ROLAND PRESSAT

l'analyse démographique

puf

ROLAND PRESSAT

L'ANALYSE DÉMOGRAPHIQUE

Concepts — Méthodes — Résultats

QUATRIÈME ÉDITION REFONDUE ET AUGMENTÉE

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

DL-13-07-1983-20272

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE
B.N.
IMPRIMÉS

ISBN 2 13 037781 5

Dépôt légal — 1re édition : 1961, décembre
4e édition refondue et augmentée : 1983

© Presses Universitaires de France, 1983, avril
108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

PRÉSENTATION DES TABLES DÉMOGRAPHIQUES

DEUXIÈME PARTIE

DONNÉES D'OBSERVATION ET CALCULS STATISTIQUES ÉLÉMENTAIRES

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES DÉMOGRAPHIQUES

QUATRIÈME PARTIE

LES POPULATIONS

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE R.F. IMPRIMÉS

AVANT-PROPOS POUR LA QUATRIÈME ÉDITION

Cette quatrième édition de l'*Analyse démographique* comporte des remaniements assez profonds par rapport à la rédaction précédente.

La structure de l'ouvrage a été conservée à ceci près que les éléments de démographie mathématique ont été intégrés — et développés — au fil des chapitres les concernant. Toutefois, pour ne pas handicaper le lecteur que ces passages — composés en petits caractères — rebuteraient, nous avons rédigé le restant du texte comme un tout indépendant. Par ailleurs, le chapitre sur l'analyse des histoires génésiques a été enrichi et un chapitre sur l'analyse des migrations a été introduit. Enfin, les chapitres qui passent en revue les conditions concrètes d'analyse des phénomènes démographiques et des populations ont subi quelques allègements qui devraient les rendre d'une lecture plus aisée.

Rappelons les raisons qui ont motivé l'architecture de ce livre.

Il nous paraît essentiel que le chercheur entre dans la pratique de l'analyse démographique armé de principes fondamentaux qui lui serviront, en quelque sorte, de guides permanents dans les circonstances si diverses où il se trouvera placé. A cet égard, la première partie consacrée à l'étude des tables démographiques est capitale, car elle présente avec tous les détails désirables des modèles descriptifs fondamentaux, qui constituent une référence constante dans toute recherche de démographie quantitative.

La deuxième partie est consacrée au traitement des données d'observation et notamment au calcul des taux, outil de base en analyse. Il nous a paru indiqué de réunir ici, en dehors de toute considération spécifique à un phénomène donné, tout ce qui relève de ces questions, ce qui devrait mieux marquer l'unité des procédures employées.

Les troisième et quatrième parties sont consacrées aux chapitres traditionnels de l'analyse démographique. Nous pouvons alors les aborder en consacrant toute notre attention à leurs aspects spécifiques, sans être encombrés par des questions adventices — traitées dans la deuxième partie — qui nous distrairaient de l'essentiel.

Nous nous permettons par ailleurs de renvoyer le lecteur à notre *Dictionnaire de démographie* (PUF, 1979), chaque fois que le besoin d'une définition précise se fera sentir.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYMBOLES UTILISÉS

On ne saurait proposer des symboles standards pour représenter la totalité des grandeurs que le démographe est appelé à faire figurer. Chaque auteur a ses conventions et nous précisons, ici, l'essentiel des nôtres.

Pour l'essentiel, les symboles utilisés se rapportent aux tables démographiques. Nous nous en tenons aux principes suivants :

— Les survivants au sens large sont écrits en capitales, avec mention en indice de l'âge x auquel ils se rapportent,

$$S_x \ , \ C_x \ , \ F_x$$

— même convention pour les événements cumulés, telles les descendances

$$D_x$$

— les événements des tables sont écrits en minuscules avec mention, entre parenthèses, de l'intervalle d'âge a considéré,

$$d(x,x+a) \ , \ d(x,x+1) \ , \ m(x,x+1) \ , \ n(x,x+1) \ , \ di(x,x+1)$$

— les quotients comportent en indice, à droite, l'âge initial x et en indice, à gauche, l'intervalle d'âge a considéré, que l'on négligera éventuellement d'indiquer si $a = 1$,

$${}_aq_x \ , \ {}_1q_x \ , \ {}_1n_x \text{ ou } n_x$$

— la distinction entre mesures brutes et mesures nettes est marquée par l'emploi d'un accent dans le second cas ; ainsi, aux célibataires bruts C_x correspondent les célibataires nets C'_x, aux événements bruts $m(x,x+1)$ les événements nets $m'(x,x+1)$, au quotient brut n_x le quotient net n'_x. Cette convention s'étend aux diverses mesures où la distinction entre mesure brute et mesure nette existe ; c'est ainsi, que nous noterons a l'âge moyen brut à la maternité tandis que l'âge moyen net s'écrira a'. Une exception sera faite pour les taux brut R et net R_0 de reproduction pour respecter un usage ancien.

Nous étendrons certaines des conventions adoptées pour l'écriture des quotients, à l'écriture des taux qui sont des fréquences d'événements, et que nous représenterons soit par la lettre générique t soit par des écritures spécifiques, ainsi

m_x, ${}_am_x$ pour la mortalité
f_x, ${}_af_x$ pour la fécondité

Les grandeurs utilisées en démographie mathématique auront une parenté étroite avec leurs homologues du domaine discret.

Ainsi, à	S_x	correspondra	$S(x)$
»	$d(x_1 x+1)$	»	$d(x)$
»	q_x	»	$q(x)$
»	C_x	»	$C(x)$
»	$m(x_1 x+1)$	»	$m(x)$

etc...

Enfin, chaque fois que nous voudrons indiquer par un symbole une grandeur résultant directement d'observations, telle une population recensée, des décès dénombrés, et non des quantités résultant de considérations théoriques, nous utiliserons des lettres de ronde ; nous écrirons ainsi

$\mathcal{S}_x$ pour désigner les effectifs recensés à l'âge x

$\mathcal{M}(x, x+1)$ pour représenter les mariages enregistrés entre les âges x et $x+1$, etc...

Marquons enfin quelques-unes des différences qui existent entre nos notations et celles utilisées couramment dans la littérature de langue anglaise.

écriture du présent ouvrage	ouvrages en anglais	écriture du présent ouvrage	ouvrages en anglais
—	—	—	—
S_x	l_x	e_0	$\mathring{e}_0$ (parfois)
$d(x, x+a)$	${}_a d_x$	P (2)	N
V_x (1)	L_x	N (3)	B

Enfin nous écrirons $\dfrac{S_x}{S_0} = s_x$.

(1) Effectif d'âge x dans la population stationnaire.
(2) Effectif d'une population.
(3) Naissances.

PREMIÈRE PARTIE

PRÉSENTATION DES TABLES DÉMOGRAPHIQUES

1.

PHÉNOMÈNES DÉMOGRAPHIQUES DANS UNE GÉNÉRATION

La table de mortalité

C'est en constituant un groupe d'individus que l'on suit depuis la naissance jusqu'à l'extinction complète que l'on peut donner la description la plus naturelle de la mortalité.

Imaginons, par exemple, que nous ayons pu disposer des moyens permettant d'enregistrer les décès, à mesure qu'ils se sont produits, chez un groupe de 100 000 femmes nées en France en 1820. L'information statistique recueillie aurait pris la forme suivante (1) :

Décès entre 0 et 1 an :	15 270
— 1 et 2 ans :	5 253
— 2 et 3 ans :	2 941
. . . .	
— 99 et 100 ans :	14
Décès au-delà de 100 ans :	20
TOTAL :	100 000

La *table de mortalité* résulte essentiellement d'un agencement convenable de ces données.

Notons x la suite des anniversaires ; x prend les valeurs 0, 1, 2, 3, . . ., 100 (en limitant notre description à 100 ans), et les *décès* se notent $d(x, x+1)$: d, initiale de décès, x le premier des deux anniversaires que l'on considère et $x+1$ l'anniversaire suivant ; ainsi :

$$d(0, 1) = 15\,270$$
$$d(1, 2) = 5\,253$$
$$d(2, 3) = 2\,941$$
$$\dots\dots\dots$$
$$d(99, 100) = 14$$

La suite de ces décès permet de calculer de proche en proche l'effectif des personnes qui sont encore en vie à 1 an, 2 ans, 3 ans, . . ., 100 ans. On trouve :

à 1 an : 100 000 — 15 270 = 84 730 survivants
à 2 ans : 84 730 — 5 253 = 79 477 —
à 3 ans : 79 477 — 2 941 = 76 536 —
. . . .

(1) En fait, la statistique des décès a été reconstituée indirectement, d'où les précautions de style que nous prenons.

Notons S_x les *survivants* à un anniversaire x ; on a donc :

$$\begin{aligned} S_0 &= 100\ 000 \\ S_1 &= 84\ 730 \\ S_2 &= 79\ 477 \\ S_3 &= 76\ 536 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Introduisons maintenant une notion plus élaborée : le *quotient de mortalité*. On le note q_x et il est défini par la formule :

$$q_x = \frac{d(x,\ x+1)}{S_x}.$$

Ainsi :

$$q_0 = \frac{d(0,1)}{S_0} = \frac{15\ 270}{100\ 000} = 152{,}7 \text{ pour } 1\ 000$$

$$q_1 = \frac{d(1,2)}{S_1} = \frac{5\ 253}{84\ 730} = 62{,}0 \text{ pour } 1\ 000$$

$$q_2 = \frac{d(2,3)}{S_2} = \frac{2\ 941}{79\ 477} = 37{,}0 \text{ pour } 1\ 000$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit que le quotient de mortalité mesure statistiquement le risque que l'on court, à un anniversaire, de décéder avant l'anniversaire suivant.

Nous avons introduit les fonctions $d(x,\ x+1)$, S_x, q_x dans cet ordre, mais il est évident que la donnée des valeurs de l'une quelconque d'entre elles permet d'en déduire les valeurs des deux autres. Nous verrons que dans bien des cas c'est la connaissance des q_x qui permet de construire une table de mortalité ; faisant alors choix de S_0 on en déduit de proche en proche :

$$\begin{aligned} S_0 q_0 &= d(0,1) \\ S_1 &= S_0 - d(0,1) \\ S_1 q_1 &= d(1,2) \\ S_2 &= S_1 - d(1,2) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il est habituel de présenter les diverses valeurs de $d(x,\ x+1)$, S_x, q_x sous la forme du tableau 1, qui constitue *la table de mortalité de la génération féminine française 1820* (1).

Ces quantités se prêtent par ailleurs aux représentations graphiques des figures 1 *a*, 1 *b*, et 1 *c*.

La table de mortalité de la génération féminine française 1820

L'examen de cette table va nous permettre d'étudier le comportement des grandeurs figurant dans une table de mortalité, et de définir diverses autres grandeurs associées.

(1) Une *génération*, en démographie, est constituée par un ensemble de personnes nées durant une même année civile.

Tableau 1

Table de mortalité de la génération féminine française 1820

Age x	S_x	$d(x, x+1)$	q_x (p. 1 000)	Age x	S_x	$d(x, x+1)$	q_x (p. 1 000)
0	100 000	15 270	152,7	50	47 016	649	13,80
1	84 730	5 253	62,0	51	46 367	668	14,41
2	79 477	2 941	37,0	52	45 699	684	14,97
3	76 536	1 929	25,2	53	45 015	708	15,73
4	74 607	1 440	19,3	54	44 307	733	16,54
5	73 167	1 096	15,0	55	43 574	762	17,5
6	72 071	908	12,60	56	42 812	801	18,7
7	71 163	748	10,51	57	42 011	840	20,0
8	70 415	618	8,81	58	41 171	893	21,7
9	69 797	545	7,81	59	40 278	951	23,6
10	69 252	509	7,35	60	39 327	1 007	25,6
11	68 743	486	7,07	61	38 320	1 069	27,9
12	68 257	473	6,93	62	37 251	1 117	30,0
13	67 784	473	6,98	63	36 134	1 186	32,8
14	67 311	477	7,09	64	34 948	1 240	35,5
15	66 834	479	7,17	65	33 708	1 301	38,6
16	66 355	505	7,60	66	32 407	1 349	41,6
17	65 851	524	7,96	67	31 058	1 407	45,3
18	65 327	542	8,30	68	29 651	1 447	48,8
19	64 785	555	8,57	69	28 204	1 511	53,6
20	64 230	564	8,78	70	26 693	1 575	59,0
21	63 666	572	8,98	71	25 118	1 623	64,6
22	63 094	571	9,05	72	23 495	1 644	70,0
23	62 523	571	9,13	73	21 851	1 674	76,6
24	61 952	570	9,20	74	20 177	1 699	84,2
25	61 382	568	9,25	75	18 478	1 700	92,0
26	60 814	567	9,32	76	16 778	1 661	99,0
27	60 247	566	9,39	77	15 117	1 648	109
28	59 681	565	9,47	78	13 469	1 603	119
29	59 116	564	9,54	79	11 866	1 530	129
30	58 552	565	9,65	80	10 336	1 447	140
31	57 987	563	9,71	81	8 889	1 334	150
32	57 424	563	9,80	82	7 555	1 239	164
33	56 861	563	9,90	83	6 316	1 118	177
34	56 298	560	9,95	84	5 198	998	192
35	55 738	560	10,05	85	4 200	861	205
36	55 178	562	10,19	86	3 339	721	216
37	54 616	562	10,29	87	2 618	594	227
38	54 054	563	10,42	88	2 024	484	239
39	53 491	565	10,56	89	1 540	390	253
40	52 926	565	10,68	90	1 150	306	266
41	52 361	566	10,81	91	844	237	281
42	51 795	567	10,95	92	607	180	297
43	51 228	572	11,17	93	427	132	309
44	50 656	582	11,49	94	295	95	322
45	50 074	589	11,76	95	200	67	335
46	49 485	599	12,10	96	133	47	353
47	48 886	611	12,50	97	86	31	360
48	48 275	623	12,91	98	55	21	382
49	47 652	636	13,35	99	34	14	412
				100	20		

Source : Pierre Delaporte, Évolution de la mortalité en Europe depuis les origines de l'état civil. Statistique générale de la France, *Etudes démographiques*, n° 2. La table de mortalité initiale a été établie à partir d'une évaluation des quotients q_x ; la table que nous donnons ici découle des chiffres de survivants de la table initiale divisés par 10 ; il en résulte que les q_x que nous trouvons diffèrent parfois légèrement de ceux de la table de Delaporte qui, assez souvent, n'ont que trois chiffres significatifs : nous avons respecté le même degré de précision dans nos calculs.

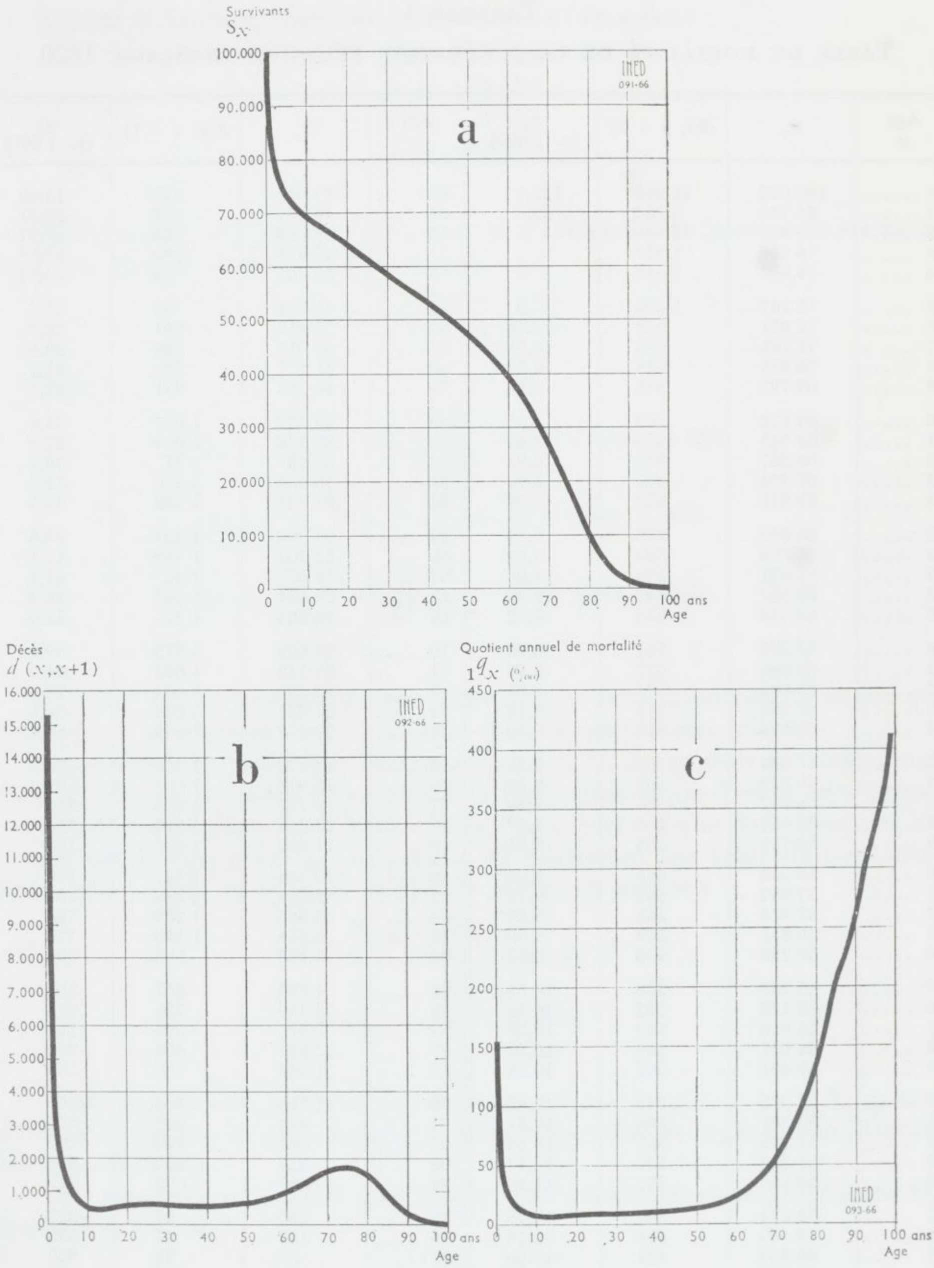

FIG. 1. — Table de mortalité de la génération féminine française 1820

La fonction q_x rend compte des variations avec l'âge du risque annuel de mortalité : ce risque passe par un minimum à 12 ans et retrouve vers 80 ans la valeur qu'il avait à la naissance, tandis que l'individu qui atteint 100 ans a environ une chance sur deux de décéder dans l'année.

Naturellement, le profil de la courbe de q_x varie sensiblement selon les générations considérées (variations dans le temps et dans l'espace), mais jusqu'à présent certaines caractéristiques demeurent, ainsi l'existence d'un minimum vers 12 ans. Notons encore qu'il n'est pas possible de fixer un âge où $q_x = 1$, c'est-à-dire d'assigner une limite précise à la durée de la vie humaine ; des études ont montré que 120 ans est un âge qui semble n'avoir jamais été dépassé.

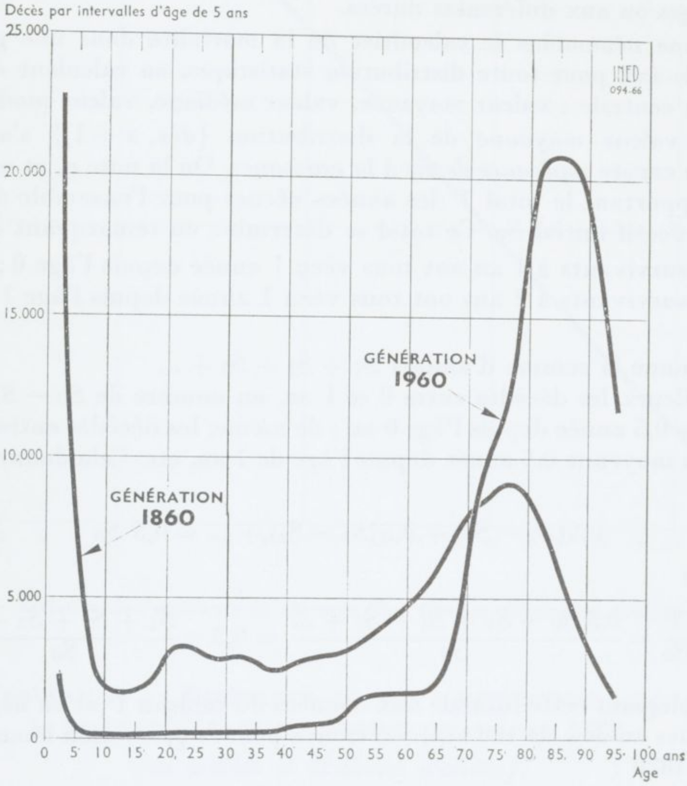

FIG. 1 *bis*. — Distribution des décès, selon l'âge, dans des générations féminines (Population blanche des États-Unis ; pour 100 000 nouveau-nés)

Source : Paul H. JACOBSON, *Cohort Survival for Generations since 1840*.

La fonction $d(x, x+1)$ donne la distribution, selon l'âge, des événements (en l'occurrence les décès) du phénomène étudié (ici la mortalité) ; cette distribution représente le *calendrier* du phénomène, notion capitale que nous retrouverons dans l'étude de tous les phénomènes démographiques. Notons que le comportement des individus et de la société vise à modifier le calendrier de la mortalité toujours dans le même sens (ce qui n'est pas le cas pour les autres phénomènes démographiques), celui d'un allongement de la durée de vie ; la figure 1 *bis* illustre bien à quelles modifications probables on parviendra en l'espace d'un siècle aux États-Unis (l'histoire de la génération 1960 est naturellement fondée sur des extrapolations).

Cette action constante de l'homme sur la mortalité, jointe au fait que le phénomène étudié s'étale sur une centaine d'années, explique que l'attention de l'analyste se porte plus sur l'évolution des quotients de mortalité (dont les variations permettent de suivre attentivement les résultats de la lutte permanente contre la mortalité) que sur celle de la distribution des $d(x, x+1)$ qui rend compte des effets globaux de cette lutte. Il n'en va pas de même pour les autres phénomènes aux variations de calendrier beaucoup plus capricieuses et beaucoup moins étalés dans le temps, pour lesquels les jugements se fondent davantage sur l'examen direct du nombre des événements, de leur répartition dans le temps, que sur l'examen des « risques » (mesurés par des quotients appropriés) aux différents âges ou aux différentes durées.

On résume néanmoins le calendrier de la mortalité dans une génération, comme on le fait pour toute distribution statistique, en calculant des indices de tendance centrale : valeur moyenne, valeur médiane, valeur modale.

— La valeur moyenne de la distribution $\{d(x, x+1)\}$ s'appelle *vie moyenne* ou encore *espérance de vie à la naissance*. On la note e_0 et on la détermine en rapportant le total T des années vécues pour l'ensemble de la génération à l'effectif initial S_0. Ce total se détermine en remarquant que

les S_1 survivants à 1 an ont tous vécu 1 année depuis l'âge 0 ;
les S_2 survivants à 2 ans ont tous vécu 1 année depuis l'âge 1 ;
etc.

Cela donne la somme d'années $S_1 + S_2 + S_3 + ...$

Par ailleurs, les décédés entre 0 et 1 an, au nombre de $S_0 - S_1$ ont vécu en moyenne 0,5 année depuis l'âge 0 an ; de même, les décédés entre 1 et 2 ans ont vécu en moyenne 0,5 année depuis l'âge de 1 an, etc. Cela donne la somme d'années

$$0{,}5(S_0 - S_1) + 0{,}5(S_1 - S_x) + ... = 0{,}5\ S_0$$

Finalement

$$e_0 = \frac{T}{S_0} = \frac{0{,}5\ S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + ...}{S_0} = 0{,}5 + \frac{S_1 + S_2 + S_3 + ...}{S_0}$$

En appliquant cette formule aux données du tableau 1 (et en négligeant les années vécues au-delà de 100 ans), on trouve pour la génération féminine née en France en 1820 :

$$e_0 = 0{,}5 + \frac{4\ 050\ 870}{100\ 000} = 41{,}01 \text{ ans.}$$

La définition précédente est susceptible d'une extension toute naturelle, l'*espérance de vie à l'âge x*, e_x, qui se calcule comme le nombre moyen des années restant à vivre aux personnes ayant atteint l'âge x. On établit sans peine que :

$$e_x = 0{,}5 + \frac{S_{x+1} + S_{x+2} + \cdots}{S_x}.$$

Avec les données du tableau 1 on obtient, par exemple, les résultats du tableau 2 (voir aussi la figure 2).

On apporte parfois un raffinement dans le calcul de e_0 en introduisant la durée de vie moyenne k des personnes décédées avant 1 an, et qui est notablement inférieure à 0,5. Ainsi au décompte $0{,}5\,(S_0 - S_1)$ on substitue $k(S_0 - S_1)$, et il en résulte la formule

$$e_0 = k + \frac{(1{,}5 - k)\,S_1 + S_2 + ...}{S_0}$$

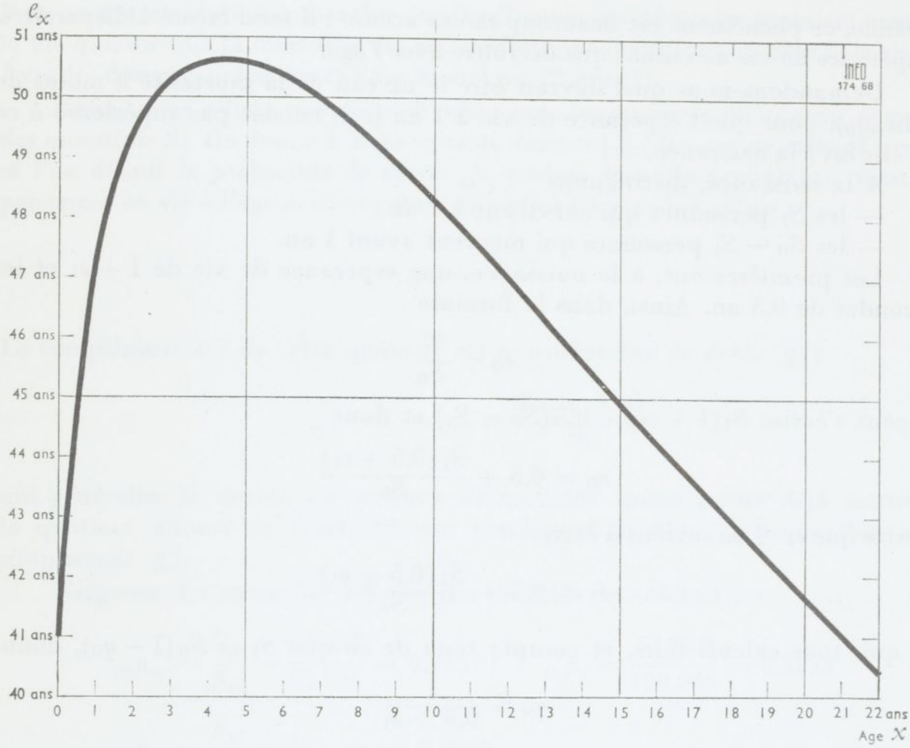

Fig. 2. — Variation de l'espérance de vie avec l'âge (France. Génération féminine 1820)

Tableau 2. — Espérance de vie a différents ages dans la génération féminine française 1820
(en années et dixièmes d'année)

Age x	e_x	Age x	e_x	Age x	e_x	Age x	e_x
0	41,01	7	49,95	14	45,63	30	35,22
1	47,31	8	49,48	15	44,95		
2	49,40	9	48,91	16	44,27	40	28,44
3	50,28	10	48,29	17	43,61		
4	50,57	11	47,65	18	42,95	60	14,50
5	50,55	12	46,98	19	42,31		
6	50,32	13	46,31	20	41,67	80	4,90

On constate que l'espérance de vie croît jusqu'à 5 ans et qu'elle reste supérieure à ce qu'elle était à la naissance jusqu'à 20 ans (et même jusqu'à 22 ans : 41,03 ans) ; ainsi, dans la génération considérée, une femme de 20 ans a devant elle une espérance de vie supérieure à celle du nouveau-né, ce qui traduit les effets de la forte mortalité durant les premières années de la vie, au début du siècle dernier.

Dans les générations récentes, avec la baisse de la mortalité infantile et juvénile, ce phénomène est beaucoup moins accusé ; il tend même à disparaître, l'espérance de vie ne faisant que décroître avec l'âge.

Demandons-nous quel devrait être le niveau de la mortalité à moins de 1 an (q_0), pour que l'espérance de vie à 1 an (e_1), ne soit pas supérieure à ce qu'elle est à la naissance.

A la naissance, distinguons

— les S_1 personnes qui survivent à 1 an ;

— les $S_0 - S_1$ personnes qui meurent avant 1 an.

Les premières ont, à la naissance, une espérance de vie de $1 + e_1$ et les secondes de 0,5 an. Ainsi, dans la formule

$$e_0 = \frac{T}{S_0}$$

T peut s'écrire $S_1(1 + e_1) + 0{,}5(S_0 - S_1)$ et donc

$$e_0 = 0{,}5 + \frac{S_1(0{,}5 + e_1)}{S_0}$$

Écrire que $e_1 \leqslant e_0$ revient à écrire

$$e_1 \leqslant 0{,}5 + \frac{S_1(0{,}5 + e_1)}{S_0}$$

ce qui, tous calculs faits, et compte tenu de ce que $S_1 = S_0(1 - q_0)$, donne

$$q_0 \leqslant \frac{1}{0{,}5 + e_1}$$

Ainsi, dans la génération féminine française 1820, où $e_1 = 47{,}31$ ans il faudrait que l'on ait

$$q_0 \leqslant \frac{1}{47{,}81} = 20{,}9\ ‰$$

pour que $e_1 \leqslant e_0$.

Par contre, avec la table féminine française 1973-77 (il s'agit d'une *table du moment*, notion que nous présenterons plus loin), $e_1 = 76{,}91$ ans ; il en découle comme condition sur q_0

$$q_0 \leqslant \frac{1}{77{,}41} = 12{,}9\ ‰$$

Or, dans cette table $q_0 = 11{,}68\ ‰$ et l'on vérifie bien, en lisant la table, que,

$$e_1 = 76{,}91 < e_0 = 77{,}0 \text{ ans.}$$

— La valeur médiane porte, dans le cas présent, le nom de *vie médiane* ou de *vie probable*. C'est sur la série des S_x qu'on la détermine le plus commodément, par interpolation entre les valeurs encadrant $S_0/2$. Avec les données précédentes, la vie médiane se situe entre 45 ans ($S_{45} = 50\,074$) et 46 ans ($S_{46} = 49\,485$) ; en répartissant uniformément dans l'année les 589 (50 074 — 49 485) décès qui se sont produits entre 45 et 46 ans, on trouve comme vie médiane :

$$45 + \frac{74}{589} = 45{,}13 \text{ ans.}$$

— La valeur modale s'appelle *âge modal au décès* (parfois, *âge normal*).

Pour sa détermination, on exclut éventuellement les décès des premiers âges de la vie qui, lorsque la mortalité est encore forte, peuvent être les plus nombreux. Avec les données précédentes l'âge modal est 75 ans (1).

Enfin, nous allons présenter diverses grandeurs qui se définissent à partir des quantités S_x. On donne à cette suite de valeurs $\{S_x\}$ le nom de *table de survie*, et l'on définit la *probabilité de survie* ${}_ap_x$ comme étant la probabilité, pour les personnes en vie à l'âge x, d'être encore en vie à l'âge $x + a$; ainsi :

$${}_ap_x = \frac{S_{x+a}}{S_x}.$$

Le complément à 1 de cette quantité est la probabilité de décès ${}_aq_x$:

$${}_aq_x = 1 - {}_ap_x = \frac{d(x, x+a)}{S_x}$$

qui généralise la notion de *quotient de mortalité* (nous avons déjà introduit le quotient *annuel* de mortalité qui correspond à $a = 1$, et que l'on note simplement q_x).

Forgeons des exemples à l'aide des données du tableau 1 :

$${}_{20}p_{40} = \frac{S_{60}}{S_{40}} = \frac{39\,327}{52\,926} = 0{,}7431 \,; \qquad {}_{40}p_0 = \frac{52\,926}{100\,000} = 0{,}5293$$

$${}_1p_{40} = \frac{S_{41}}{S_{40}} = 1 - q_{40} = 0{,}9893.$$

Remarquons enfin que la vie médiane M, introduite précédemment, est définie par l'égalité :

$${}_Mp_0 = 0{,}5.$$

On est à même de substituer aux grandeurs S_x, $d(x, x+1)$, q_x des fonctions ponctuelles $S(x)$, $d(x)$, $q(x)$ définies pour la suite continue des valeurs de x.

$S(x)$, *fonction survie*, se conçoit comme une fonction qui s'identifie à S_x pour les valeurs de x qui sont généralement des anniversaires, et qui prend ses valeurs, pour les autres x par interpolation (fig. 3).

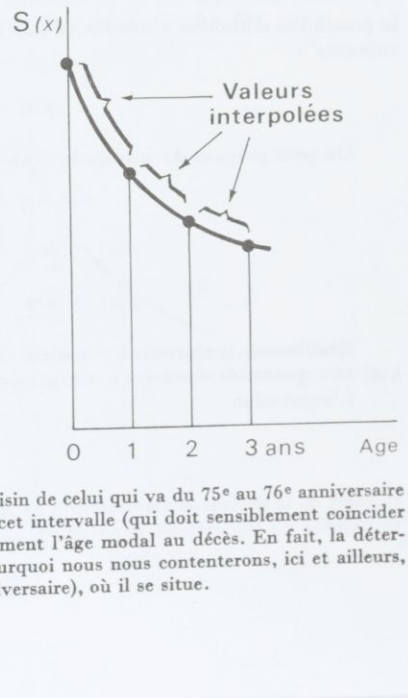

FIG. 3

(1) Très précisément, c'est dans un intervalle annuel voisin de celui qui va du 75e au 76e anniversaire que les décès sont les plus nombreux, et c'est au centre de cet intervalle (qui doit sensiblement coïncider avecl e sommet de la courbe des décès) que se situe exactement l'âge modal au décès. En fait, la détermination précise de l'âge modal est assez illusoire. C'est pourquoi nous nous contenterons, ici et ailleurs, de nommer l'âge en années révolues (ou âge au dernier anniversaire), où il se situe.

$d(x)$ devra avoir la même dimension que $d(x, x+1)$, c'est-à-dire celle de décès sur un intervalle d'un an. Il est évident qu'une simple comptabilité des décès sur des intervalles de plus en plus petits et tendant vers zéro en se rapprochant de x (fig. 4), ne mène à rien, si ce n'est à la

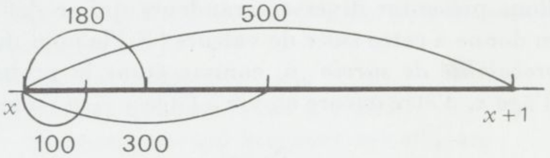

Fig. 4

valeur zéro... Mais il en va différemment si, chaque fois, on ramène le nombre de décès relevé à ce qu'il serait si l'observation avait porté sur un an ; cela revient à déterminer la suite de rapports

$$\frac{500}{1}, \frac{300}{0{,}5}, \frac{180}{0{,}25}, \frac{100}{0{,}125} \dots$$

dans lesquels les décès 500, 300, 180, 100,... sont divisés par les intervalles de temps, 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125,... exprimés en fractions d'année. On est ainsi en présence de la suite

500, 600, 720, 800, ... décès

et, en notations littérales, on arrive à la définition suivante de la *fonction décès*

$$d(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{d(x, x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{A}$$

$q(x)$, *fonction quotient* dérivera de q_x de la même façon que $d(x)$ dérivait de $d(x, x+1)$. Si à l'âge x de la figure 4 il y a 10 000 survivants, là encore calculer la suite de rapports

$$\frac{500}{10\,000}, \frac{300}{10\,000}, \frac{180}{10\,000}, \frac{100}{10\,000} \dots$$

ne peut conduire qu'à la limite zéro. En faisant intervenir ici également la durée sur laquelle le risque est mesuré, pour aboutir à un risque de dimension annuelle, on confère à la suite trouvée

$$\frac{500}{10\,000}, \frac{300}{10\,000 \times 0{,}5}, \frac{180}{10\,000 \times 0{,}25}, \frac{100}{10\,000 \times 0{,}125}, \dots$$

la possibilité d'aboutir à une limite non nulle et, en notations littérales, on arrive à la définition suivante :

$$q(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{d(x, x + \Delta x)}{S(x) \Delta x} \tag{B}$$

On peut préciser davantage le contenu des formules (A) et (B). Comme

$$d(x, x + \Delta x) = S(x) - S(x + \Delta x)$$

$$d(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x) - S(x + \Delta x)}{\Delta x} = -S'(x) \tag{A'}$$

$$q(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x) - S(x + \Delta x)}{S(x) \Delta x} = -\frac{S'(x)}{S(x)} \tag{B'}$$

Établissons maintenant comment lier $S(x)$ et $q(x)$ et comment passer des fonctions $d(x)$, $q(x)$ aux quantités discrètes correspondantes $d(x, x+1)$, q_x.

L'expression

$$\frac{S'(x)}{S(x)}$$

rapport de la dérivée d'une fonction à cette fonction doit retenir notre attention. Elle représente la dérivée du logarithme népérien de cette fonction, c'est-à-dire que

$$[\ln S(x)]' = \frac{S'(x)}{S(x)}$$

et par conséquent

$$\int \frac{S'(x)}{S(x)}\,\mathrm{d}x = \ln S(x)$$

En utilisant cette dernière formule pour transformer (B′) on a, comme

$$q(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)},$$

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = -\ln S(x) + \text{constante}.$$

Comme l'opération contraire à la prise d'un logarithme est l'exponentiation, en écrivant

$$\ln S(x) = -\int q(x)\,\mathrm{d}x + \text{constante}$$

il vient

$$S(x) = e^{-\int q(x)\,\mathrm{d}x} \times \text{constante}$$

soit, en intégrale définie

$$S(x) = S(0)e^{-\int_0^x q(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \qquad \text{(C)}$$

En écrivant

$$S(x+1) = S(0)e^{-\int_0^{x+1} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \qquad \text{(C}_1\text{)}$$

et en divisant membre à membre (C_1) par (C) en tenant compte de ce que

$$S(x+1) = S(x)(1 - q_x)$$

il vient

$$1 - q_x = e^{-\int_x^{x+1} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

c'est-à-dire

$$q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

Quant à la relation

$$d(x, x+1) = \int_x^{x+1} d(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

elle est évidente.

La totalisation des années vécues, qui entre dans le calcul de la vie moyenne, résulte du passage à la limite de la sommation des quantités élémentaires suivantes (fig. 5).

$$S(\xi_{i+1}) \times (\xi_{i+1} - \xi_i) + [S(\xi_i) - S(\xi_{i+1})]\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2}$$

lorsque les intervalles $\xi_{i+1} - \xi_i$ tendent vers zéro. Il en résulte la formule

$$e(0) = \frac{1}{S(0)} \int_0^{\omega} S(x)\,\mathrm{d}x$$

ω étant l'âge extrême de la vie humaine (on peut indifféremment noter ω ou ∞) ; et, à l'âge x on a

$$e(x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^{\omega} S(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Imaginons le cas, théorique, où $q(x)$ est indépendant de l'âge x donc

$$q(x) = q$$

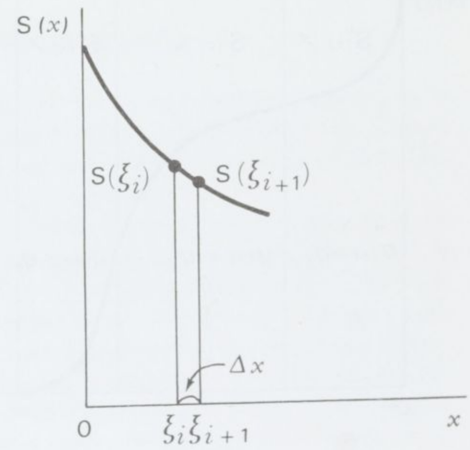

Fig. 5

alors

$$S(x) = S(0)e^{-\int_0^x q d\xi} = S(0)e^{-qx}$$

et

$$e(x) = \frac{S(0)}{S(x)} \int_x^\infty e^{-q\xi} d\xi = \frac{S(0)}{S(x)} \left[-\frac{1}{q} e^{-q\xi} \right]_x^\infty = \frac{S(0)e^{-qx}}{S(x)q} = \frac{1}{q};$$

l'espérance de vie $e(x)$ a alors une valeur constante.

Précisons davantage les rapports et les différences existant entre un quotient fini q_x et la fonction quotient $q(x)$.

$q(x)$, que l'on dénomme encore *quotient instantané de mortalité* ou *taux instantané de mortalité* (la notion de quotient et celle de taux, que nous présentons plus loin, se confondent en continu), est tantôt inférieur, tantôt supérieur au quotient fini q_x. En effet,

$$q_x = \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}, \quad \text{mais } S(x+1) - S(x) = S'(x+\theta), \ 0 < \theta < 1$$

donc

$$q_x = -\frac{S'(x+\theta)}{S(x)} \quad \text{alors que } q(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$

Comparer $q(x)$ à q_x revient donc à comparer $S'(x)$ à $S'(x+\theta)$

$$q(x) > q_x \quad \text{si } S'(x) < S'(x+\theta), \quad \text{donc si } S'(x) \text{ est croissante}$$
$$q(x) < q_x \quad \text{si } S'(x) > S'(x+\theta), \quad \text{donc si } S'(x) \text{ est décroissante}$$

Et ce sont les abscisses aux points d'inflexion de la courbe de survie qui délimitent les zones d'âges où ces différentes inégalités ont lieu (fig. 6).

A la différence de q_x qui ne saurait varier que dans l'intervalle (0,1) la fonction quotient $q(x)$ peut varier dans l'intervalle $(0, \infty)$. Vérifions ceci sur l'exemple suivant : calculons la valeur d'un quotient instantané constant qui aurait, sur un intervalle $(x, x+1)$ les mêmes effets qu'un quotient fini q_x. Alors

$$q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} q d\xi} = 1 - e^{-q}$$

donc

$$q = \ln \frac{1}{1 - q_x}.$$

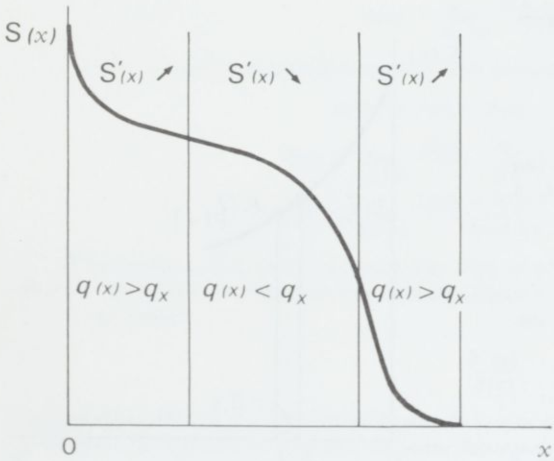

FIG. 6

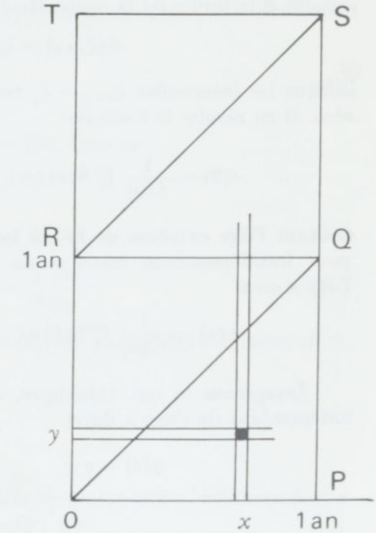

FIG. 7

On aura $q > 1$ dès lors que $\frac{1}{1-q_x} > e$ dont le logarithme népérien vaut l'unité, c'est-à-dire dès que $q_x > 1 - \frac{1}{e} = 0{,}632$, et $\frac{1}{1-q_x}$ tendant vers l'infini quand q_x tend vers 1, il en va de même de son logarithme, donc de q.

Terminons par un résultat intéressant, qui prendra sa pleine valeur ultérieurement (cf. p. 115). Considérons les décès répartis dans les différentes surfaces du couloir vertical du diagramme de Lexis (fig. 7) ; ainsi, dans le carré élémentaire centré sur le point de coordonnées (x, y), il y aura

$$d(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ décès}$$

et pour toute la surface OPQ ces décès seront au nombre de

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x d(y)\mathrm{d}y.$$

Mais comme $d(y) = -S'(y)$, l'intégrale ci-dessus se transforme comme suit :

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x - S'(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x[S(y)]_x^0 = \int_0^1[S(0) - S(x)]\mathrm{d}x = S(0) - \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ce qui est dire que les décès dans le triangle de Lexis OPQ sont égaux à la surface (A) de la figure 8. On obtient ceux du triangle O Q R de Lexis par la différence

$$S(0) - S(1) - \left[S(0) - \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x\right] = \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - S(1)$$

ce qui représente la surface (B) de la figure 8.

Ce raisonnement a une portée générale et permet de conclure, par exemple, à l'égalité entre les nombres de décès dans les surfaces de Lexis QSR et RST et les surfaces respectives (C) et (D).

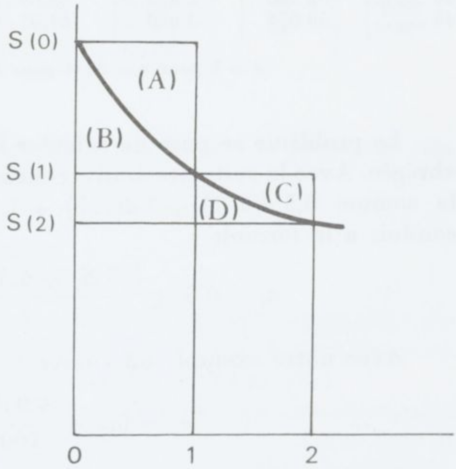

FIG. 8

Autres formes de tables de mortalité

La table de mortalité qui a fait l'objet de nos commentaires représente la forme la plus classique, celle où la description de la mortalité se fait pour la suite des anniversaires. Pour différentes raisons, on est amené à construire des tables de mortalité correspondant à des suites d'âges différentes.

Dans le tableau 3 nous donnons une *table de mortalité abrégée* déduite de la table du tableau 1 : seuls sont considérés les anniversaires multiples de 5 (et le 1er anniversaire) ; il s'agit de la contraction d'une *table complète*. En pareil cas on donne habituellement les quotients annuels q_x relatifs aux anniversaires retenus (0, 1, 5, 10, ...) et non, comme nous l'avons fait, les quotients correspondants aux intervalles d'âges de la table : l'information qui est donnée est en effet plus riche dans le premier cas que dans le second. Mais une table abrégée peut ne pas résulter de la contraction d'une table complète préexistante, et se présenter comme l'aboutissement de calculs approchés, auquel cas on ne peut généralement pas proposer des valeurs pour les quotients annuels aux anniversaires retenus.

TABLEAU 3

TABLE DE MORTALITÉ ABRÉGÉE (GÉNÉRATION FÉMININE FRANÇAISE 1820)

Age x	S_x	$d(x, x+a)$	$_aq_x$ (p. 1 000)	Age x	S_x	$d(x, x+a)$	$_aq_x$ (p. 1 000)
0	100 000	15 270	152,70	50	47 016	3 442	73,21
1	84 730	11 563	136,47	55	43 574	4 247	97,47
5	73 167	3 915	53,51	60	39 327	5 619	142,9
10	69 252	2 418	34,92	65	33 708	7 015	208,1
15	66 834	2 604	38,96	70	26 693	8 215	307,8
20	64 230	2 848	44,34	75	18 478	8 142	440,6
25	61 382	2 830	46,10	80	10 336	6 136	593,7
30	58 552	2 814	48,06	85	4 200	3 050	726
35	55 738	2 812	50,45	90	1 150	950	826
40	52 926	2 852	53,89	95	200	180	900
45	50 074	3 058	61,07	100	20		

$a = 1$ pour $x = 0$; 4 pour $x = 1$; 5 pour $x = 5, 10, 15\ldots$

Le problème se pose de calculer les *espérances de vie* à partir d'une table abrégée. Avec la suite des anniversaires du tableau 3 on est amené à transformer la somme $0{,}5\, d(0, 1) + 3\, d(1, 5) + 7{,}5\, d(5, 10) + 12{,}5\, d(10, 15) + \ldots$ ce qui conduit à la formule :

$$e_0 = 0{,}5 + \frac{2{,}5\, S_1 + 4{,}5\, S_5 + 5(S_{10} + S_{15} + \ldots)}{S_0}.$$

Avec notre exemple on trouve :

$$e_0 = 0{,}5 + \frac{4\,059\,526}{100\,000} = 41{,}10 \text{ ans}$$

contre 41,01 ans avec les données de la table complète : l'approximation est donc bonne (écart de 2 ‰).

— Une étude précise de la mortalité avant 1 an conduit à bâtir des tables spéciales pour la 1re année (tables qui peuvent naturellement se raccorder au restant d'une table complète habituelle) ; dans ces tables, le temps est divisé en mois (1/12 d'année), en semaines (pour le premier mois de vie), voire en jours (pour la première semaine de vie). Le tableau 4 donne l'exemple d'une telle table ; les quantités notées *a* qui y figurent correspondent aux divisions du temps de la 1re colonne, ce qui élargit encore la notion de quotient de mortalité appliquée ici à des intervalles inférieurs à l'année.

D'un point de vue différent, précisons encore que les tables de mortalité sont couramment présentées, dans la littérature démographique (spécialement la littérature anglo-saxonne), en ajoutant aux séries $\{S_x\}$, $\{d(x, x+1)\}$, $\{q_x\}$, celles

— des effectifs de la *population stationnaire* V_x (cf. p. 243) aux âges révolus x ;

— des nombres totaux d'années vécues au-delà de l'âge x, T_x, par les survivants S_x à cet âge ;

— des espérances de vie aux âges x, $e_x = \dfrac{T_x}{S_x}$.

TABLEAU 4. — TABLE DE MORTALITÉ DES ENFANTS DE MOINS DE 1 AN (SEXES RÉUNIS) (GÉNÉRATIONS FRANÇAISES 1952-1956)

Age x	S_x	$d\,(x, x+a)$	$_aq_x$ (p. 1 000)	Age x	S_x	$d\,(x, x+a)$	$_aq_x$ (p. 1 000)
0 jour.	100 000	530	5,30	2 mois	97 917	273	2,79
1 — .	99 470	278	2,79	3 —	97 644	226	2,31
2 jours	99 192	164	1,65	4 —	97 418	194	1,99
3 —	99 028	98	0,99	5 —	97 224	168	1,73
4 —	98 930	71	0,72	6 —	97 056	148	1,52
5 —	98 859	57	0,58	7 —	96 908	132	1,36
6 —	98 802	47	0,48	8 —	96 776	118	1,22
7 —	98 755	208	2,11	9 —	96 658	103	1,07
14 —	98 547	142	1,44	10 —	96 555	93	0,96
21 —	98 405	99	1,01	11 —	96 462	82	0,85
28 —	98 306	35	0,36	12 —	96 380		
1 mois	98 271	354	3,60				

Les mois sont exprimés en 1/12 d'année.

Source : Table de mortalité de la population française pour la période 1952-1956, *Études statistiques*, n° 1, janvier-mars 1959.

La nuptialité

L'étude de la nuptialité englobe celle des premiers mariages (nuptialité des célibataires) et celle des remariages (nuptialité des veufs, des veuves, des divorcés). Pour le moment, nous n'étudierons que la nuptialité des célibataires.

Nous avons introduit la table de mortalité en comptant, dans une génération, les décès qui se produisent entre les anniversaires successifs. Cette fois, le comptage des nouveaux mariages entre anniversaires successifs ne fournit pas à lui seul une description satisfaisante de la nuptialité. En effet, les premiers mariages entre deux anniversaires, disons entre 30 et 31 ans, dépendent, toutes choses égales d'ailleurs, du nombre de personnes atteignant le premier des deux anniversaires (30 ans) en état de célibat, nombre qui dépend en partie de l'intensité de la mortalité avant cet âge ; de plus, entre 30 et 31 ans par exemple, certains mariages sont empêchés du fait de la mortalité entre ces deux âges.

En conclusion, on ne peut pas décrire aussi facilement la nuptialité que la mortalité, en raison des interférences qui se produisent entre ces deux phénomènes (1), interférences que nous aurons l'occasion de préciser avec soin.

(1) Notons que la situation n'est pas symétrique, car si la mortalité peut empêcher des mariages de célibataires de se produire, le mariage des célibataires ne saurait leur éviter de décéder... ; elle le devient si les phénomènes étudiés sont la nuptialité des célibataires et la mortalité des célibataires. Nous reviendrons sur ce point.

La table de nuptialité

Les remarques précédentes nous conduiront, pour décrire la nuptialité dans une génération, à compter les premiers mariages non pas dans un groupe de 10 000 femmes de 15 ans (âge minimal légal au mariage), mais, *rétrospectivement*, dans un groupe de 10 000 femmes atteignant un âge suffisamment élevé pour que les mariages de célibataires conclus au-delà puissent être tenus pour négligeables, par exemple 50 ans (1).

Interrogeant ainsi vers 1955, en France, 10 000 femmes de 50 ans (2) sur le fait qu'elles ont conclu ou non un premier mariage, et sur leur âge lors de ce premier mariage, on aurait pu obtenir les résultats suivants :

1 012 femmes n'étaient pas encore mariées à 50 ans,
8 988 femmes avaient conclu au moins un premier mariage.

Par ailleurs, ces 8 988 premiers mariages se répartissaient de la façon suivante :

57 entre 15 et 16 ans
176 — 16 - 17 -
396 — 17 - 18 -
. . . .
9 — 49 - 50 -

La table de nuptialité résulte d'un agencement de ces données, qui rappelle celui auquel on a procédé en ce qui concerne la mortalité.

Notant encore x la suite des anniversaires, les *mariages* se notent, avec un symbolisme évident, $m(x, x+1)$; on a donc :

$$m(15, 16) = 57$$
$$m(16, 17) = 176$$
$$m(17, 18) = 396$$
$$\cdots\cdots$$
$$m(49, 50) = 9$$

La suite de ces mariages permet de calculer, de proche en proche, l'effectif des personnes qui sont encore célibataires à 16 ans, 17 ans, 18 ans, ..., 50 ans. On trouve :

à 16 ans : 10 000 — 57 = 9 943 célibataires
à 17 - : 9 943 — 176 = 9 767 —
à 18 - : 9 767 — 396 = 9 371 —
. . . .

Notons C_x les *célibataires* à un anniversaire x ; nous avons là une fonction équivalente aux survivants S_x de la table de mortalité ; on a donc :

$$C_{15} = 10\ 000$$

(1) Le moment venu, nous ferons quelques réserves sur la valeur des descriptions fondées sur des observations rétrospectives.

(2) Nous restons volontairement vague sur le groupe étudié, les données que nous utilisons étant plus indicatives que représentatives d'une situation précise.

$$\begin{aligned} C_{16} &= 9\,943 \\ C_{17} &= 9\,767 \\ C_{18} &= 9\,371 \\ &\ldots\ldots \\ C_{50} &= 1\,012 \end{aligned}$$

Enfin, on définit le *quotient de nuptialité* n_x par la formule :

$$n_x = \frac{m(x, x+1)}{C_x}$$

qui rappelle celle définissant le quotient de mortalité. Ainsi :

$$n_{15} = \frac{m(15, 16)}{C_{15}} = \frac{57}{10\,000} = 5{,}7 \text{ pour } 1\,000$$

$$n_{16} = \frac{m(16, 17)}{C_{16}} = \frac{176}{9\,943} = 17{,}7 \text{ pour } 1\,000$$

$$n_{17} = \frac{m(17, 18)}{C_{17}} = \frac{396}{9\,767} = 40{,}5 \text{ pour } 1\,000$$

. . . .

On voit que le quotient de nuptialité mesure statistiquement le risque que l'on court, étant célibataire à un anniversaire, de se marier avant l'anniversaire suivant *en l'absence de mortalité*.

Comme lors de la description de la mortalité, on voit aisément que la donnée de l'une quelconque des fonctions $m(x, x+1)$, C_x, n_x, permet d'en déduire les deux autres. En particulier, si l'on connaît les n_x, en faisant choix de C_{15}, on en déduit, de proche en proche :

$$\begin{aligned} C_{15}\, n_{15} &= m(15, 16) \\ C_{16} &= C_{15} - m(15, 16) \\ C_{16}\, n_{16} &= m(16, 17) \\ C_{17} &= C_{16} - m(16, 17) \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il est habituel de présenter les diverses valeurs de $m(x, x+1)$, C_x, n_x sous la forme du tableau 5, qui constitue la *table de nuptialité des célibataires des générations féminines françaises nées peu après 1900.*

Ces quantités se prêtent par ailleurs aux représentations graphiques des figures **9 *a*, 9 *b*, 9 *c*.**

Les quantités C_x, $m(x, x+1)$, n_x donnent lieu, tout comme leurs homologues dans la table de mortalité, à des prolongements en continu. On aura ainsi comme *fonction mariage* et *quotient instantané de nuptialité*,

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x, x+\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{et} \quad n(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x, x+\Delta x)}{C(x)\Delta x} = \frac{m(x)}{C(x)}.$$

α étant l'âge minimal au mariage,

$$C(x) = C(\alpha)\, e^{-\int_\alpha^x n(\xi)\, d\xi}.$$

ACHEVÉ D'IMPRIMER
LE 5 AVRIL 1983
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE
N° 7933

Participant d'une démarche de transmission de fictions ou de savoirs rendus difficiles d'accès par le temps, cette édition numérique redonne vie à une œuvre existant jusqu'alors uniquement sur un support imprimé, conformément à la loi n° 2012-287 du 1er mars 2012 relative à l'exploitation des Livres Indisponibles du XXe siècle.

Cette édition numérique a été réalisée à partir d'un support physique parfois ancien conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal. Elle peut donc reproduire, au-delà du texte lui-même, des éléments propres à l'exemplaire qui a servi à la numérisation.

Cette édition numérique a été fabriquée par la société FeniXX au format PDF.

La couverture reproduit celle du livre original conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal.

*

La société FeniXX diffuse cette édition numérique en accord avec l'éditeur du livre original, qui dispose d'une licence exclusive confiée par la Sofia – Société Française des Intérêts des Auteurs de l'Écrit – dans le cadre de la loi n° 2012-287 du 1er mars 2012.