SYSTÈMES-DÉCISIONS

sd

C. FOURGEAUD — B. LENCLUD

économétrie

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

économétrie

233

Sept. 79

SYSTÈMES-DÉCISIONS
sd

COLLECTION DIRIGÉE PAR PIERRE TABATONI
SECTION : SYSTÈMES DE GESTION

économétrie

CLAUDE FOURGEAUD
Professeur à l'Université de Paris I
Directeur du CEPREMAP

BERNARD LENCLUD
Docteur ingénieur. Administrateur de l'INSEE
Chef de la division de l'Informatique. Direction de la prévision

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 035509 9

1re édition : 4e trimestre 1978

108, Bd Saint-Germain, 75006 Paris

ISSN 0337-7997

sommaire

avant-propos

L'enseignement de l'économétrie s'est, au cours des dernières années, assez profondément transformé. Il existe maintenant, implantés sur support informatique, des systèmes d'estimation et de simulation de modèles d'un usage relativement commode et peu coûteux. D'autre part les progrès de l'information ont permis la création de banques de données accessibles, ce qui favorise le développement des études économiques. L'enseignement a bénéficié de ces circonstances et tend à développer une pédagogie empirique qui permettrait de se familiariser avec les méthodes de l'économétrie, la préparation technique étant réduite au minimum. Nous devons nous en réjouir car ainsi des économistes dont la formation mathématique demeure limitée, en dépit des réformes et des efforts des universités, devraient pouvoir, après un court temps d'apprentissage, se livrer à des investigations pratiques. Cette tendance, favorable à certains égards, n'est pas sans présenter des inconvénients. Tout d'abord on peut craindre qu'un utilisateur qui ignore la nature réelle des instruments techniques qu'il emploie ne commette de graves erreurs d'interprétation. En outre le dépérissement des enseignements méthodologiques n'est pas un facteur favorable à la recherche : si l'on en excepte de brillantes individualités l'économétrie en France n'a pas connu le même développement que celui qui a été constaté dans l'économie mathématique. Les méthodes de l'économétrie sont en effet à la frontière de disciplines diverses. Il est certes nécessaire d'avoir une formation mathématique suffisante mais il est aussi indispensable de dominer les aspects classiques de la statistique mathématique et, pour cela même, de posséder de « raisonnables » connaissances de la théorie des probabilités.

Le contenu de cet ouvrage s'inspire des préoccupations précédentes. Il est de caractère résolument méthodologique et s'efforce de replacer les méthodes de l'économétrie dans leur environnement. En outre certains résultats souvent admis sans démonstration font l'objet d'une présentation complète.

Sans avoir pour ambition d'exposer l'ensemble des outils nécessaires à l'économétrie, ce livre s'efforce d'en présenter les concepts de base les plus utiles. C'est ainsi que les deux premiers chapitres rappellent les principes de l'algèbre linéaire et les propriétés des matrices qui sont au cœur des *méthodes d'ajustement. De même les méthodes statistiques de l'économétrie ne peuvent être assimilées sans connaissances précises sur la théorie de l'estimation statistique et celle des tests d'hypothèses. Il nous est apparu alors qu'un concept jouait un rôle fondamental, celui de pseudo-inverse de matrice. En effet, celles-ci permettent d'exprimer sous une forme commode la solution générale d'un système linéaire (estimateur sans biais) et, par ses propriétés métriques, de donner la solution d'un programme qui définit un estimateur de variance minimum. L'algèbre des pseudo-inverses conduit à un énoncé sous forme condensée de propriétés dont l'écriture développée serait particulièrement lourde. On obtient ainsi un théorème de Gauss-Markov dans le cas le plus général et on met en évidence les rapports qui existent entre différentes approches particulières. De même les propriétés statistiques du modèle linéaire peuvent être présentées, nous semble-t-il, de façon plus claire.*

Ce qui vient d'être dit pourrait laisser supposer que cet ouvrage n'a qu'un caractère méthodologique, sans souci d'application; il n'en est rien. Nous nous sommes efforcés pour les chapitres les plus importants d'en présenter des applications significatives. Celles-ci trouvent leur origine dans des études réalisées à la direction de la Prévision du ministère de l'Economie et des Finances et à l'INSEE. Dans un chapitre préliminaire figurent une présentation sommaire de ces études et les séries utilisées. Il sera possible au lecteur d'étudier sur les mêmes données d'autres modèles et d'acquérir ainsi une pratique plus concrète.

Le désir qui a été le nôtre de situer les méthodes de l'économétrie dans leur environnement nous a contraint de limiter l'ensemble des questions traitées. Certains pourront s'étonner que des aspects importants, tels que les modèles à erreurs composées, l'analyse spectrale des chroniques, ne soient pas abordés et que l'on ne traite pas des méthodes d'estimation des modèles à équations simultanées. Nous pensons que cet ouvrage permet leur étude sur des bases raisonnablement solides et par ailleurs une suite à ce livre n'est pas exclue.

Comme tout ouvrage celui-ci n'est pas uniquement redevable aux auteurs. De nombreux chapitres, en particulier le chapitre XI, ont fait l'objet de discussions et d'améliorations souvent profondes dans un séminaire qui comprenait en particulier : A. Holly, P. Mazodier, A. Monfort, A. Trognon. Nous devons aussi exprimer notre gratitude à J.-C. Bonnin qui a été un lecteur attentif et nous a aidé à la construction des exemples numériques ainsi qu'à Mme Delattre pour avoir dactylographié avec patience les versions successives du manuscrit.

Les Presses Universitaires de France ont réalisé cet ouvrage dans la meilleure tradition de l'imprimerie française.

présentation des données

Dans cet ouvrage, pour illustrer les différents chapitres on présentera quelques exemples concrets. Ils trouvent leur origine dans des études réalisées à la direction de la Prévision du ministère de l'Economie et des Finances ou à l'INSEE.

Ces exemples sont les suivants :

1. Evolution de la population agricole en France.
2. Evolution du taux de couverture des importations de la France.
3. Demande de refinancement des banques commerciales.
4. Comparaisons internationales de fonctions de demande.

On trouvera ci-dessous les statistiques utilisées avec quelques explications.

1. Evolution de la population agricole

L'information de base est constituée par les recensements généraux de la population de 1962 et 1968 et l'on a utilisé les données relatives aux 21 régions de programme.

L'objet est d'expliquer les taux de départ par tranche d'âge des actifs agricoles exploitants et salariés en fonction d'un certain nombre de variables explicatives.

Variables à expliquer :

$\mathbf{y}^1$ taux de disparition des actifs familiaux (15-24 ans).
$\mathbf{y}^2$ taux de disparition des chefs d'exploitation (55-64 ans).
$\mathbf{y}^3$ taux de disparition des salariés agricoles (15-24 ans).
$\mathbf{y}^4$ taux de disparition des salariés agricoles (25-34 ans).

Variables explicatives :

$\mathbf{x}^1$ Revenu brut d'exploitation par personne-année-travail.
$\mathbf{x}^2$ Pourcentage des actifs de 15 à 24 ans.
$\mathbf{x}^3$ Pourcentage des actifs agricoles dans la population active.
$\mathbf{x}^4$ Evolution de la taille moyenne des exploitations.
$\mathbf{x}^5$ Capital d'exploitation.
$\mathbf{x}^6$ Revenu des ménages de salariés agricoles.
$\mathbf{x}^7$ Pourcentage de la production animale dans la production totale.

x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	y^1	y^2	y^3	y^4
19.6000	.0587	11.8580	.1169	.0290	11.0300	191	.8605	.1288	.1182	.2037
13.0000	.1128	163.8500	.0855	.0317	10.2510	416	— .1906	— .1293	— .1900	— .2646
16.7000	.1134	150.4900	.0596	.0376	9.1330	500	— .0095	— .0582	— .2523	— .2224
12.3000	.0964	121.7000	.0663	.0331	10.6050	729	.1796	.0124	— .4173	— .4167
8.4000	.0889	207.4300	.1975	.0246	5.8900	468	— .2159	.0514	— .4259	— .3837
12.5000	.1194	80.1190	.0854	.0303	6.9320	632	.0247	— .0443	— .3144	— .2182
7.9000	.1019	89.5460	.1658	.0397	11.4490	807	— .0178	.0980	— .2540	— .2395
5.1000	.0740	106.8200	.3611	.0216	10.5430	558	— .1354	.0110	— .1633	.0330
6.2000	.1218	150.5000	.1758	.0313	11.5610	888	— .3506	— .0548	— .2500	— .1688
7.2000	.1064	327.1000	.0987	.0229	5.6620	897	— .1382	.0915	— .5813	— .3016
5.6000	.1270	282.8500	.0903	.0209	5.4370	773	— .3467	.1058	— .5889	— .5066
4.9000	.1161	329.2100	.1038	.0231	4.3120	853	— .4029	— .1587	— .5125	— .4073
4.6000	.0733	331.4600	.1364	.0211	5.6990	821	— .3150	— .0465	— .3016	— .4075
4.7000	.0888	264.6100	.1200	.0230	4.0610	847	— .1242	— .1124	— .4907	— .3408
7.4000	.0956	294.5600	.1356	.0238	5.1370	697	— .2134	.1273	— .4879	— .3914
5.3000	.0847	248.4400	.1053	.0150	7.1840	657	— .1406	— .0636	— .3072	— .3393
5.4000	.0896	275.5500	.0915	.0229	7.3870	691	— .2712	— .1534	— .1915	— .3446
7.5000	.0898	199.7900	.1974	.0233	7.8300	131	— .2411	— .0648	— .4035	— .3757
5.5000	.0832	122.5900	.0172	.0225	7.0450	191	— .2378	— .1157	— .4176	— .3522
10.2000	.0522	220.4500	.1209	.0136	7.0980	465	.1284	— .0583	.0954	— .2186
9.8000	.0827	89.0550	.1319	.0164	7.5710	641	— .0196	.0397	.4810	— .0034

2. Evolution du taux de couverture des importations

La variable à expliquer est définie comme le rapport entre les exportations (FOB) et les importations (CAF) ; les variables explicatives retenues pour traduire les situations conjoncturelles respectives de la France et de l'étranger sont :

x^1 le niveau relatif des prix français mesuré par le rapport entre l'indice de la PIB française et un indice de prix de 12 pays de l'OCDE ;

x^2 un indicateur de la demande en France obtenu par les enquêtes auprès des chefs d'entreprise ;

x^3 un indicateur de la demande à l'étranger représenté par l'écart par rapport à une tendance linéaire d'un indice de la production industrielle des pays industrialisés.

Tableau des séries utilisées

Années	y	x^1	x^2	x^3
1950	86	97,8	22	— 3,2
1951	72	103,8	38	1,7
1952	64	112,9	26	— 3,0
1953	79	112,7	14	— 1,8
1954	86	112,3	17	— 0,6
1955	93	110,4	23	3,7
1956	72	112,1	33	3,7
1957	71	107,5	43	1,8
1958	79	103,2	24	— 3,0
1959	99	97,3	14	— 2,2
1960	99	96,2	23	1,3
1961	103	95,9	26	0,7
1962	99	97,3	30	0,5
1963	91	100,0	33	0,8
1964	88	100,4	34	1,9
1965	96	99,9	23	1,6
1966	91	98,3	30	0,8
1967	90	98,1	20	— 2,8
1968	91	100,6	22	— 0,2
1969	82	99,0	41	2,7
1970	91	91,6	35	1,3
1971	93	87,8	30	— 2,3
1972	94	91,5	29	— 3,4

3. Demande de refinancement des banques

La variable à expliquer est la demande de refinancement des banques commerciales (RF). Les variables explicatives retenues sont les suivantes :

- ρ : indicateur de la rentabilité des crédits distribués par les banques;
- REX : réserves exogènes des banques. Elles correspondent au mouvement net de l'or et des devises et au concours de la Banque de France et de la Caisse des Dépôts au Trésor;
- RO : réserves obligatoires des banques sur la distribution des crédits et les dépôts collectés;
- Z, MAI : variables « muettes » introduites pour tenir compte respectivement de l'encadrement du crédit durant la période 1963 à 1965 et des facilités exceptionnelles de refinancement accordées en 1968.

Les statistiques sont trimestrielles et couvrent la période 1962-1972.

Tableau des séries utilisées

	Log RF	ρ	Log REX	Log RO	Z	MAI
1	2.628	5.610	3.882	0.	0.	0.
2	2.711	5.465	3.905	0.	1.000	0.
3	2.747	5.471	3.945	0.	1.000	0.
4	2.768	5.736	3.930	0.	1.000	0.
5	2.720	5.719	3.981	0.	1.000	0.
6	2.734	5.597	4.037	0.	1.000	0.
7	2.735	5.702	4.043	0.	1.000	0.
8	2.752	5.788	4.036	0.	1.000	0.
9	2.667	5.672	4.081	0.	1.000	0.
10	2.820	5.361	4.077	0.	0.	0.
11	2.738	5.455	4.114	0.	0.	0.
12	2.909	5.355	4.075	0.	0.	0.
13	2.820	5.419	4.124	0.	0.	0.
14	2.867	5.365	4.152	0.	0.	0.
15	2.757	5.428	4.186	0.	0.	0.
16	2.964	5.228	4.124	0.	0.	0.
17	2.924	5.210	4.207	.372	0.	0.
18	3.094	5.181	4.222	.924	0.	0.
19	3.025	5.285	4.267	1.286	0.	0.
20	3.126	5.151	4.242	1.556	0.	0.
21	3.125	5.122	4.228	1.577	0.	0.
22	3.463	4.856	4.126	.997	0.	2.000

Tableau des séries utilisées (suite)

	Log RF	ρ	Log REX	Log RO	Z	MAI
23	3.470	5.858	4.163	1.668	0.	1.000
24	3.671	6.083	4.062	1.876	0.	0.
25	3.705	6.361	4.031	1.889	0.	0.
26	3.839	6.723	3.961	1.915	0.	0.
27	3.795	7.626	3.990	1.775	0.	0.
28	3.871	8.412	3.956	1.766	0.	0.
29	3.793	8.554	4.011	1.749	0.	0.
30	3.757	8.773	4.046	1.890	0.	0.
31	3.663	8.957	4.189	2.215	0.	0.
32	3.795	8.570	4.177	2.278	0.	0.
33	3.704	8.440	4.256	2.346	0.	0.
34	3.849	8.015	4.235	2.701	0.	0.
35	3.745	8.132	4.418	3.114	0.	0.
36	3.786	7.784	4.469	3.176	0.	0.
37	3.816	7.830	4.401	2.955	0.	0.
38	3.939	7.552	4.352	2.836	0.	0.
39	4.053	7.655	4.423	3.314	0.	0.
40	4.401	7.619	4.262	3.567	0.	0.

4. Comparaisons internationales de fonctions de demande

Les fonctions de demande utilisées sont celles étudiées par Leser et Houthakker qui sont de la forme :

$$q_{it} = \frac{\gamma_i \left(\frac{p_{it}}{R_t}\right)^{\alpha_i - 1}}{\sum_j \gamma_j \left(\frac{p_{jt}}{R_t}\right)^{\alpha_j}} \qquad \begin{matrix} i = 1 \ldots \text{N} \\ t = 1 \ldots \text{T} \end{matrix}$$

Les q_i représentent les consommations en volume (c'est-à-dire à prix constants) des différents biens, R le revenu, (γ_i) et (α_i) sont 2N coefficients à estimer.

On a considéré deux pays, la Norvège et le Royaume-Uni, et la consommation globale en cinq postes. Les statistiques utilisées sont celles de l'OCDE sur la période 1953-1968 que l'on trouvera ci-après.

Dépenses de consommation. Norvège
(en millions de couronnes)

Années	*Dépenses en valeur 1963*					*Dépenses en valeur courante*					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1953	5 512	2 544	1 434	1 277	6 064	3 994	2 354	720	1 118	4 572	12 758
1954	5 548	2 532	1 500	1 352	6 433	4 371	2 358	837	1 212	4 885	13 663
1955	5 758	2 518	1 547	1 419	6 669	4 627	2 300	969	1 286	5 174	14 356
1956	6 059	2 607	1 592	1 470	6 730	5 033	2 396	1 082	1 333	5 516	15 360
1957	6 099	2 631	1 634	1 573	6 943	5 119	2 498	1 208	1 438	5 929	16 212
1958	6 057	2 570	1 677	1 513	7 143	5 377	2 484	1 318	1 412	6 177	16 768
1959	6 167	2 796	1 714	1 574	7 444	5 591	2 736	1 411	1 481	6 568	17 787
1960	6 486	2 945	1 757	1 955	7 741	5 794	2 839	1 528	1 840	6 951	18 952
1961	6 614	3 189	1 737	2 404	8 028	6 070	3 006	1 653	2 339	7 493	20 561
1962	6 818	3 330	1 811	2 427	8 399	6 673	3 222	1 767	2 394	8 123	22 179
1963	7 003	3 360	1 886	2 654	8 715	7 003	3 360	1 886	2 654	8 715	23 618
1964	7 100	3 491	1 948	2 900	9 039	7 861	3 597	2 000	2 955	9 358	25 771
1965	7 377	3 450	2 065	2 913	9 434	8 317	3 771	2 190	3 025	10 319	27 622
1966	7 596	3 515	2 171	3 120	9 923	8 792	3 977	2 379	3 314	11 342	29 804
1967	7 722	3 699	2 284	3 382	10 356	9 372	4 324	2 588	3 697	12 470	32 451
1968	7 978	3 763	2 431	3 395	10 907	10 001	4 489	2 866	3 800	13 618	34 774

1 = Denrées alimentaires.
2 = Vêtements.
3 = Loyers.
4 = Biens de consommation durables.
5 = Autres biens et services.
6 = Dépenses de consommation totale (valeur courante).

Dépenses de consommation. Royaume-Uni
(en millions de livres)

	Dépenses en valeur 1963					*Dépenses en valeur courante*					
Années	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1953	4 450	1 450	1 688	877	6 387	3 500	1 296	1 001	837	4 749	11 378
1954	4 542	1 561	1 732	1 032	6 574	3 695	1 391	1 056	966	4 958	12 066
1955	4 680	1 673	1 781	1 129	6 809	4 029	1 503	1 122	1 075	5 283	13 012
1956	4 752	1 726	1 815	1 000	6 944	4 252	1 588	1 183	1 028	5 665	13 716
1957	4 836	1 772	1 836	1 119	6 999	4 428	1 657	1 276	1 164	5 951	14 476
1958	4 880	1 790	1 873	1 281	7 147	4 530	1 678	1 449	1 333	6 273	15 263
1959	4 975	1 893	1 924	1 509	7 498	4 680	1 758	1 569	1 546	6 530	16 083
1960	5 074	2 033	1 977	1 558	7 764	4 754	1 912	1 660	1 591	6 980	16 897
1961	5 169	2 081	2 018	1 515	8 041	4 914	1 993	1 775	1 558	7 544	17 784
1962	5 226	2 062	2 089	1 578	8 264	5 141	2 035	1 955	1 631	8 099	18 861
1963	5 293	2 144	2 161	1 810	8 628	5 293	2 144	2 161	1 810	8 628	20 036
1964	5 383	2 227	2 196	1 975	8 948	5 526	2 268	2 343	2 000	9 268	21 405
1965	5 391	2 320	2 274	1 987	9 176	5 724	2 413	2 586	2 051	10 079	22 853
1966	5 476	2 321	2 343	1 972	9 479	6 005	2 480	2 835	2 067	10 814	24 201
1967	5 525	2 324	2 440	2 055	9 701	6 179	2 525	3 056	2 194	11 376	25 330
1968	5 541	2 408	2 533	2 140	9 911	6 378	2 692	3 293	2 390	12 315	27 068

1 = Denrées alimentaires.
2 = Vêtements.
3 = Loyers.
4 = Biens de consommation durables.
5 = Autres biens et services.
6 = Dépenses de consommation totale (valeur courante).

CHAPITRE PREMIER

généralités sur les chroniques rappels d'algèbre linéaire

1. Introduction. Chroniques

1.1. Définitions

Les données des études économétriques se présentent généralement sous la forme de *chroniques* ou *séries chronologiques*.

Une chronique est définie à partir de deux ensembles.

— Le premier décrit la chronologie du phénomène, on le note $\mathscr{C}$.

— Le second décrit les différents états ou événements possibles, on le note $\mathscr{E}$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ est toujours ordonné (il s'agit de chronologie). C'est en général un ensemble discret le plus souvent fini. Mais il est des cas où la chronologie intéressante est celle d'un ensemble discret infini bien qu'on ne puisse observer cette chronique que sur une partie finie.

Pour d'autres phénomènes il sera utile de considérer $\mathscr{C}$ comme un ensemble ordonné de type continu. Il est même fréquent que la notion de temps qui est intéressante ne soit pas définie par des instants mais par des intervalles disjoints sur l'échelle des instants ; on obtiendra ainsi des flux : ceux de la Comptabilité nationale par exemple. Pour l'ensemble $\mathscr{E}$ plusieurs cas sont aussi possibles.

— $\mathscr{E}$ peut être sans structure : certaines chroniques météorologiques.

— $\mathscr{E}$ peut être muni simplement d'une structure d'ordre : appréciation des chefs d'entreprises sur la conjoncture :

$$\mathscr{E} = \{ \nearrow, \searrow, = \}.$$

— $\mathscr{E}$ peut être un ensemble de nombres pour lesquels les opérations arithmétiques usuelles ont un sens.

Quant à la chronique, elle est définie en faisant correspondre à chaque élément t de $\mathscr{T}$ un élément $e(t)$ de $\mathscr{E}$ et un seul. C'est donc une application de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{E}$.

Si C désigne une chronique :

$$\begin{aligned} \mathrm{C} : \mathscr{T} &\to \mathscr{E} \\ t &\mapsto e(t). \end{aligned}$$

L'ensemble de toutes les chroniques possibles définies pour les mêmes ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{T}$ est donc l'ensemble noté $\mathscr{E}^{\mathscr{T}}$ de toutes les applications de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{E}$.

L'observation d'une chronique $\mathbf{x}$ est donc la donnée de T éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{T}}) \in \mathscr{E}^{\mathscr{T}}$.

On peut alors classer les chroniques selon la nature des deux ensembles $\mathscr{T}$ et $\mathscr{E}$.

Les chroniques que l'on considère en économétrie sont définies le plus souvent par un ensemble $\mathscr{E}$ de nombres ou de vecteurs. On parlera ainsi de *chroniques numériques* ou vectorielles, et ce sont celles que l'on analyse le plus aisément, mais on pourra aussi considérer des chroniques où l'ensemble $\mathscr{E}$ possède simplement une structure d'ordre bien que la statistique de ces chroniques soit encore peu développée.

Remarquons enfin que la représentation d'une chronique comme application de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{E}$ est aussi valable lorsque $\mathscr{T}$ est un ensemble d'« individus » au sens le plus général du terme; on parlera alors de *coupe instantanée*.

1.2. Représentation vectorielle des chroniques numériques

Dans ce cas $\mathscr{E}$ est un ensemble de nombres que l'on assimilera à $\mathbf{Q}$ (ensemble des rationnels) ou $\mathbf{R}$ (ensemble des réels).

Toute chronique $\mathbf{x}$ de durée limitée T peut s'écrire :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_{\mathrm{T}})$$

et peut être considérée comme élément de $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$.

Soit $\mathbf{V}$ l'ensemble des chroniques de même durée T.

On est conduit à définir des opérations sur **V** : les plus naturelles sont l'addition et l'homothétie.

Soit $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ deux chroniques :

— la somme $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ est la chronique définie par :

$$\forall\, t \in [1, \mathrm{T}] = (\mathbf{x} + \mathbf{y})_t = x_t + y_t$$

— l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbf{R}$ $\mathbf{x} \to \lambda\mathbf{x}$:

$$\forall\, t \in [1, \mathrm{T}] = (\lambda\mathbf{x})_t = \lambda x_t\,.$$

Si l'ensemble **V** est muni de ces deux opérations, il possède une structure d'espace vectoriel. Cette structure s'introduit donc naturellement dans l'analyse des chroniques.

L'addition de deux chroniques correspond à la notion d'agrégation. L'homothétie s'interprète comme un changement de base (ramener une chronique à une base 100) ou d'échelle. Dans ce dernier cas il faut pouvoir donner un sens à une fraction, aussi petite soit-elle, d'une quantité fixée. C'est une convention qui est légitime dans beaucoup de cas pratiques; elle est beaucoup moins justifiée si le phénomène étudié est par nature indivisible. Dans ce cas, l'espace **V** muni de ses additions et de ses homothéties est un module.

D'autre part cette représentation peut se révéler insuffisante d'un autre point de vue. En effet, les différentes coordonnées d'un vecteur sont les valeurs prises au cours du temps par la chronique étudiée. Or la plupart des opérations que l'on effectue sur les chroniques considérées comme vecteurs négligent l'ordre du temps, et traitent les coordonnées de façon symétrique.

Quoi qu'il en soit, cette représentation permet de résoudre un grand nombre de questions pratiques. Elle donne un support intuitif aux opérations sur les chroniques et à la métrique qui sera introduite dans les problèmes d'ajustement.

Si les chroniques considérées sont de durée illimitée, on est conduit à les représenter par des éléments de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ou $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ suivant les cas (**N** désignant l'ensemble ordonné des entiers positifs et **Z** celui des entiers relatifs).

On rappelle ci-dessous les éléments d'algèbre linéaire nécessaires.

On en trouvera une présentation plus détaillée dans [2] dont ce chapitre est un résumé pour certaines de ses parties.

2. Espaces vectoriels. Formes linéaires

2.1. Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble **V** où sont définies :

1° une addition notée $+$ commutative, associative, admettant un élément neutre noté **0** et telle que chaque élément $\mathbf{x}$ de **V** admet un inverse. Un ensemble muni d'une opération binaire ayant ces quatre propriétés est appelé *groupe commutatif* ou abélien; un espace vectoriel est un groupe abélien par rapport à son addition;

2° des homothéties qui à tout élément $\mathbf{x}$ de **V** et à tout élément λ d'un corps de nombres appelés scalaires associent l'élément $\lambda\mathbf{x}$ de **V**. Cette application — homothétie de rapport λ — satisfait aux propriétés suivantes : distributivité, par rapport à l'addition des vecteurs, par rapport à l'addition des scalaires, associativité dans le produit des scalaires et vérifie en outre la propriété que si 1 désigne l'unité du groupe multiplicatif du corps des scalaires :

$$1.\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Dépendance linéaire. Base. Décomposition des chroniques

Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{w}$ des éléments d'un espace vectoriel **V**. Ils sont dits *linéairement dépendants* s'il existe des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ non tous nuls tels que :

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \ldots + \lambda\mathbf{w} = 0.$$

Dans le cas contraire ces éléments sont dits linéairement indépendants.

$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \ldots + \lambda\mathbf{w}$ est appelée combinaison linéaire de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{w}$, elle définit un vecteur et un seul de **V**.

Si dans un espace vectoriel **V** on peut trouver n éléments linéairement indépendants mais non $n+1$, on dit que l'espace **V** est de dimension n. Si, par contre, dans **V** on peut trouver un système comportant un nombre fini *arbitraire* d'éléments linéairement indépendants on dit que **V** est de dimension infinie.

On appelle base d'un espace vectoriel de dimension n tout système de n éléments linéairement indépendants, et tout élément $\mathbf{x}$ de $\mathbf{V}$ s'exprime comme combinaison linéaire unique des éléments de la base.

Par exemple les vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1 \quad 0 \quad \ldots \ldots \quad 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \ldots 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n &= (0 \ldots \quad 0 \quad \ldots \quad 1) \end{aligned}$$

forment une base de $\mathbf{R}^n$.

En outre, deux espaces vectoriels de même dimension sur le même corps $\mathbf{K}$ de scalaires sont isomorphes entre eux et, par suite, tous ceux de dimension n sur le même corps $\mathbf{K}$ sont isomorphes à l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ des suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$.

2.2. Sous-espace vectoriel variété linéaire affine

Définition 1

Dans un espace vectoriel $\mathbf{V}$ un ensemble $\mathbf{E}$ est un sous-espace vectoriel si :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E} \\ \lambda, \mu \in \mathbf{R} \end{array}\right. \Rightarrow \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathbf{E} \tag{2.1}$$

Définition 2

Soit $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{V}$. $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ seront dits supplémentaires si et seulement si :

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Remarque :

Si $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont supplémentaires, tout élément $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ peut s'écrire de manière unique :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{x}_2 \in \mathbf{E}_2.$$

Propriété :

Soit $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_K$, K vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{V}$; ils engendrent un sous-espace vectoriel $\mathbf{E}_K$ de dimension K, c'est-à-dire que l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tels que $\mathbf{x} = \sum_{1} \beta_i \mathbf{x}_i$, où les β_i sont des scalaires, est un sous-espace vectoriel de dimension K.

Définition 3

Soit $\mathbf{V}$ un espace vectoriel; une partie $\mathbf{A}$ de $\mathbf{V}$ est une variété linéaire affine si et seulement si elle est de la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} + \{ \mathbf{x}_0 \}$$

où $\mathbf{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{V}$.

Propriété :

Un ensemble $\mathbf{A}$ est une variété linéaire affine si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{A} \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \in \mathbf{A} \qquad (2.2)$$

2.3. Formes linéaires

On appelle *forme linéaire* ou *covecteur* d'un espace vectoriel toute application :

$$u : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$$

linéaire, c'est-à-dire telle que, quels que soient les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbf{V}$ et les scalaires λ et μ :

$$u(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda u(\mathbf{x}) + \mu u(\mathbf{y}) \qquad (2.3)$$

Dans le cas des espaces de dimension finie, toute forme linéaire a pour expression, si l'espace $\mathbf{V}$ est de dimension n :

$$u(\mathbf{x}) = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n$$

où les u_i sont des nombres qui caractérisent cette forme linéaire. En effet, l'espace $\mathbf{V}$ étant rapporté à une base $\mathrm{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on a, pour chaque vecteur $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n .$$

D'où, en appliquant la propriété caractérisant les formes linéaires :

$$u(\mathbf{x}) = x_1 u(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n(\mathbf{e}_n).$$

On obtient l'expression donnée ci-dessus en posant : $u_i = u(\mathbf{e}_i)$. En particulier, toute somme pondérée peut être considérée comme une forme linéaire. L'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{V}$ peut être muni à son tour d'une structure d'espace vectoriel, en définissant les combinaisons linéaires de deux formes u et v par la règle :

$$w = \alpha u + \beta v$$

si et seulement si pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbf{V}$:

$$w(\mathbf{x}) = \alpha u(\mathbf{x}) + \beta v(\mathbf{x}).$$

On voit en effet simplement que w ainsi défini est aussi une forme linéaire. On appelle cet espace le *dual algébrique* de l'espace $\mathbf{V}$ et on le note $\mathbf{V}^*$. Chaque forme étant en définitive définie par une suite de n nombres :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

le dual de $\mathbf{V}$ est de même dimension et par suite lui est isomorphe. Dans le cas des espaces de dimension infinie, le dual est de structure différente de celle de l'espace auquel il est associé. Par exemple le dual de l'espace des chroniques illimitées et bornées est l'espace des suites :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

telles que la série $\sum_1^\infty |u_i|$ soit convergente.

3. Transformations linéaires. Matrices

3.1. Définitions

$\mathbf{V}$ est un espace vectoriel; une *transformation linéaire*, ou *homomorphisme*, ou *opérateur linéaire* de cet espace dans un espace $\mathbf{W}$, est une application $\mathrm{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ telle que l'image de toute combinaison linéaire de vecteurs soit la combinaison linéaire de mêmes coefficients de leurs images :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathrm{V}; \quad \forall \mathbf{y} \in \mathrm{V}; \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}; \quad \forall \mu \in \mathbf{R};$$
$$\mathrm{L}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathrm{L}(\mathbf{x}) + \mu\mathrm{L}(\mathbf{y}) \qquad (3.1)$$

— Le *noyau* de l'application linéaire L est le sous-espace $\mathbf{V}_0$ de $\mathbf{V}$ constitué par les vecteurs tels que :

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{0} \text{ est ici le vecteur nul de } \mathbf{W}).$$

— L'*image* de l'application linéaire L est le sous-espace de $\mathbf{W}$ noté $L(\mathbf{V})$, constitué par l'ensemble des $L(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x}$ parcourt $\mathbf{V}$:

$$L(\mathbf{V}) = \{ \mathbf{y}; \mathbf{y} \in \mathbf{W}, \exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{V} : L(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \}.$$

Ces deux notions de noyau et d'image sont complémentaires. En effet, deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ont même image si et seulement si leur différence appartient au noyau :

$$L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{y}) \Leftrightarrow L(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbf{V}_0 .$$

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$ peut aussi être muni d'une structure d'espace vectoriel, en définissant les combinaisons linéaires de deux applications L_1 et L_2 par :

$$L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$$

si et seulement si pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$:

$$L_3(\mathbf{x}) = \alpha L_1(\mathbf{x}) + \beta L_2(\mathbf{x}).$$

On vérifie en effet que L_3 est une application linéaire de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$. On notera l'espace des applications linéaires de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$ par $\mathscr{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

3.2. Représentation d'une application linéaire par une matrice

Soit L une application de $\mathbf{E}_n$ dans $\mathbf{E}_m$ et $B_n = \{ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \}$ une base de $\mathbf{E}_n$.

Toute chronique $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ s'exprime de façon unique par :

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n$$

d'où :

$$L(\mathbf{x}) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n L(\mathbf{e}_n)$$

L est donc déterminée par les vecteurs $L(\mathbf{e}_1), \ldots, L(\mathbf{e}_n)$ de $\mathbf{E}_m$.

Posons :

$$L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i .$$

Rapporté à une base $B_m = \{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \}$ de $\mathbf{E}_m$ le vecteur $\mathbf{a}_i$ a pour expression en fonction de ses coordonnées a_{1i}, $a_{ii}, \ldots, a_{mi}$:

$$\mathbf{a}_i = a_{1i}\,\mathbf{b}_1 + \ldots + a_{mi}\,\mathbf{b}_m .$$

De telle sorte que L est définie par le tableau :

$$A_L = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2T} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad A_L = (a_{ij}).$$

Ce tableau à m lignes et n colonnes est appelé *matrice de la transformation* L. On remarque que A_L *ne définit* L *que par rapport aux bases choisies dans* $\mathbf{E}_n$ *et* $\mathbf{E}_m$.

On peut écrire :

$$L(\mathbf{x}) = A_L\,\mathbf{x}.$$

Les vecteurs $\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n$ engendrent l'espace image $L(\mathbf{V})$; ces vecteurs ne sont pas toujours linéairement indépendants, de sorte que la dimension de $L(\mathbf{V})$ peut être inférieure à m. La dimension de $L(\mathbf{V})$ est appelée *rang de* L, noté r. Elle est liée à la dimension du noyau $\mathbf{V}_0$ par la relation :

$$\text{Dim}\,(\mathbf{V}_0) + r = n \qquad (3.2)$$

Dans le cas où les espaces $\mathbf{E}_n$ et $\mathbf{E}_m$ sont de même dimension n, l'application L est biunivoque lorsque $r = n$; on la dit *régulière* (isomorphisme). Il est alors équivalent de dire que le noyau est de dimension nulle, ce qui signifie qu'il se réduit au vecteur nul.

3.3. Propriétés élémentaires des matrices

Opérations sur les matrices

En associant (pour des bases données) des matrices aux applications linéaires, on peut, aux opérations effectuées sur des applications linéaires, faire correspondre des opérations analogues sur les matrices.

En désignant par $L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m)$ une application linéaire de $\mathbf{E}_n$ dans $\mathbf{E}_m$, on peut résumer ces opérations dans le tableau ci-après.

Application	*Matrice associée*	*Format et définition*
$L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m)$ $M(\mathbf{E}_q, \mathbf{E}_n)$	A B	(m, n) a_{ij} (n, q) b_{ij}
Combinaison linéaire $\alpha L_1(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m) + \beta L_2(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m)$	Combinaison linéaire $\alpha A_1 + \beta A_2$	(m, n) $\alpha a_{1,ij} + \beta a_{2,ij}$
Composition $L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m) \circ M(\mathbf{E}_q, \mathbf{E}_n)$	Multiplication AB	(m, q) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
Application nulle $L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m)$	Matrice nulle 0	(m, n) $a_{ij} = 0, \forall i, \forall j$
Identité $L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) = J$	Matrice unité I	(n, n) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
Inverse $L^{-1}(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) \circ L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n)$ $= L(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) \circ L^{-1}(\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n) = J$	Matrice inverse A^{-1}	(n, n) $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
Transposition $L(\mathbf{E}_m^*, \mathbf{E}_n^*)$	Matrice transposée A'	(n, m) $a'_{ij} = a_{ji}$

Propriétés :

Les opérations précédentes vérifient les propriétés suivantes (avec des formats convenables).

$$
\begin{aligned}
&A + B = B + A \\
&A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C \\
&\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \\
&(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A \\
&A(BC) = (AB) C = ABC \\
&A(B + C) = AB + AC \\
&(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D) \\
&A + O = A \\
&I.A = A.I = A \\
&(AB)' = B' A' \\
&(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \\
&(A^{-1})' = (A')^{-1}.
\end{aligned}
$$

Déterminant :

Soit A une matrice carrée (n, n), le déterminant de A notée $|A|$ est un nombre défini par :

$$|A| = \sum_{P} \varepsilon_p \prod_{(i,j) \in p} a_{ij} \qquad (3.3)$$

où p désigne une permutation de $\{(i,j)\}$, ε_p le signe de la permutation et P l'ensemble des permutations.

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ régulière}$$
$$|AB| = |A|\,|B| \quad \text{si A et B sont carrées}$$
$$|\alpha A| = \alpha^n\,|A|.$$

Trace :

Soit A une matrice (n, n) ; on appelle trace de A la somme des termes diagonaux de A :

$$\text{trace (A)} = \sum_i a_{ii} \qquad (3.4)$$

et l'on a, si A et B sont de formats respectifs (p, n), (n, p) :

$$\text{trace AB} = \text{trace BA}.$$

Produit de Kronecker de matrices

Définition :

Soit A et B deux matrices de formats respectifs (m, n), (p, q), le produit de Kronecker des matrices A, B est une matrice de format (mp, nq) définie par :

$$A \otimes B = (a_{ij}\, B) \qquad (3.5)$$

Propriétés :

$$0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$$
$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$
$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$
$$\alpha A \otimes \beta A = \alpha\beta(A \otimes B) \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$
$$AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D) \qquad \text{(attention aux formats)}$$
$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$
$$\text{trace } (A \otimes B) = \text{trace A trace B}$$
$$|A \otimes B| = |A|\,|B|^m$$

si A est une (m, m) matrice et B une (p, p) matrice.

SYSTÈMES-DÉCISIONS

COLLECTION DIRIGÉE PAR PIERRE TABATONI

MORVAN Y.	**Economie industrielle**
AFTALION F. et VIALLET C.	**Théorie du portefeuille. Analyse du risque et de la rentabilité**
LE MOIGNE J.-L.	**La théorie du système général**
FOURGEAUD C. et LENCLUD B.	**Econométrie**
BEER S.	**Neurologie de l'entreprise** *(sous presse)*
TABATONI O. et MICHEL P. A.	**L'évaluation de l'entreprise** *(sous presse)*

• SECTION « MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES POUR LA DÉCISION »

dirigée par JEAN-PIERRE AUBIN

	Mathématiques pour les sciences sociales :
ROURE F. et BUTERY A.	**T. 1 : Ensembles — Fonctions réelles**
ROURE F. et CHARLES A.-M.	**T. 2 : Convexes — Optimisation**
COHEN V.	**T. 3 : Processus discrets**
BUTERY A.	**T. 4 : Intégration — Processus continus**
ROURE F., FRITZ G. et CHARLES A.-M.	**T. 5 : Algèbre linéaire — Programmation linéaire — Graphes**
MONTBRIAL T. de	**Economie théorique**
QUIRK J. et SAPOSNIK R.	**Théorie de l'équilibre général et économie du bien-être**
ULMO J. et BERNIER J.	**Eléments de décision statistique**
BATTEAU P. et MARCIANO J.-P.	**Probabilités et décision dans l'incertain**

• SECTION « MARKETING »

dirigée par JEAN-JACQUES LAMBIN

LAMBIN J.-J.	**Modèles et programmes de marketing**
CHEVALIER M. et FENWICK R.	**La stratégie marketing**
LAMBIN J.-J. et PEETERS R.	**La gestion marketing des entreprises** **T. 1 : Analyse**

• SECTION « RELATIONS INDUSTRIELLES »

dirigée par FRANÇOIS SELLIER

SELLIER F.	**Les relations industrielles**

SYSTÈMES-DÉCISIONS

ÉCONOMÉTRIE

Cet ouvrage présente les concepts de base de l'économétrie en les situant par rapport à d'autres disciplines : algèbre linéaire, programmation mathématique, statistique : théorie de l'estimation et des tests d'hypothèses. Celles-ci font l'objet d'une présentation condensée mais précise, adaptée aux préoccupations de l'ouvrage. Il apparaît qu'un outil joue un rôle fondamental pour une exposition claire des méthodes économétriques : celui de pseudo-inverse de matrices. Il permet de développer une théorie unifiée de l'estimation dans le modèle linéaire et d'obtenir notamment un théorème général de Gauss-Markov recouvrant les différents cas particuliers.

L'ouvrage ne présente pas qu'un intérêt méthodologique. Les chapitres les plus importants sont illustrés par des applications économiques issues de travaux réalisés à la Direction de la Prévision et à l'INSEE.

Ce livre s'adresse plus particulièrement aux étudiants en sciences économiques s'intéressant aux techniques quantitatives ainsi qu'aux élèves des Ecoles et des Universités scientifiques qui souhaitent acquérir des connaissances précises dans le domaine de l'économétrie.

Claude Fourgeaud enseigne l'Economie mathématique et l'Econométrie à l'Université de Paris I (Sciences économiques). Il est conseiller scientifique à la Direction de la Prévision du ministère de l'Economie et dirige le CEPREMAP.

Bernard Lenclud, chargé d'enseignement à l'Université de Paris I, dirige la Division de l'Informatique de la Direction de la Prévision du ministère de l'Economie.

22252039 / 4 / 78