

# **Analyse pour l'agrégation**



Hervé Queffélec,  
Claude Zuily

# Analyse pour l'agrégation

Cours et exercices corrigés

5<sup>e</sup> édition

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2020

ISBN 978-2-10-081180-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos .....	XV
<b>Chapitre I – Notion de plus petite et de plus grande limite .....</b>	<b>1</b>
I. <i>Introduction</i> .....	1
II. <i>Théorèmes et définitions</i> .....	1
1. Limite supérieure et limite inférieure .....	1
2. Passage à la $\overline{\lim}$ ou $\underline{\lim}$ dans une inégalité .....	3
III. <i>Applications</i> .....	5
1. Suites sous-additives .....	5
2. Un théorème taubérien .....	6
IV. <i>Enoncés des exercices</i> .....	8
V. <i>Indications</i> .....	9
VI. <i>Solutions des exercices</i> .....	9
<b>Chapitre II – Compléments sur les séries et les séries de fonctions .....</b>	<b>15</b>
I. <i>Formule d'Abel et applications</i> .....	15
1. Formule d'Abel. Exemples .....	15
2. Prolongement de la fonction $\zeta$ au demi plan $\operatorname{Re} s > 0$ privé de $\{1\}$ .....	20
3. La fonction $\theta$ .....	20
4. Application aux nombres premiers .....	21
II. <i>Les séries de Dirichlet</i> .....	23
1. Abcisses de convergence et de convergence absolue .....	23
2. Holomorphie .....	25
3. Produit de Dirichlet .....	27
III. <i>Retour sur la fonction <math>\zeta</math></i> .....	28
1. Prolongement holomorphe de la fonction $\zeta$ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .....	28
2. Commentaires .....	31
IV. <i>Enoncés des exercices</i> .....	31
V. <i>Solutions des exercices</i> .....	34
<b>Chapitre III – Séries entières, propriétés de la somme .....</b>	<b>40</b>
I. <i>Rappels, définitions, notations</i> .....	40
1. Rayon de convergence .....	40
2. Théorème d'Abel non tangentiel .....	41
II. <i>Propriétés de la somme d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence</i> .....	44
III. <i>Convergence uniforme dans tout le disque de convergence</i> .....	46
1. Conditions nécessaires de convergence uniforme .....	46
2. Séries entières uniformément non normalement convergentes .....	47
IV. <i>Comportement de la somme au voisinage d'un point du cercle de convergence</i> ....	50
1. Points réguliers et points singuliers .....	50
2. Critères de régularité .....	52
3. Séries entières à coefficients positifs .....	53

# VI

4. Séries entières à coefficients lacunaires.....	54
V. <i>Enoncés des exercices</i> .....	56
VI. <i>Indications</i> .....	58
VII. <i>Solutions des exercices</i> .....	60
<b>Chapitre IV – Séries de Fourier, applications</b> .....	68
I. <i>Introduction, définitions, premières propriétés</i> .....	68
1. Fonctions périodiques et formules de Fourier .....	71
2. Définitions .....	72
3. Premières propriétés .....	74
a) Les espaces $U, A, L^1, L^p$ .....	74
b) Premières règles de calcul .....	75
c) Propriétés de $f \mapsto \gamma(f)$ .....	76
II. <i>Les principaux “noyaux” trigonométriques</i> .....	79
1. Deux définitions .....	79
2. Le noyau de Dirichlet .....	79
3. Le noyau de Fejér .....	80
4. Le noyau de Gibbs .....	82
5. Le noyau de Jackson .....	83
6. Le noyau de Poisson .....	84
III. <i>Les principaux théorèmes de convergence, premières applications</i> .....	86
1. Les premières difficultés et la solution de Fejér .....	86
2. Premières applications du théorème de Fejér .....	89
3. Le théorème de Dirichlet .....	93
IV. <i>Exemples de développements en série de Fourier</i> .....	94
1. Remarques préliminaires .....	94
2. Exemples de développements en série de Fourier .....	95
V. <i>Comparaison entre le comportement d’une fonction et celui de ses coefficients de Fourier</i> .....	101
1. Définitions préliminaires .....	101
2. Théorème de comparaison .....	102
VI. <i>Applications diverses des séries de Fourier</i> .....	106
1. Inégalité de Bernstein .....	106
2. Inégalité isopérimétrique .....	107
3. Application à la résolution d’équations aux dérivées partielles .....	109
4. Fonctions continues partout sans dérivée .....	114
a) Une classe de séries lacunaires sans dérivée.....	114
b) Modules de continuité.....	119
c) Fonctions partout sans dérivée arbitrairement proches de $C^{0,1}$ .....	121
VII. <i>Enoncés des exercices</i> .....	123
VIII. <i>Indications</i> .....	128
IX. <i>Solutions des exercices</i> .....	130
<b>Chapitre V – Compacité</b> .....	142
I. <i>Rappels sur les espaces métriques, définitions et notations</i> .....	142

1. Métriques comparables, métriques complètes .....	142
2. Précompacité .....	143
II. Critère fondamentaux de compacité, convergence des suites, dimension métrique .....	145
1. Le critère fondamental de compacité .....	145
2. Suites convergentes, dimension métrique .....	146
a) Rappel.....	146
b) Dimension métrique .....	147
3. Etude détaillée de quelques exemples .....	147
4. Le théorème de Tychonoff et ses applications .....	152
a) Le théorème de Tychonoff .....	152
b) Le théorème de Banach-Alaoglu.....	152
c) Un théorème de point fixe.....	153
III. Le théorème d'Ascoli et quelques applications .....	155
1. Le théorème d'Ascoli.....	155
2. Le théorème des familles normales.....	157
a) L'espace métrique $H(\Omega)$ .....	157
b) Le théorème.....	160
c) Une application du théorème des familles normales .....	161
IV. Compacité dans un espace de Banach $E$ .....	165
1. Enveloppe convexe d'une partie compacte.....	165
2. Description des compacts d'un espace de Banach.....	167
3. Bases pseudo-orthonormées.....	168
V. Applications linéaires compactes .....	170
1. L'idéal bilatère $K(E)$ .....	170
2. Un critère de compacité .....	171
3. Exemples d'applications linéaires compactes.....	172
4. Adjoint d'une application linéaire compacte .....	174
5. Couples $(E, F)$ tels que $\mathcal{L}(E, F) = K(E, F)$ .....	175
VI. Etude individuelle d'un opérateur compact .....	176
1. Rappels de théorie spectrale.....	176
2. Un lemme fondamental .....	177
3. Applications injectives d'image fermée .....	178
4. Ascente et descente d'un opérateur.....	178
5. Perturbations compactes de l'identité.....	179
6. Spectre ponctuel d'un opérateur compact .....	181
7. Etude spectrale d'un opérateur compact .....	182
8. Une application des opérateurs compacts à l'Analyse .....	184
VII. Enoncés des exercices .....	184
VIII. Indications .....	189
IX. Solutions des exercices .....	192
<b>Chapitre VI – Espaces vectoriels normés .....</b>	<b>203</b>
I. Introduction .....	203
II. Théorèmes généraux .....	205

## VIII

1. Le théorème de Banach-Steinhaus .....	205
2. Le théorème de l'application ouverte .....	206
3. Le théorème du graphe fermé .....	209
4. Les théorèmes de Hahn-Banach .....	209
a) La forme analytique .....	209
b) La forme géométrique .....	211
III. Exemples d'espaces de Banach et de leurs duals .....	212
1. Supplémentaire d'un sous-espace fermé .....	212
a) Sous-espaces de $\ell^\infty$ .....	212
b) Sous-espaces de $C$ .....	215
2. Suites faiblement convergentes .....	217
3. Rappels sur les espaces $\ell^p$ .....	219
IV. Espaces de Hilbert .....	220
1. Propriétés générales .....	220
2. Une application .....	221
V. Topologies faible et préfaible .....	223
1. Le théorème général de Banach-Alaoglu .....	223
2. Une application de la topologie faible .....	223
VI. Énoncés des exercices .....	227
VII. Indications .....	232
VIII. Solutions des exercices .....	234
<b>Chapitre VII – Espaces vectoriels normés de dimension finie</b> .....	246
I. Introduction et définitions .....	246
II. Normes sur $K^n$ .....	246
1. Parties compactes de $K^n$ .....	246
2. Normes équivalentes .....	248
3. Compacité de la boule unité .....	249
4. Description géométrique des normes .....	250
III. Normes sur $E$ .....	251
IV. Exemples .....	252
1. Inégalité de Khintchine .....	252
2. Polynômes trigonométriques .....	254
3. Opérateurs .....	255
V. Applications .....	256
1. Théorème de Riesz .....	256
2. Continuité automatique .....	257
VI. Énoncés des exercices .....	258
VII. Indications .....	259
VIII. Solutions des exercices .....	260
<b>Chapitre VIII – Espaces fonctionnels</b> .....	264
I. Les espaces $C^k(\Omega)$ , $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ .....	264
1. Espaces $C^k(\Omega)$ , $k \in \mathbb{N}$ .....	264



a) Définitions .....	264
b) Formule de Leibniz .....	265
c) Formule de Faa-di-Bruno .....	265
d) Topologie. Métrisabilité. Complétude .....	265
e) Non normabilité .....	268
2. L'espace $C^\infty(\Omega)$ .....	269
a) Topologie. Métrisabilité. Complétude .....	269
b) Propriété de Montel .....	269
c) Non normabilité .....	271
3. L'espace $C_b^k(\Omega)$ , $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ .....	271
4. Autour de la continuité et de la dérivabilité .....	272
a) Points de continuité d'une fonction .....	272
b) Application .....	272
c) Points de continuité de la limite simple d'une suite de fonctions .....	274
d) Construction d'une fonction continue nulle part dérivable .....	275
e) Densité dans $C^0$ des fonctions continues nulle part dérivables .....	276
II. Les espaces $C^k(F)$ , $k \in \mathbb{N}$ $F$ fermé de $\mathbb{R}^n$ .....	278
1. Définition. Normabilité. Complétude .....	278
2. Propriétés des espaces $C^k(F)$ .....	280
III. Les espaces de Hölder .....	282
1. Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$ .....	282
a) Définitions et exemples .....	282
b) Propriétés des espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$ .....	284
2. Applications .....	286
a) Régularité de la fonction nulle part dérivable de I.4.d) .....	286
b) Régularité des fonction convexes .....	288
3. Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ , $k \in \mathbb{N}$ .....	289
a) Propriétés .....	289
4. Résolution d'équations différentielles dans les espaces de Hölder .....	292
IV. Fonctions réel-analytiques .....	296
1. Généralités et exemples .....	296
2. Opérations sur les fonctions réel-analytiques .....	298
3. Lien avec les séries entières .....	300
4. Exemples .....	301
a) Lemme de Bernstein .....	301
b) Lemme de Borel .....	302
5. Principe du prolongement analytique .....	303
6. Lien avec les fonctions holomorphes .....	304
7. Commentaires .....	304
V. <i>Enoncés des exercices</i> .....	304
VI. <i>Solutions des exercices</i> .....	308
<b>Chapitre IX – Etude des fonctions définies par des intégrales</b> .....	312
I. <i>Etude de la régularité</i> .....	312

1. Rappels .....	312
a) Continuité .....	312
b) Dérivabilité.....	313
c) Holomorphie .....	314
d) Cas des intégrales semi-convergentes .....	314
e) Démonstrations des théorèmes .....	316
II. <i>Exemples et premières applications</i> .....	318
1. La fonction Gamma .....	318
a) Prolongement de la fonction $\Gamma$ au plan complexe .....	319
2. Exemples .....	321
III. <i>Le produit de convolution</i> .....	324
1. Définitions et premières propriétés.....	324
2. Applications de la convolution .....	327
a) Construction de fonctions plateaux .....	327
b) Théorèmes de densité .....	329
IV. <i>La transformée de Fourier</i> .....	333
V. <i>Etude de la fonction d'Airy</i> .....	338
VI. <i>Etude asymptotique</i> .....	344
1. La méthode de Laplace .....	344
a) Application : formule de Stirling .....	346
2. La méthode de la phase stationnaire.....	347
a) Application : étude asymptotique de la fonction d'Airy .....	352
VII. <i>Enoncés des exercices</i> .....	355
VIII. <i>Solutions des exercices</i> .....	356
<b>Chapitre X – Equations différentielles</b> .....	359
I. <i>Généralités</i> .....	359
1. Définitions .....	359
2. Le lemme de Gronwall .....	360
II. <i>Théorie locale</i> .....	361
1. Existence et unicité.....	361
a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz précisé .....	361
b) Le théorème de Arzela-Péano .....	364
2. Dépendance par rapport aux paramètres et aux données initiales.....	368
a) Continuité .....	368
b) Dérivabilité.....	370
c) Différentiabilité d'ordre supérieur .....	373
d) Application : redressement des champs de vecteurs .....	374
e) Commentaires .....	375
III. <i>Théorie globale</i> .....	376
1. Existence et unicité de la solution maximale.....	376
2. Critère de prolongement.....	377
3. Exemples et applications .....	379
IV. <i>Introduction à l'étude qualitative des systèmes différentiels autonomes</i> .....	386

1. Introduction .....	386
2. Définitions et notations .....	387
3. Etude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ .....	388
4. Etude des systèmes non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre .....	392
a) Stabilité des solutions .....	393
b) Le théorème de linéarisation .....	395
5. Méthode d'étude géométrique des systèmes $2 \times 2$ .....	396
a) Protocole d'étude .....	396
b) Affinement du protocole .....	399
V. Application : un théorème de Hadamard .....	404
VI. Equations différentielles $y'' + py' + qy = r$ .....	409
1. Introduction, définition, rappels .....	409
2. Zéros des solutions .....	410
3. Développement en série entière des solutions .....	414
4. Stabilité. Equation de Hill-Mathieu .....	416
VII. Enoncés des exercices .....	429
VIII. Solutions des exercices .....	443
<b>Chapitre XI – Principes du maximum et applications</b> .....	469
0. Introduction .....	469
I. Les principes du maximum .....	469
1. Le principe du maximum faible .....	470
2. Le principe du maximum fort .....	471
3. Extensions .....	475
II. Applications .....	476
1. Application aux fonctions holomorphes .....	476
2. Application au problème de Dirichlet .....	477
3. Le théorème des trois cercles de Hadamard .....	478
4. Le théorème des trois droites .....	480
5. Le théorème de Riesz-Thorin .....	481
6. Applications du théorème de Riesz-Thorin .....	486
a) Transformée de Fourier .....	486
b) Convolution .....	487
<b>Chapitre XII – Le théorème des nombres premiers</b> .....	489
1. La fonction dzéta de Riemann .....	489
2. Les fonctions $\varphi$ et $\Phi$ .....	492
3. Preuves du théorème des nombres premiers et du corollaire .....	496
4. Preuve du lemme 2.5 .....	497
<b>Chapitre XIII – Théorèmes limites en Probabilité. Applications à l'Analyse</b> ..	501
I. Rappels et compléments .....	501
1. Le modèle de Kolmogorov .....	501
a) Définitions .....	501
b) Théorème d'unicité; semi-continuité .....	502

c) Espace produit et fubinisation .....	503
d) Variable aléatoire et loi image.....	504
e) Probabilité conditionnelle .....	505
f) Espérance, variance, fonction caractéristique .....	505
g) Inégalités de Markov et de Tchebycheff.....	508
2. Le concept d'indépendance .....	508
a) Définitions.....	508
b) Critères d'indépendance .....	510
c) Modèles pour l'indépendance et structure produit .....	511
d) Le lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un .....	512
3. Lois classiques.....	513
a) L'air du catalogue .....	513
b) Lois gaussiennes .....	514
4. Inégalités fondamentales.....	517
a) Inégalité de Paley-Zygmund .....	517
b) Inégalités de Khintchine pour les Rademacher.....	518
c) Inégalités de Khintchine pour variables centrées bornées.....	519
d) Théorème de majoration .....	519
e) Théorème de minoration .....	520
II. <i>Convergences et outils associés</i> .....	521
1. Convergence en probabilité .....	521
a) Définitions et propriétés .....	521
b) Loi faible des grands nombres.....	523
c) Polynômes de Bernstein.....	524
2. Convergence presque sûre .....	525
a) Définition et propriétés .....	525
b) Inégalités maximales.....	527
c) Théorèmes de Kolmogorov .....	529
d) Loi forte des grands nombres.....	532
e) Loi du logarithme itéré.....	535
3. Convergence en loi .....	542
a) Définitions équivalentes .....	542
b) Théorème de P. Lévy.....	544
c) Comparaison des modes de convergence .....	546
d) Théorème de la limite centrale.....	548
III. <i>Applications des Probabilités à l'Analyse</i> .....	550
1. Séries entières avec une coupure.....	550
2. Suites équidistribuées sur un compact .....	552
3. Sommes tronquées de l'exponentielle.....	554
4. Sous-espaces hilbertiens de $\ell_\infty^n$ .....	554
5. Conjecture de Bloch-Nevanlinna .....	556
6. Nombres normaux .....	559
7. Séries trigonométriques lacunaires .....	560

IV. <i>Énoncés des exercices</i> .....	562
V. <i>Solutions des exercices</i> .....	571
<b>Chapter XIV – Compléments sur les fonctions holomorphes</b> .....	580
I. <i>Introduction</i> .....	580
II. <i>Le lemme de Schwarz</i> .....	580
1. Le lemme de Schwarz usuel .....	580
2. Le lemme de Schwarz-Pick .....	581
a) La distance pseudo-hyperbolique .....	582
b) Utilisation de la distance pseudo-hyperbolique .....	584
III. <i>Le lemme de Julia</i> .....	585
IV. <i>Trois théorèmes importants</i> .....	587
1. Le théorème d'Hurwitz .....	587
2. Le théorème des familles normales .....	589
3. Le théorème de Rouché .....	590
V. <i>Homographies</i> .....	591
1. Étude générale .....	591
2. Un exemple .....	594
VI. <i>Énoncés des Exercices</i> .....	596
VII. <i>Solutions des exercices</i> .....	598
<b>Chapter XV – Dynamique discrète</b> .....	601
I. <i>Introduction</i> .....	601
1. Analogie avec les équations différentielles .....	601
2. Nature des points fixes .....	603
II. <i>Théorèmes de conjugaison</i> .....	605
1. Problème général .....	605
2. Cas attractif strict .....	605
3. Cas super-attractif .....	607
4. Cas indifférent .....	607
III. <i>Théorème de Denjoy-Wolff</i> .....	609
1. Position du problème et énoncé .....	609
2. Le cas des automorphismes .....	610
3. Le cas des non-automorphismes .....	612
a) Le petit théorème de Denjoy-Wolff .....	612
b) Le grand théorème de Denjoy-Wolff .....	613
IV. <i>Le théorème de Julia-Carathéodory</i> .....	614
V. <i>Un exemple détaillé</i> .....	616
VI. <i>Énoncés des Exercices</i> .....	617
VII. <i>Solutions des exercices</i> .....	620
<b>Chapter XVI – La méthode des caractéristiques</b> .....	624
I. <i>Introduction</i> .....	624
II. <i>Le théorème</i> .....	625
III. <i>Quelques rappels de Calcul Différentiel</i> .....	625

## XIV

1. Le théorème des fonctions implicites .....	625
2. Hypersurfaces .....	625
3. Champ de vecteurs et courbes intégrales.....	626
IV. <i>La méthode des caractéristiques</i> .....	628
V. <i>Un exemple classique</i> .....	631
1. Étude locale du lieu d'explosion .....	633
<b>Chapter XVII – Le système de ondes de surface</b> .....	<b>637</b>
I. <i>Introduction</i> .....	637
1. Problème posé par l'Académie des Sciences en 1813. ....	637
2. Les ondes de surface .....	637
3. Quelques types de vagues .....	638
II. <i>La modélisation</i> .....	638
1. Les équations .....	639
1.1. L'équation du mouvement .....	639
2. L'incompressibilité .....	640
3. L'irrotationalité.....	643
3.1. Une conséquence de l'irrotationalité. ....	644
4. Les conditions au bord.....	645
5. Le système en $(\eta, v)$ . ....	647
6. Conservation de l'énergie .....	647
7. Cas des fluides irrotationnels. Le système en $(\eta, \phi)$ .....	649
III. <i>Approximation linéaire</i> .....	651
1. Le mouvement des particules de fluide .....	655
Bibliographie .....	657
Index .....	659

# Avant-propos

## Le livre

La préparation à l'Agrégation constitue généralement, pour le futur candidat, une période de bilan et de synthèse des connaissances de base qu'il a acquises au cours de ses précédentes années d'étude. Elle est aussi l'occasion d'enrichir et de dépasser ces connaissances. L'objectif de ce livre d'Analyse, qui est le fruit de l'expérience des auteurs dans ce domaine et ce type d'enseignement, comme préparateurs ou comme membres du jury du concours, est de tenter de l'y aider. Trois principes nous ont guidés dans la rédaction de cet ouvrage.

En premier lieu, insister sur des points classiques qui nous ont paru être, en général, mal connus ou mal compris des étudiants : notion de limite supérieure, précompacité, théorèmes de convergence des intégrales, théorie globale des systèmes différentiels non linéaires, etc...

Ensuite, donner le maximum d'exemples et d'applications moins habituels : fonction  $\zeta$  de Riemann, fonction d'Airy, équations de Hille-Mathieu, sommes de Gauss, séries de Fourier lacunaires, méthodes probabilistes, etc...

Enfin, fournir des compléments ouvrant la voie à des théories plus avancées tout en n'utilisant que des outils classiques : principe du maximum, interpolation, géométrie des espaces de Banach, théorie de Riesz des opérateurs compacts, méthode des caractéristiques, etc...D'autre part, afin de favoriser l'assimilation, ce livre contient aussi plus de cent trente exercices ou longs problèmes (très souvent inédits) entièrement corrigés.

Cette nouvelle édition se compose de dix-sept chapitres, à l'intérieur desquels on s'est cependant permis d'utiliser des outils provenant d'autres chapitres ou d'autres théories. Les énoncés des exercices sont suivis des indications puis des solutions et occupent la fin de chacun d'entre eux.

Bien que volumineux, ce livre ne prétend nullement à l'exhaustivité, et son contenu a fait l'objet de choix de la part des auteurs. Il n'a donc pas pour objectif de se substituer entièrement aux traités classiques d'Analyse. En revanche sur les sujets choisis, tant par le fond que par la forme, cet ouvrage apporte un nombre important d'informations nouvelles.

Tout en étant écrit pour les agrégatifs (internes ou externes), ce livre peut être utilisé avec profit par un public plus large : élèves des classes préparatoires et des grandes écoles, étudiants en Licence et Mastère, enfin jeunes chercheurs, auxquels il pourra apporter, en particulier, illustrations et motivations pour des théories plus avancées.

La saisie et la mise en page des premières éditions de ce texte ont été l'oeuvre de Mme A. Bardot, décédée depuis. Nous prenons l'occasion pour

rendre hommage à sa gentillesse, sa disponibilité, sa grande compétence et sa maîtrise de TEX, qui nous ont été indispensables pendant l'élaboration des premières éditions, avant que nous n'apprenions nous-mêmes la frappe mathématique.

La quatrième édition de 2013 comportait déjà trois chapitres supplémentaires, chapitre XIV (rappels et compléments sur les fonctions holomorphes), chapitre XV (initiation à la dynamique holomorphe, notion de conjugaison, théorème de Denjoy-Wolff), chapitre XVI (en utilisant des notions élémentaires de géométrie différentielle, on prouve l'existence et l'unicité de certaines équations aux dérivées partielles d'un type particulier par la méthode des caractéristiques).

Nous avons mis à profit cette cinquième édition 2020 pour éliminer quelques (ultimes ?) coquilles résiduelles, pour étoffer la présentation du chapitre IV (notamment motiver l'introduction des différents noyaux trigonométriques), et donner au chapitre XIII une version plus générale de la loi du logarithme itéré. Nous avons également ajouté aux seize chapitres existants un dix-septième chapitre "Le système des ondes de surface" dans lequel, à partir des lois classiques de la physique, on décrit mathématiquement le comportement de différents types de vagues à la surface d'un océan (marées, vagues de vent, tsunamis..).

Nous espérons ainsi, en nous inspirant des nouveaux programmes de l'agrégation (dans lesquels les probabilités, la transformée de Fourier, la dynamique discrète, les distributions et donc les équations aux dérivées partielles jouent un rôle renforcé) rendre l'emploi de ce livre plus accessible et plus profitable, pour un large public d'étudiants.

Les auteurs, Juin 2020

## Les auteurs

- Hervé Queffélec est Professeur émérite à l'Université de Lille. Il est l'auteur de plusieurs livres d'enseignement comme "Analyse complexe" (avec M. Queffélec, Calvage et Mounet 2019), "Topologie" (Dunod, sixième édition, à paraître en 2020), ou "Twelve landmarks of Twentieth Century Analysis" (avec D. Choimet, Cambridge 2015). Il est également l'auteur de trois livres de recherche ("Dirichlet series and diophantine approximation", avec M. Queffélec, Hindustan Book Agency, à paraître en 2020), "Banach spaces for analysts" (Volumes 1 et 2, Cambridge 2018, avec D. Li). Ses thèmes de recherche sont l'analyse harmonique commutative, la théorie des opérateurs sur des espaces de Banach de fonctions analytiques, la théorie analytique des séries de Dirichlet et la théorie analytique des nombres.
- Claude Zuily est Professeur émérite à l'Université de Paris Saclay. Il est l'auteur de livres d'enseignement comme "Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles" (Dunod 2002), "Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles" (Hermann 1978, Cassini 2010)



et de livres de recherche comme “Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem” (Birkhäuser 1983), “Tools and problems in partial differential equations” (avec Thomas Alazard, Springer 2020). Ses thèmes de recherche portent sur les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.



# CHAPITRE I

## Notion de plus petite et de plus grande limite

### I. – Introduction

Ce fut une mini-révolution quand K. Weierstrass, pour étudier les notions de convergence en Analyse, introduisit le langage :

(I.1) *quel que soit epsilon positif, il existe éta positif tel que ...*

Ce langage a contre lui sa relative lourdeur, mais pour lui sa très grande rigueur ; il a parfois donné lieu à des abus : on part de  $\varepsilon/1000$ , de façon arbitraire, et après des calculs longs et obscurs, on arrive pile à : inférieur ou égal à  $\varepsilon$ . L'introduction des notions de  $\underline{\lim}$ ,  $\overline{\lim}$  représente un peu la version "épurée" de (I.1), tout en mettant en évidence l'importance des **inégalités a priori** en Analyse : il y a un grand coup de barbe pour définir ces notions, puis un théorème fondamental de passage à la  $\underline{\lim}$  ou à la  $\overline{\lim}$  dans une inégalité (qui mérite le nom de théorème plus par son utilité que par sa preuve) et ensuite on récupère la rigueur de (I.1) avec la lourdeur en moins. Enfin, les notions de  $\underline{\lim}$ ,  $\overline{\lim}$  interviennent automatiquement dans certains énoncés fondamentaux (formule de Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière, lemme de Fatou, lemme de Borel-Cantelli en Calcul des Probabilités, etc.).

### II. – Théorèmes et définitions

#### 1. Limite supérieure et limite inférieure

Soit  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  la droite numérique achevée ; c'est un espace compact dont la topologie peut être définie par la distance :

$$d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y| \text{ avec les conventions } \operatorname{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}.$$

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels :  $u_n \in \mathbb{R} = ]-\infty, \infty[$ . On va voir qu'on peut **toujours** associer à cette suite deux uniques éléments  $\ell, L$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  :

$\ell$  s'appelle la plus petite limite (ou limite inférieure) de  $(u_n)$  et se note  $\underline{\lim} u_n$  ou  $\liminf u_n$ .  $L$  s'appelle la plus grande limite (ou limite supérieure) de  $(u_n)$  et se note  $\overline{\lim} u_n$  ou  $\limsup u_n$ .

**Théorème II.1.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels. Alors il existe un unique  $L$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  tel que,  $\lambda$  désignant un élément de  $\mathbb{R}$  :

$$(II.1) \quad \begin{cases} a) & (\forall \lambda > L) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) : u_n \leq \lambda \\ b) & (\forall \lambda < L) (\forall n_0) (\exists n \geq n_0) : u_n \geq \lambda. \end{cases}$$

De même, il existe un unique  $\ell$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  tel que,  $\lambda$  désignant un élément de  $\mathbb{R}$  :

$$(II.2) \quad \begin{cases} a) & (\forall \lambda < \ell) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) : u_n \geq \lambda \\ b) & (\forall \lambda > \ell) (\forall n_0) (\exists n \geq n_0) : u_n \leq \lambda. \end{cases}$$

$$(II.3) \quad \text{On a toujours } \ell \leq L.$$

$$(II.4) \quad (u_n) \text{ converge vers } u \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \ell = L = u.$$

PREUVE. (II.1) : si une partie non vide  $A$  de  $\mathbb{R}$  est non majorée, on convient que sa borne supérieure  $\sup A$  est  $+\infty$ ; si elle est non minorée, on convient que sa borne inférieure  $\inf A$  est  $-\infty$ ; avec ces conventions, posons :

$$(II.5) \quad L := \inf_{n \geq 0} \left( \sup_{k \geq n} u_k \right) =: \inf_{n \geq 0} v_n.$$

a) Soit  $\lambda > L$  (un tel  $\lambda$  n'existe pas si  $L = +\infty$  et il n'y a alors rien à vérifier!); par définition d'une borne inférieure,  $\exists n_0$  tel que  $v_{n_0} \leq \lambda$ , d'où  $u_n \leq v_{n_0} \leq \lambda$  si  $n \geq n_0$ .

b) Soit  $\lambda < L$  (un tel  $\lambda$  n'existe pas si  $L = -\infty$  et il n'y a alors rien à vérifier!) et soit  $n_0 \geq 0$ ;  $v_{n_0} \geq L > \lambda$ , donc il existe  $n \geq n_0$  tel que  $u_n \geq \lambda$ . Cela montre l'existence d'un  $L$  vérifiant (II.1); réciproquement, soit  $L' \in \mathbb{R}$  vérifiant (II.1).

Si  $L' < L$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $L' < \lambda < L$ ; d'après (II.1) a) pour  $L'$ , il existe  $n_0 \geq 0$  tel que  $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq \lambda$  et donc  $v_{n_0} \leq \lambda$ ; (II.5) entraîne alors :  $L \leq v_{n_0} \leq \lambda$ , ce qui est absurde.

Si  $L < L'$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $L < \lambda < L'$ ; d'après (II.1) b) pour  $L'$ , on a  $v_{n_0} \geq \lambda$  pour tout  $n_0 \geq 0$ , donc d'après (II.5),  $L \geq \lambda$ , ce qui est de nouveau absurde; et donc  $L = L'$ .

(II.2) : la preuve de l'existence et de l'unicité est similaire, en posant cette fois :

$$(II.6) \quad \ell := \sup_{n \geq 0} \left( \inf_{k \geq n} u_k \right) =: \sup_{n \geq 0} w_n.$$

(II.3) : Soit  $m, n$  deux entiers  $\geq 0$  et soit  $p = \sup(m, n)$ . Par définition,  $(v_n)$  est une suite décroissante et  $(w_n)$  une suite croissante; donc en utilisant l'inégalité  $\inf A \leq \sup A$  avec  $A = \{u_p, u_{p+1}, \dots\}$  on obtient :

$$(II.7) \quad w_m \leq w_p \leq v_p \leq v_n.$$

Fixant  $n$  et passant au sup sur  $m$  dans (II.7) on obtient

$$(II.8) \quad \ell \leq v_n.$$

Passant à l'inf sur  $n$  dans (II.8), on obtient *via* (II.5) :  $\ell \leq L$ .

(II.4) :  $\Leftarrow$  Pour plus de clarté limitons-nous au cas où la valeur commune  $u$  de  $\ell$  et  $L$  se trouve dans  $\mathbb{R}$  et donnons-nous  $\varepsilon > 0$  :

(II.1) a) entraîne l'existence de  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0 : u_n \leq u + \varepsilon$ ,

(II.2) a) entraîne l'existence de  $n_1$  tel que :  $\forall n \geq n_1 : u_n \geq u - \varepsilon$ .

Si  $n_2 = \max(n_0, n_1)$ , on voit donc que :  $\forall n \geq n_2 : u - \varepsilon \leq u_n \leq u + \varepsilon$ , soit encore :  $\forall n \geq n_2 : |u_n - u| \leq \varepsilon$ . Ceci prouve que  $u_n \rightarrow u$ .

$\Rightarrow$  La preuve est analogue, et laissée au lecteur.  $\diamond$

## 2. Passage à la $\overline{\lim}$ ou $\underline{\lim}$ dans une inégalité

L'utilité des notions de  $\underline{\lim}$  ou  $\overline{\lim}$  tient d'une part à leur existence toujours garantie (contrairement à celle de  $\lim$ ), d'autre part à leur souplesse d'utilisation illustrée par le :

**Théorème II.2. (Principe de passage à la  $\underline{\lim}$  ou à la  $\overline{\lim}$  dans une inégalité)**

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites de réels telles que

$$(II.9) \quad \exists n_0; \quad \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n.$$

On a alors la conclusion

$$(II.10) \quad \begin{cases} a) & \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \\ b) & \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n. \end{cases}$$

PREUVE. a) Posons  $L = \overline{\lim} a_n$ ,  $L' = \overline{\lim} b_n$  et supposons  $L > L'$ . Soit  $\lambda_1, \lambda_2$  deux réels tels que  $L > \lambda_1 > \lambda_2 > L'$ . D'après (II.1) a) et (II.1) b) :

$$(II.11) \quad \exists p \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq p : b_n \leq \lambda_2$$

$$(II.12) \quad \exists q \geq p \text{ tel que } a_q \geq \lambda_1.$$

D'où  $b_q \leq \lambda_2 < \lambda_1 \leq a_q$ , ce qui donne  $b_q < a_q$  et contredit (II.9), prouvant ainsi a) par l'absurde.

b) se prouve de la même façon. ◇

### Exemples.

$$(II.13) \quad \text{Si } u_n = (-1)^n, \quad \underline{\lim} u_n = -1 \text{ et } \overline{\lim} u_n = +1.$$

$$(II.14) \quad \text{Si } u_n = n, \quad \underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n = +\infty.$$

(II.15) Si  $u_n = \cos(2\pi n\theta)$  avec  $0 < \theta \leq 1$ , il y a deux cas à distinguer :

a)  $\theta$  irrationnel  $\Rightarrow \underline{\lim} u_n = -1$  et  $\overline{\lim} u_n = +1$ . (On utilise la densité de  $\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ .)

b)  $\theta = \frac{p}{q}$  avec  $p, q$  entiers  $> 0$  premiers entre eux  $\Rightarrow \underline{\lim} u_n = \alpha$ ,  $\overline{\lim} u_n = 1$  avec  $\alpha = \min_{0 \leq r < q} \left( \cos 2\pi \frac{r}{q} \right)$ . (On effectue la division euclidienne de  $np$  par  $q$ ; noter que  $\alpha = -1$  si  $q$  est pair, en faisant  $r = \frac{q}{2}$ .)

### Remarques.

(II.16)  $\overline{\lim} u_n = +\infty$  équivaut à dire que  $(u_n)$  n'est pas majorée, ou encore qu'on peut trouver une suite extraite  $(u_{n_k})_{k \geq 1}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = +\infty$ . Donc,  $\overline{\lim} u_n < +\infty$  équivaut à dire que  $(u_n)$  est majorée.

(II.17)  $\underline{\lim} u_n = +\infty$  équivaut à dire que  $u_n \rightarrow \infty$ . Donc  $\underline{\lim} u_n < +\infty$  équivaut à dire que  $u_n$  ne tend pas vers  $+\infty$ , soit encore qu'on peut trouver une suite extraite  $(u_{n_k})_{k \geq 1}$  qui est majorée.

(II.18) On a défini  $\underline{\lim}$ ,  $\overline{\lim}$  pour des suites; mais on peut faire la même chose pour une application  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0$  point d'accumulation de  $A$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . On obtient alors

$\ell = \underline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$  et  $L = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$  tels que,  $V$  désignant un voisinage de  $x_0$

$$(II.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad (\forall \lambda > L) (\exists V) (\forall x \in V \cap A) : f(x) \leq \lambda \\ b) \quad (\forall \lambda < L) (\forall V) (\exists x \in V \cap A) : f(x) \geq \lambda. \end{array} \right.$$

$$(II.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad (\forall \lambda < \ell) (\exists V) (\forall x \in V \cap A) : f(x) \geq \lambda \\ b) \quad (\forall \lambda > \ell) (\forall V) (\exists x \in V \cap A) : f(x) \leq \lambda. \end{array} \right.$$

(Noter que dans (II.1) et (II.2) le rôle de  $x_0$  était joué par  $+\infty$ , celui de  $A$  par les entiers  $\geq 0$  et celui de  $V$  par  $\{n; n \geq n_0\} \cup \{\infty\}$ .)

Si  $f, g$  sont deux applications de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , le théorème II.2 et sa preuve restent valables en remplaçant (II.9) par :

$$(II.21) \quad \exists V; \forall x \in V \cap A : f(x) \leq g(x)$$

et en remplaçant (II.10) par

$$(II.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) \leq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} g(x) \\ b) \quad \underline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) \leq \underline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} g(x). \end{array} \right.$$

(II.23) Revenons aux suites;  $\ell$  (resp.  $L$ ) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur d'adhérence de  $(u_n)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ; en particulier si  $F$  est un fermé de  $\overline{\mathbb{R}}$  tel que  $u_n \in F$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $\ell \in F$  et  $L \in F$ . Enfin,  $\ell$  ou  $L$  ne dépendent pas des premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

### III. – Applications

#### 1. Suites sous-additives

**Exemple III.1.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels positifs telle que :

$$(III.1) \quad u_{n+p} \leq u_n + u_p, \quad \forall n, p \geq 0.$$

Alors  $\frac{u_n}{n}$  tend vers une limite  $a \in \mathbb{R}^+$ .

PREUVE. Posons  $\ell = \underline{\lim} \frac{u_n}{n}$ ;  $L = \overline{\lim} \frac{u_n}{n}$ ;  $a = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ . Nous allons montrer que :

$$(III.2) \quad \ell \geq a; \text{ et } L \leq a.$$

La première inégalité est évidente :  $n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_n}{n} \in F := [a, \infty]$  et on applique (II.23).

Pour la seconde inégalité, on fixe un entier  $m \geq 1$  et on effectue la division euclidienne de  $n$  par  $m$  :  $n = mq(n) + r(n)$  avec  $0 \leq r(n) < m$ . D'après (III.1) et une récurrence  $u_n \leq u_{mq(n)} + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + (m-1)u_1 + u_0 =: q(n)u_m + C$ . Donc si  $n \geq 1$  :  $\frac{u_n}{n} \leq \frac{q(n)}{n}u_m + \frac{C}{n}$ . Passons à la  $\overline{\lim}$  dans cette inégalité en notant que  $\frac{q(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{m}$  ; nous obtenons  $L \leq \frac{u_m}{m}$ . Passant maintenant à la borne inférieure sur  $m$ , on obtient la seconde inégalité de (III.2) ; (II.3) et (II.4) montrent alors que  $\frac{u_n}{n}$  tend vers  $a$ .  $\diamond$

**Remarque.** On peut remplacer l'hypothèse de sous-additivité (III.1) par l'hypothèse de sous-multiplicativité :  $u_{n+p} \leq u_n u_p$ . On arrive cette fois à la conclusion que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n}$  existe et vaut  $\inf_{n \geq 1} u_n^{1/n}$ . Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé complet,  $T$  un opérateur linéaire borné de  $E$  et  $u_n = \|T^n\|$ , on a bien :  $u_{n+p} = \|T^{n+p}\| \leq \|T^n\| \|T^p\| = u_n u_p$ , et donc  $\|T^n\|^{1/n}$  a une limite.

(Le théorème du rayon spectral précise la valeur de cette limite : c'est  $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ , où  $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda \text{Id}_E \text{ n'a pas d'inverse dans } \mathcal{L}(E)\}$  est le spectre de  $T$ ).

## 2. Un théorème taubérien

### Exemple III.2.

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite **décroissante** de réels positifs,  $S_n = a_0 + \dots + a_n$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $c > 0$ . On a équivalence entre :

- i)  $a_n \sim cn^{-\alpha}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- ii)  $S_n \sim c \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

( $u_n \sim v_n$  signifie comme d'habitude que  $u_n = v_n + o(v_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ).

**PREUVE.** i)  $\Rightarrow$  ii) est classique et utilise seulement la positivité des  $a_n$ , pas leur décroissance. Pour la réciproque, posons  $\ell = \underline{\lim} n^\alpha a_n$  et  $L = \overline{\lim} n^\alpha a_n$ .

Soit  $\delta > 1$  et  $m = [\delta n]$  (où  $[ \ ]$  désigne la partie entière). Puisque  $(a_n)$  décroît :

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m \leq (m-n)a_n \leq (\delta-1)na_n.$$

D'où pour  $n \geq 1$ ,  $n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} n^{\alpha-1} (S_m - S_n)$ , soit

$$(III.3) \quad n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} \left[ \left( \frac{n}{m} \right)^{\alpha-1} m^{\alpha-1} S_m - n^{\alpha-1} S_n \right].$$



Passant à la  $\underline{\lim}$  dans (III.3) et utilisant le fait que  $m \sim \delta n$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$(III.4) \quad \ell \geq \frac{1}{\delta - 1} \left[ \delta^{1-\alpha} \frac{c}{1-\alpha} - \frac{c}{1-\alpha} \right] = \frac{c}{1-\alpha} \frac{\delta^{1-\alpha} - 1}{\delta - 1}.$$

Passant maintenant à la  $\lim$  dans (III.4) quand  $\delta$  tend vers 1 par valeurs supérieures, on obtient :

$$(III.5) \quad \ell \geq \frac{c}{1-\alpha} (1-\alpha) = c.$$

Soit  $\delta \in ]0, 1[$  et  $m = [\delta n]$ . On a cette fois :

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \dots + a_n \geq (n - m) a_n,$$

d'où pour  $n \geq 1$  :

$$(III.6) \quad n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1 - \frac{m}{n}} \left[ n^{\alpha-1} S_n - m^{\alpha-1} S_m \left( \frac{n}{m} \right)^{\alpha-1} \right].$$

Le passage à la  $\overline{\lim}$  dans (III.6) donne :

$$(III.7) \quad L \leq \frac{1}{1-\delta} \left[ \frac{c}{1-\alpha} - \frac{c}{1-\alpha} \delta^{1-\alpha} \right] = \frac{c}{1-\alpha} \left[ \frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta} \right].$$

Passant maintenant à la  $\lim$  dans (III.7) quand  $\delta$  tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$(III.8) \quad L \leq \frac{c}{1-\alpha} (1-\alpha) = c.$$

(II.3), (III.5) et (III.8) entraînent  $\ell = L = c$ ; puis (II.4) implique  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = c$ , ce qui prouve i). ◇

### Remarques.

(III.9) On a réussi à prouver l'implication relativement délicate ii)  $\Rightarrow$  i) sans découper un seul epsilon en mille morceaux.

(III.10) La condition **taubérienne** de décroissance est essentielle, comme le montre l'exemple  $a_n = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } n \text{ est pair } \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Un calcul simple montre que  $S_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{n}$ , donc

ii) a lieu avec  $c = \alpha = \frac{1}{2}$ , alors que i) est clairement en défaut.