

S
29/162
(14)

ES SCIENTIFIQUES ET AGRONOMIQUES

14

la programmation linéaire dans les modèles de production

J.-M. BOUSSARD
J.-J. DAUDIN

AM MASSON 

51

la programmation linéaire dans les modèles de production

8°5
29162
(14)

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

PROGRAMMATION LINÉAIRE SUR MICRO-ORDINATEURS, par B. LEMAIRE et C. LEMAIRE-MISONNE. *Méthodes + Programmes*, 1988, 280 pages.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES. Probabilité, initiation à la recherche opérationnelle, par C. GOUJET et C. NICOLAS, 3^e édition révisée, 2^e tirage, 1988, 272 pages.

GUIDE DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, par A. ALJ et P. FAURE, avec la collaboration de C. BRAHIMI et P. LIGNELET

Tome 1 : Les fondements, 1986, 270 pages.

Tome 2 : Les applications, à paraître.

EXERCICES ET PROBLÈMES RÉSOLUS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, par le groupe ROSEAUX

Tome 1 : Graphes, leurs usages, leurs algorithmes, 2^e tirage révisé, 1986, 328 pages.

Tome 2 : Phénomènes aléatoires en recherche opérationnelle, 2^e édition révisée et augmentée, 1987, 248 pages.

Tome 3 : Programmation linéaire et extensions. Problèmes classiques, 1985, 400 pages.

LA PROGRAMMATION DES JEUX, par E. SOLOMON, traduit de l'anglais par D. RAVEZ avec la collaboration de M. CARPENTIER et R.-P. BALME, à paraître.

SYSTÈMES FLEXIBLES DE PRODUCTION. Conception préliminaire, par J.M. PROTH et H. QUENTIN DE GROMARD. *Méthode + Programmes*, 1986, 320 pages.

ORDONNANCEMENT EN TEMPS RÉEL, par J.-P. POUGET. *A.B.C. des langages*, 1984, 88 pages.

ANALYSE DES DONNÉES QUALITATIVES

Tome 1 : Traitement d'enquêtes, échantillon. Répartitions, associations, par J. HERMAN. *Méthodes + Programmes*, 1986, 192 pages.

51

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET AGRONOMIQUES DE L'INRA
INSTITUT NATIONAL DE LA RECHERCHE AGRONOMIQUE

14

61 9984

la programmation linéaire dans les modèles de production

Jean-Marc BOUSSARD

*Directeur de Recherches
à l'INRA - PARIS*

Jean-Jacques DAUDIN

*Maître-Assistant au Département
de Mathématiques et Informatique
de l'INA - P-G*

MASSON

Paris Milan Barcelone Mexico

1988

Remerciements

Les auteurs se doivent d'exprimer leur gratitude à J.P. VILA qui a plusieurs fois relu ce manuscrit avec une patience sans limite, et dont la bienveillance pour le projet n'empêchait pas une critique rigoureuse sur la forme. Ils ont aussi bénéficié des avis de P. JULLIAN et de S. JABROLOWSKI, du soutien de R. TOMASSONE. Enfin, ils doivent exprimer leur reconnaissance à Fabienne CASTAING et à Valérie WALLET, pour le travail de Pénélope qu'a représenté la dactylographie du manuscrit.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés,
réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies » ou « reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© *Inra et Masson, Paris, 1988*

ISBN : 2-225-81311-6

ISSN : 0181-0979

MASSON
MASSON ITALIA EDITORI
MASSON S.A.
MASSON EDITORES

120, Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
Via Statuto 2/4 20121 Milano
Balma 151, 08008 Barcelona
Dakota 383, Colonia Napoleó, Mexico 18 DF



Table des matières

AVANT-PROPOS	9
CHAPITRE PREMIER. — Éléments de base	11
1. — Définition et exemples simples	11
a) Définition	11
b) Application	12
c) Deux limites importantes	14
d) Une extension évidente	15
e) Une situation plus proche de la vie réelle	15
2. — Programmation linéaire et modélisation	17
a) La notion de modèle	17
b) Les modèles et leur support	18
c) Modèles normatifs, modèles descriptifs et optimisation	19
d) La validation des modèles	20
CHAPITRE 2. — Notions sur les algorithmes	23
1. — Représentation et solution graphique	23
2. — Définitions et propriétés élémentaires	25
a) Définitions	26
b) Propriétés	26
3. — L'algorithme du simplexe	27
a) Forme standard d'un programme linéaire	27
b) Forme canonique, variable de base, opération du pivot	28
c) Les étapes de la méthode du simplexe	30
d) Propriétés de convergence et d'efficacité	32
4. — L'algorithme du simplexe sous forme de tableau	33
a) Tableau associé à un programme linéaire	33
b) Calcul du profit relatif	34
c) Choix de la variable sortante	35
d) Exemple de convergence	35

5. — Recherche d'une solution de base admissible	35
a) Choix arbitraire de variables de base	36
b) Utilisation de variables artificielles : méthode du grand M	36
c) Méthode du simplexe en deux phases	36
6. — Méthode du simplexe révisé	37
7. — Programmes de calcul	39
CHAPITRE 3. — Compléments sur les algorithmes et les notions associées	41
1. — Théorie de la dualité	41
a) Définition du programme linéaire dual	41
b) Dualité faible	42
c) Dualité forte	42
d) Interprétation de la solution duale	44
e) La solution optimale du problème dual	46
f) La méthode simplexe duale	46
g) Les multiplicateurs de Lagrange	47
2. — L'analyse post-optimale	47
a) Variation des coefficients de la fonction économique	48
b) Modification du second membre	48
c) Modification dans la matrice	49
d) Programmation paramétrique (paramétrages)	50
3. — Autres algorithmes que le simplexe pour le traitement des grands problèmes	51
CHAPITRE 4. — Quelques problèmes classiques résolus par la programmation linéaire : problèmes statiques	53
1. — Problèmes de mélange	53
a) Recherche d'un mélange vérifiant certains standards au moindre coût	53
b) Recherche d'un plan d'alimentation au moindre coût pour une population donnée	54
c) Recherche d'un plan d'alimentation optimale du bétail	55
d) Recherche d'un plan d'élevage optimal	55
2. — Problèmes de transport	57
3. — Problèmes d'ordonnancement	58
4. — Changements de variables possibles dans le cas de contraintes à second membre nul	61
5. — Le choix des techniques de production	62
6. — La construction de modèles composites	64
7. — La recherche de règles de décision	65
CHAPITRE 5. — Quelques problèmes dynamiques et leur interprétation économique : le théorème de l'autoroute	66
1. — La recherche de la durée de vie optimale d'un équipement	66

2. — Problèmes d'investissement et de financement	68
3. — Le problème général de l'investissement, du choix des techniques et de la production, à technologie constante	71
4. — Le théorème de l'autoroute	75
5. — Les fonctions économiques associées au problème d'investissement	78
6. — Exemple de programme multipériodique	79
CHAPITRE 6. — La linéarisation de problèmes non linéaires : le cas des équilibres de marché	83
1. — Le problème de l'équilibre entre l'offre et la demande	83
2. — Les techniques de la linéarisation et la notion de concavité	84
3. — Intéprétation économique : modèles de concurrence et modèles de monopole	87
4. — Les élasticités croisées	88
5. — Fonctions séparables et non séparables	89
CHAPITRE 7. — La linéarisation de problèmes non linéaires : le cas du risque dans les programmes linéaires	90
1. — Le comportement du sujet économique en situation de risque ou d'incertitude	90
2. — Le modèle de la « sélection de portefeuille »	91
3. — Les modèles « à risque limité »	94
a) L'approximation FLCP	95
b) L'approximation MOTAD	98
4. — L'aversion pour le risque	102
CHAPITRE 8. — La séparabilité des matrices	103
1. — Le théorème fondamental sur la séparabilité	103
a) Le problème	103
b) Elément de solution	104
2. — Retour sur le problème de l'équilibre concurrentiel	105
CHAPITRE 9. — L'agrégation des modèles : l'exemple des modèles de concurrence interrégionale en agriculture	108
1. — Les modèles de concurrence interrégionale en agriculture	108
2. — Le regroupement des exploitations en classes homogènes	110
3. — L'agrégation des activités et des contraintes à l'intérieur des modèles d'exploitation	112
4. — Le choix de la fonction économique	112

CHAPITRE 10. — La programmation non linéaire	114
1. — Définition et propriétés principales	114
2. — La programmation linéaire en nombres entiers	115
3. — Programmation non convexe séparable et programmes linéaires en nombres entiers	116
4. — Programmation non linéaire convexe non séparable	118
5. — Programmation non linéaire continue, non séparable et non convexe	119
6. — Exemples de problèmes non linéaires	119
7. — Programmathèque	121
RÉFÉRENCES	122
INDEX	125



Avant-Propos

Les ouvrages sur la programmation linéaire, et plus généralement, la programmation mathématique, ne manquent pas. Ils abordent principalement le problème sous l'angle algorithmique. Celui-ci est bien entendu essentiel. C'est parce qu'il existe des algorithmes que la programmation mathématique est utile pour résoudre certains problèmes de modélisation. Mais d'un autre côté, l'économiste qui cherche les moyens de formaliser une analyse ne s'intéresse pas essentiellement aux algorithmes : il fait confiance pour cela au mathématicien.

Son problème est de savoir si la programmation linéaire, étant donnés les algorithmes disponibles, lui fournit un cadre commode pour manipuler comme il l'entend les données qu'il possède ou qu'il peut obtenir. L'objet de cet ouvrage est pour l'essentiel de décrire certains sous-modèles usuels fréquemment utilisés dans les modèles économiques basés sur la programmation linéaire. Il est donc essentiellement destiné aux étudiants dotés d'une culture mathématique moyenne, qui désirent cependant se familiariser avec une technique de construction de modèle à la fois puissante et simple. C'est pourquoi la partie algorithmique, qui constitue habituellement la majeure partie des autres ouvrages¹ consacrés au sujet, est ici réduite au minimum : c'est ce qui fait l'originalité de ce manuel.

Les exemples choisis se rapportent le plus souvent aux activités agricoles. De fait, la programmation linéaire est un instrument particulièrement bien adapté aux problèmes qui se posent dans cette branche d'activité économique ; ce n'est bien sûr pas la seule. Dans la plupart des cas, la transposition aux problèmes industriels se fait sans difficulté.

Le chapitre 1 donne quelques définitions, et montre ce qu'il est possible d'attendre de l'outil à partir d'un petit nombre d'exemples élémentaires.

Les chapitres 2 et 3 donnent les notions de mathématiques indispensables à l'utilisation de la méthode : ces notions sont restreintes, et c'est ce qui fait le principal intérêt de ces chapitres.

A partir du chapitre 4, commence la présentation d'une série de « sous-modèles », décrivant des situations typiques. Ils peuvent être utilisés isolément ou assemblés pour constituer des modèles complexes de vastes ensembles. Le chapitre 4 se concentre sur les modèles « statiques », dans lesquels le temps ne joue pas de rôle particulier.

(1) Par exemple, SIMMONARD et CHOUTET (1963) ou FAURE (1979).

Le chapitre 5 aborde les problèmes dynamiques. Il ne se borne pas à une simple description de ces modèles, mais s'efforce d'en présenter l'interprétation économique dans le cadre de la théorie de la croissance.

Les chapitres 6 et 7 sont consacrés, dans le même esprit, à l'exposé de problèmes typiquement non linéaires, que l'on peut linéariser : c'est le cas des modèles d'équilibre de marché, étudiés au chapitre 6, et des modèles de risque et d'incertitude, qui font l'objet du chapitre 7. En raison de l'importance pratique de ces problèmes, une large place est faite à leur interprétation économique.

L'interprétation économique est encore au centre des chapitres 8 et 9, qui concernent la représentation, par la programmation linéaire, de décisions complexes, impliquant plus d'un décideur. Au chapitre 8, les décisions sont vues sous l'angle du décideur individuel conscient de son appartenance à un ensemble plus vaste. Au chapitre 9, par contre, les décisions sont envisagées globalement, avec l'exemple des modèles de concurrence inter-régionale en agriculture.

Enfin, le chapitre 10 est un bref résumé de ce qu'il est possible de dire sur la programmation non linéaire.

Eléments de base

1. Définition et exemples simples

a) Définition

Résoudre un programme linéaire, c'est résoudre le problème mathématique suivant :

Etant donnés :

A : une matrice à m lignes et n colonnes, dont les éléments sont réels.

b : un vecteur colonne à m éléments.

c : un vecteur ligne à n éléments.

Trouver un vecteur colonne x tel que :

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \text{ soit vérifié} \\ x &\geq 0 \text{ soit vérifié} \\ cx &\text{ soit maximum.} \end{aligned} \quad (\text{I.1.})$$

Pour expliciter cette définition, rappelons en quelques mots le contenu des notions de matrices et de vecteurs :

Une matrice est un ensemble d'objets, organisé sous forme de tableau : ici, A est un tableau de nombres. Un vecteur est une matrice à une seule ligne ou une seule colonne.

La multiplication d'un vecteur ligne par un vecteur colonne consiste à multiplier chaque élément du premier par l'élément correspondant du second, et à faire la somme des produits obtenus : par exemple, la multiplication d'un vecteur ligne représentant les prix de différents produits par un vecteur colonne donnant leurs quantités permet, elle, d'obtenir la valeur totale de ces produits. Ainsi la notation $V = pq$ (valeur = prix \times quantité) garde-t-elle un sens même lorsque les produits sont nombreux.

La multiplication d'une matrice par un vecteur consiste à multiplier chaque ligne de la matrice par le vecteur : on obtient comme résultat un nouveau vecteur. Ainsi, l'expression $Ax \leq b$ est-elle une notation condensée pour :

$$\begin{aligned} (a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n) &\leq b_1 \\ (a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n) &\leq b_i \\ (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n) &\leq b_m \end{aligned}$$

Investissement, 68, 74, 78, 81
 Itération, 32

L

Lagrangien, 47
 LINDO, 40
 Linéarisation, 84
 Linéarisation en grille, 89
 LOTUS, 40

M

Main d'œuvre salariée, 15
 Main d'œuvre temporaire, 17
 Marché concurrentiel, 83, 105, 112
 Marge brute, 93
 Mélanges (problèmes de), 52
 Mesure du risque, 91
 Méthode du grand M, 35
 Méthode du simplexe dual, 46
 MICROLP, 40
 MINIMPS, 40
 MINOS, 40
 Modèle (notion de), 13, 17, 18
 Modèles (normatifs : descriptifs), 19
 Modèles multipériodiques, 59, 103
 MODULOPT, 121
 Monopole, 87
 MOTAD, 98
 MPS, 39, 121
 MPSX, 39
 MPSX MIP, 121
 MRGW, 40
 Multiplicateurs de Lagrange, 39, 47
 Multiplicateurs du simplexe, 39

N

Non convexité, 115
 Nutriments, 52

O

Offre, 83
 OPHELIE, 39
 Optimum collectif, 112, 113
 Ordonnancement, 58
 Organigramme du simplexe, 38

P

Paramétrages, 50
 PERT, 58
 Pivot, 29, 32, 35
 Plantations forestières, 67
 PL1, 39
 Pointe de travail, 16
 Polyèdre, 26, 61
 Portefeuille optimal, 91
 Primal (programme), 41
 Prix de marché, 45, 105
 Problème élargi, 104, 106
 Problème réduit, 104, 106
 Problèmes convexes, 114
 Problèmes en nombres entiers, 114
 Productivité marginale, 44
 Profit relatif, 31, 32, 34
 Programmation dynamique, 66
 Programmation en nombres entiers, 14, 68, 115, 120
 Programmation mathématique, 19
 Programmation non convexe, 117
 Programmation non linéaire, 89
 Programmation non séparable, 118
 Programmation quadratique, 89, 118
 Programmation à risque limité, 118
 Programme dual, 41
 Programme primal, 41
 Programmes multipériodiques, 79
 Propension à consommer, 78
 Précédents, 59

R

Recrutement de main d'œuvre, 17
 Région admissible, 26, 30, 31, 42
 Règles de décision, 65
 Rendements décroissants, 86
 Rentabilité, 71
 Rente du consommateur, 87, 105
 Rente du producteur, 105
 Revenu minimum, 94, 102
 Risque, 90
 Risque admissible, 71
 Risque (contrainte de), 15
 Rotation (contrainte de), 15

S

SCICON, 40
 Sélection de portefeuille, 102
 Séparabilité, 86, 103, 105, 113

- Simplexe (algorithme), 26, 27, 33, 46, 118
 Simplexe (organigramme), 38
 Simplexe en deux phases, 35
 Simplexe révisé, 37
 Solution admissible, 26
 Solution de base, 29, 30, 32
 Solution de base admissible, 31, 35
 Solution graphique, 24
 Solution infinie, 26
 Solution multiple, 26, 27
 Solution non bornée, 26, 27
 Solution optimale, 43
 Sous-matrice, 64
 STATPACK, 40
 Structure de production, 74
 Structure optimale, 74, 76
 Suivants, 59
- T
- Tableau du simplexe, 33, 34
 Tâtonnement (walrassien), 52
 Taux d'actualisation, 77
 Technique efficiente, 63
 Techniques de production, 61, 62, 63
- Technologie constante, 72
 Test historique, 21
 Théorème de l'autoroute, 67, 74, 76
 Transport, 57, 109
 Typologie, 110
- U
- Unités (choix des), 44
 Utilité (notion de), 14
- V
- Valeur de liquidation, 45
 Valeur optimale, 26
 Valeurs duales, 45, 47, 105
 Validation (des modèles), 20, 22
 Variable binaire, 14
 Variable de base, 28, 29, 37
 Variable entière, 14
 Variable hors base, 32, 37
 Variable sortante, 31, 32, 35, 38
 Variance, 92, 94
 Vente de terre, 81

MASSON, Éditeur
 120, bd Saint-Germain
 75280 Paris Cedex 06
 Dépôt légal : Juillet 1988

9456 - La Bayeusaine graphique
 6-12, rue Royale, 14401 Bayeux
 Dépôt légal : n° 7088
 Juin 1988

