Lebesgue et n'est pas définie pour Riemann) et pas moins physique (cf. section 5.3.4, figure 21).

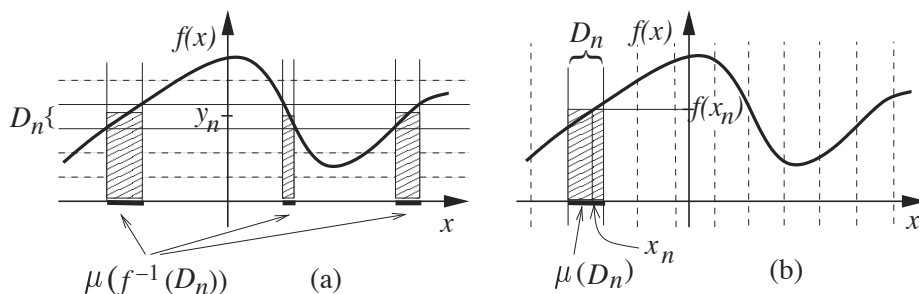


FIGURE 1

1.1.2 Paramétrage additif des lois de composition ; logarithmes

▷ Repérage des grandeurs ; paramétrage additif

Reprenons l'exemple qui consiste à suspendre des masses à un ressort. En pratique, pour les comparer, on "repère" les masses en leur associant le nombre réel x correspondant à l'élongation du ressort. Mais comme la réponse d'un ressort n'est pas en général linéaire, l'accrochage simultané de deux masses ne conduit pas à $x_1 + x_2$ mais à un autre nombre $x_1 * x_2$. Cette loi de composition $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 * x_2$ est cependant commutative, associative et possède un élément neutre que l'on peut toujours noter 0. (Le nombre x peut ne pas avoir d'inverse pour cette loi.)

Pour tout repérage "raisonnable" ($x_1 * x_2$ continu et dérivable par rapport à x_1 et x_2), on démontre qu'on peut trouver une fonction $\varphi(x)$, définie à une constante multiplicative λ près, telle que :

$$\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad ; \quad \varphi(0) = 0 .$$

Donc si on associe à chaque grandeur non plus x_i mais $\varphi_i = \varphi(x_i)$, la loi de composition $x = x_1 * x_2$ devient additive $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. La **mesure** d'une grandeur, par opposition à son **repérage**, consiste précisément à trouver ce paramétrage additif. La **grandeur unité** est par définition celle pour laquelle $\varphi = 1$. Quant à la liberté du changement de paramétrage $\varphi \rightarrow \lambda\varphi$, elle correspond au choix toujours possible d'une unité λ fois plus petite. Remarquons que ce paramétrage additif est la version continue de l'**étalonnage** qui consiste à associer $\varphi = 1$ à un certain nombre x_1 , puis $\varphi = \frac{1}{q}$ au nombre x_q tel que

$$\underbrace{x_q * \dots * x_q}_{q \text{ fois}} = x_1 \text{ et } \varphi = \frac{p}{q} \text{ au nombre } \underbrace{x_q * \dots * x_q}_{p \text{ fois}} .$$

EXEMPLES. Une règle bien graduée traduit additivement la composition “physique” des **translations**. Un cercle bien gradué traduit additivement la composition des **rotations** (le paramètre additif étant l’angle). La loi de composition des **vitesse relatives** à une dimension

$$v = v_1 * v_2 = (v_1 + v_2) \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^{-1}$$

($|v_i| < c$) devient $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ en introduisant la **rapidité** relative φ définie par :

$$e^\varphi = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \quad \text{ou} \quad \frac{v}{c} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \tanh \varphi .$$

La vitesse v n’est un paramètre additif que dans la limite galiléenne $v \ll c$ ($\tanh \varphi \simeq \varphi \ll 1$).

▷ Multiplication et logarithme

Le logarithme $\text{Log}_a x$ d’un nombre x positif est le paramétrage qui rend additif la loi de multiplication $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 x_2$ sur \mathbb{R}^+ (réels positifs) :

$$\text{Log}_a x_1 x_2 = \text{Log}_a x_1 + \text{Log}_a x_2 \quad (\text{ce qui implique } \text{Log}_a 1 = 0) .$$

L’unité du paramétrage, appelée **base a du logarithme**, est le nombre dont le logarithme vaut 1 : $\text{Log}_a a = 1$. Comme un changement d’unité, donc ici de base, correspond à l’introduction d’un facteur multiplicatif λ on doit avoir $\text{Log}_a x = \lambda \text{Log}_b x$; en posant $x = b$ puis $x = a$ dans cette relation on trouve $\lambda = \text{Log}_a b = (\text{Log}_b a)^{-1}$. Les logarithmes les plus utilisés sont les logarithmes népérien (à base $e \simeq 2,7$) noté “ln” et décimal (à base 10) noté “log”. Il est utile d’avoir en mémoire les deux valeurs approchées $\ln 10 = (\log e)^{-1} \simeq 2,3$ et $\log 2 \simeq 0,3$. La fonction logarithme vérifie :

$$\frac{d \text{Log}_a x}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log}_a(x + \epsilon) - \text{Log}_a x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log}_a(1 + \frac{\epsilon}{x})}{\frac{\epsilon}{x}} = \frac{1}{x} \left(\frac{d \text{Log}_a x}{dx} \right)_{x=1} .$$

Le **logarithme népérien** est celui pour lequel $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ (figure 2a).

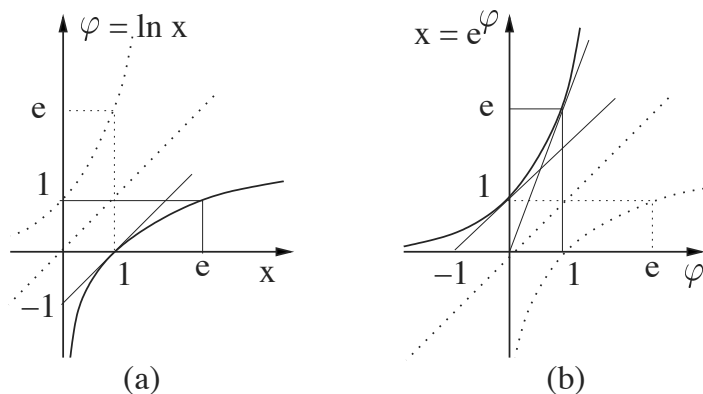


FIGURE 2

EXEMPLES. En chimie, les logarithmes décimaux sont utilisés pour paramétrer des concentrations ou des activités : $pH = -\log [H_3O^+]$ et $pK_a = -\log([A^-][H^+][AH]^{-1})$.

En physique on les introduit pour mesurer des rapports de puissance en **décibels**. Un rapport de 10 dans les puissances correspondant par définition à un écart de 10 décibels (1 Bel) en “échelle logarithmique”, on a :

$$\text{“} \frac{P_2}{P_1} \text{ en décibels ”} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} .$$

Un rapport de 2 correspond à 3 décibels.

Les décibels (dB) sont utilisés en acoustique où les “puissances sonores” sont comparées au seuil d’audibilité P_0 égal à 10^{-12} Wm^{-2} . Ainsi 70 dB correspondent à $10^7 P_0 = 10^{-5} \text{ Wm}^{-2}$. En électronique il sert à mesurer les gains ; par exemple si la tension à la sortie d’un système est V_s et la tension à l’entrée est V_e , sachant que le rapport des puissances est comme $\left(\frac{V_s}{V_e}\right)^2$, on pose : “gain en dB” = $20 \log \frac{V_s}{V_e}$. En astronomie un rapport de flux lumineux est mesuré en (écart de) **magnitude** par $\Delta m = 2,5 \log \frac{F_2}{F_1}$.

Dans le domaine des fréquences temporelles une **octave** désigne un rapport de 2 et une **décade** un rapport de 10 ; on a donc “ $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en décades ” = $\log \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0.3$ “ $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en octaves ”.

1.1.3 Fonction et notation exponentielles ; applications

▷ Multiplication et fonction exponentielle

L’opération exponentielle sur \mathbb{R} est l’opération inverse du logarithme (figure 2b) :

$$\varphi = \ln x \iff x = e^\varphi \quad ; \quad \varphi = \text{Log}_a x \iff x = a^\varphi \quad (a > 0).$$

Elle fait donc correspondre à la somme $\varphi_1 + \varphi_2$ d’éléments de \mathbb{R} le produit $x_1 x_2$ d’éléments de \mathbb{R}^+ . Les propriétés suivantes de l’exponentielle sont des conséquences immédiates de celles du logarithme (par exemple $a^b = e^{b \ln a}$ car $\ln a^b = (\text{Log}_a a^b) \ln a = b \ln a$) :

$$a^{b+c} = a^b a^c \quad , \quad a^b = e^{b \ln a} \quad , \quad (a^b)^c = a^{bc} \quad , \quad a^0 = 1 \quad (a > 0).$$

La fonction e^φ (notée aussi $\exp \varphi$) peut être obtenue plus explicitement comme limite ou sous la forme d’un développement en série convergente :

$$e^\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)^N = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^p}{p!} + \dots \quad (e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \simeq 2,7).$$

La première expression se déduit du fait que $\ln \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)^N = N \ln \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)$ tend vers φ lorsque N tend vers l’infini. Quant au développement en série il se déduit de la formule

$$\text{du binôme : } \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)^N = \sum_{p=0}^N C_N^p \left(\frac{\varphi}{N}\right)^p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^p}{p!} \quad (\text{car } \frac{N!}{(N-p)!N^p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1).$$

e^φ possède la propriété remarquable d’être sa propre dérivée (cf. son développement en série). Les tangentes au graphe sont représentées pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$.

▷ Applications physiques

En physique les fonctions exponentielles apparaissent souvent à travers leur propriété caractéristique

$$f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) f(\varphi_2) \quad \text{équivalente à} \quad f'(\varphi) = f'(\varphi) f(\varphi)$$

(puisque $\frac{f(\varphi + \epsilon) - f(\varphi)}{\epsilon} = f'(\varphi) \frac{f(\epsilon) - 1}{\epsilon}$). Par exemple le rapport $p(\tau) = \frac{N(t + \tau)}{N(t)}$ des populations de noyaux radioactifs non désintégrés aux instants $t + \tau$ et t doit vérifier

$$p(\tau_1 + \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2)$$

si l’on suppose qu’il ne dépend que de l’intervalle de temps τ et pas de t .

En effet $\frac{N(t + \tau_1 + \tau_2)}{N(t)} = \frac{N(t + \tau_1 + \tau_2)}{N(t + \tau_2)} \frac{N(t + \tau_2)}{N(t)}$. On en déduit que la loi qui décrit la **désintégration radioactive** est du type $p(\tau) = \exp(-\lambda\tau)$, ou $\exp\left(-\frac{\tau \ln 2}{T}\right)$ en introduisant la **demi-période** T c'est-à-dire le temps au bout duquel la moitié des noyaux de l'échantillon se sont désintégrés. On établit par le même raisonnement que l'atténuation de l'intensité d'une onde se propageant selon Ox dans un milieu homogène est donnée par la **loi d'absorption de Beer** $I(x + l) = I(x)e^{-\alpha l}$. Par exemple une atténuation de 0,2 dB par kilomètre correspond à $\log I(x)/I(x + l) = 2 \cdot 10^{-2}$ et $l = 10^3$ m, soit $\alpha \simeq 4,6 \times 10^{-5} \text{m}^{-1}$.

▷ Développement de Taylor et écriture exponentielle

L'approche de l'exponentielle e^φ par une limite ou une série ne fait appel qu'aux propriétés des deux opérations $+$ et \times sur les réels. L'extension de l'exponentielle à d'autres objets mathématiques que les réels (nombres complexes, matrices carrées, opérateurs différentiels...) est très utilisée. Ainsi, à titre d'exemple la formule de Taylor (pour les "bonnes" fonctions) peut s'écrire

$$f(x + a) = f(x) + a f'(x) + \frac{a^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{a^p}{p!} f^{(p)}(x) + \dots = e^{a \frac{d}{dx}} f(x)$$

à l'aide de l'exponentielle de $\frac{d}{dx}$. Cela se comprend en remarquant qu'on passe de $f(x)$ à $f(x + \frac{a}{N})$ par $f(x + \frac{a}{N}) \simeq f(x) + \frac{a}{N} f'(x) = \left(1 + \frac{a}{N} \frac{d}{dx}\right) f(x)$, et par conséquent de $f(x)$ à $f(x + a)$ par l'application de $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{N} \frac{d}{dx}\right)^N = e^{a \frac{d}{dx}}$. (On établit de même pour l'opération de dilatation : $f(e^a x) = e^{ax \frac{d}{dx}} f(x)$.) On dit que l'opérateur dérivation $\frac{d}{dx}$ est le générateur de la transformation $f(x) \rightarrow f(x + a)$. En **physique quantique** les générateurs des translations d'espace, de temps et des rotations effectuées sur les états ou fonctions d'onde, sont associés aux observables quantité de mouvement, énergie et moment cinétique (cf. chapitre 11).

▷ Fonctions hyperboliques (figure 3)

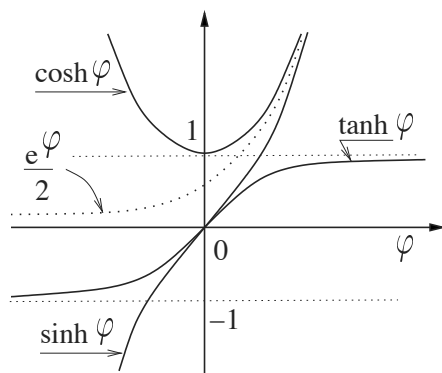


FIGURE 3

A la fonction e^φ sont reliées les fonctions cosinus hyperbolique (paire), sinus et tangente hyperboliques (impaires)

$$\cosh \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} \quad , \quad \sinh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \quad , \quad \tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} \quad ,$$

dont les propriétés principales (analogues à celles des fonctions trigonométriques) sont des conséquences immédiates de celles de e^φ :

$$\cosh \varphi = \sum_0^\infty \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \sinh \varphi = \sum_0^\infty \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \tanh \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3} + \dots$$

$$\begin{aligned} (\cosh \varphi)' &= \sinh \varphi \quad ; \quad (\sinh \varphi)' = \cosh \varphi \quad ; \quad (\tanh \varphi)' = (\cosh \varphi)^{-2} \\ \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi &= 1 \quad ; \quad \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) = \cosh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \sinh \varphi_1 \sinh \varphi_2 \quad ; \end{aligned}$$

$$\sinh(\varphi_1 + \varphi_2) = \sinh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \cosh \varphi_1 \sinh \varphi_2 \quad ; \quad \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2}{1 + \tanh \varphi_1 \tanh \varphi_2}$$

1.1.4 Mesure additive du désordre microscopique ; grands nombres et entropie ; irréversibilité

▷ Définition de l'entropie et exemples

L'entropie S introduite par Clausius en 1854, qui est la grandeur fondamentale de la thermodynamique, reste encore pour certains une grandeur mystérieuse. En fait ses propriétés découlent de l'interprétation qu'en a donné Planck (1900) : S est une mesure additive du "désordre microscopique" (ou plutôt de la "liberté microscopique", voir ci-dessous) définie par

$$S = k_B \ln \Omega \quad \left(k_B = \frac{R}{N} = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} ; k_B \text{ constante de Boltzmann} \right) .$$

$\mathcal{N} = 6 \cdot 10^{23} = 1 \text{ mole}$ est le nombre d'Avogadro, R la constante des gaz parfaits (*cf.* section 7.4.1). Ω est le **nombre d'états microscopiques** (spécifiés chacun par les positions, quantités de mouvement et états quantiques de toutes les particules) compatibles avec les valeurs $V, U, \text{ etc.}$ des grandeurs volume total, énergie interne totale, *etc.* qui caractérisent un **état d'équilibre macroscopique**.

Par exemple pour un **gaz parfait** constitué de N particules dans un volume V , le volume "libre" moyen par particule est V/N et le nombre de configurations de position est donc proportionnel à $(V/N)^N$. Pour un **gaz parfait monoatomique**, on établit (*cf.* section 7.2.1.) que la contribution à Ω du désordre dans l'espace des vitesses ou quantités de mouvement est proportionnelle à $(U/N)^{\frac{3}{2}N}$; on peut dire aussi que $(2mU/N)^{\frac{3}{2}}$ est un volume "libre" typique dans l'espace (p_x, p_y, p_z) pour une particule d'énergie $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \simeq U/N$; alors $S = R(\ln V + \frac{3}{2} \ln U) + \text{Cste}$ pour une mole.

AUTRES EXEMPLES (justifiables par des arguments qualitatifs ou dimensionnels) :

1) $\Omega \propto (U/N)^{\frac{3}{2}N} (U/N)^{\frac{3}{2}N}$ pour un **solide** dont chacun des N atomes est assimilé à un oscillateur à trois dimensions ; dans Ω un facteur est lié à la vitesse et l'autre à l'amplitude de la vibration ; V n'apparaît pas car il n'y a pas de "liberté" de position dans un solide. 2) $\Omega \propto \max_N (V/N)^N (U/N)^{3N}$ d'où $S \propto V^{\frac{1}{4}} U^{\frac{3}{4}}$ pour le **corps noir** ; ici $U/N \simeq cp$ est l'énergie typique des photons et on prend le \max_N car leur nombre n'est pas fixé a priori (*cf.* remarque 1 ci-dessous).