

## SECTION I

# INTRODUCTION

Le présent ouvrage se propose d'étendre le formalisme de la Relativité générale, avec pour principal objectif de le rendre applicable aux phénomènes du domaine quantique (interactions faibles, fortes et électromagnétiques).

L'idée qui va être développée est la suivante : on veut démontrer que l'ensemble des observations actuelles faites sur l'espace physique peut être décrit en postulant pour cet espace une structure riemannienne quadridimensionnelle à  $G_{\alpha\beta}$  complexes :

$$(1) \quad \begin{cases} G_{\alpha\beta} = \dot{G}_{\alpha\beta} + i\tilde{G}_{\alpha\beta} \\ G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} i = \sqrt{-1} \\ \alpha, \beta = 1 \text{ à } 4 \end{array} \right).$$

C'est notamment dans cet espace complexe  $C$  qu'on supposera réalisée la conservation de l'impulsion-énergie. On montrera alors que, si un tel espace physique est décrit dans le cadre « réduit » de l'espace riemannien habituel de la Relativité générale, à  $g_{\alpha\beta}$  réels (que nous nommerons espace d'Einstein  $E$ ), alors la conservation de l'impulsion-énergie n'est réalisée dans  $E$  que si on ajoute, en chaque point de  $E$ , un champ de spineurs quantifié à  $\pm n\hbar$ , où  $n$  désigne un nombre entier non nul et  $h = 2\pi\hbar$  la constante de Planck.

Dans tout ce qui suivra, et pour éviter toute confusion, le tenseur métrique décrivant l'espace complexe  $C$  sera écrit  $G_{\alpha\beta}$  et le tenseur métrique décrivant l'espace d'Einstein  $E$  sera écrit  $g_{\alpha\beta}$ .

Le formalisme que nous allons édifier repose sur un certain nombre de choix fondamentaux, que nous voudrions d'abord justifier. Ces choix cherchent à répondre aux 3 questions de base suivantes :

1) Quelle structure géométrique d'espace doit-on adopter pour prolonger la Relativité générale vers les postulats fondamentaux acceptés à l'échelle quantique, tels qu'ils s'expriment notamment dans la *Théorie quantique des champs* ?

2) Comment les champs de tenseurs du formalisme géométrique de la Relativité générale peuvent-ils constituer une description possible des états de *spin demi-entier*, irréductibles à une représentation tensorielle ?

3) Les deux postulats fondamentaux :

- conservation du tenseur physique  $T_{\alpha\beta}$  (axiome de base de la Relativité générale), d'une part,
- action stationnaire (axiome de base des théories quantiques), d'autre part,

traduisent-ils tous deux un principe physique *unique*, à savoir la conservation de l'impulsion-énergie ?

Nous allons examiner successivement ces 3 questions, en indiquant les réponses que nous avons adoptées pour constituer le cadre de notre formalisme, et pourquoi nous avons fait ces choix.

### 1. Structure géométrique de l'espace.

La méthode la plus « naturelle » pour chercher à étendre le formalisme géométrique de la Relativité générale vers les phénomènes quantiques semble être, comme on le propose le plus souvent, d'abandonner le caractère symétrique de la métrique et de postuler des  $g_{\alpha\beta}$  non symétriques. Telles ont été les théories sans torsion avec deux courbures (de rotation et d'homothétie) [1], ou au contraire avec une torsion mais sans courbure [2], ou enfin les théories postulant un espace général à connexion affine, pourvu alors d'une torsion et de 2 sortes de courbures [3]. Plus récemment, on a pu montrer comment un tel formalisme permettait de doter l'espace géométrique d'une densité de spin [4].

Indépendamment des critiques bien connues adressées habituellement à ces types de formalisme à connexion affine (difficultés pour déduire les équations de manière univoque à partir d'un principe variationnel ; ambiguïté sur l'interprétation physique à donner aux grandeurs géométriques, entraînant une comparaison difficile aux données expérimentales ; difficultés pour obtenir, dans le cas général, des solutions exactes sans singularité...), nous ajouterons, pour notre part, qu'un tel type de formalisme est insuffisant pour rejoindre le point de vue quantique pour la raison suivante : la Théorie quantique des champs, qui traite l'espace comme un ensemble infini d'oscillateurs élémentaires quantifiés en interaction, exigerait que la représentation géométrique permette de décrire en chaque point *mathématique* de l'espace *un spin* (défini au signe près), et non pas seulement une densité de spin.

Ceci n'apparaît pas comme possible dans l'espace à 4 dimensions de la Relativité générale, puisqu'on ne peut pas associer à un point *mathématique* d'espace-temps (qui enferme un volume nul d'espace-temps, par définition) une quantité *physique* telle que l'action associée à un spin. Il serait nécessaire, pour y parvenir, de considérer l'espace à 4 dimensions comme « plongé » lui-même dans un espace possédant un nombre plus grand de dimensions, et donc capable de doter cette fois chaque point de l'espace quadridimensionnel

d'un certain « contenu » physique. Une tentative intéressante dans cette direction est celle de Podolanski [5], où l'espace physique possède 6 dimensions mais est doué d'une structure en feuillets telle que *tous* les points d'un feuillet correspondent à *un même point* de l'espace-temps quadridimensionnel. Les tentatives riemanniennes à plus de 4 dimensions, telles que celles bien connues de Kaluza (1921), Jordan (1947), Thiry (1950), se ramènent finalement toutes à cette recherche pour ajouter des caractéristiques dimensionnelles supplémentaires à un espace-temps physique quadridimensionnel servant à repérer géographiquement le lieu et l'instant de toute observation [17].

Nous noterons cependant que, dans toutes ces théories à plus de 4 dimensions, le temps demeure à une seule dimension : les dimensions supplémentaires sont postulées du type « espace » seulement. Or un spin, c'est-à-dire une action, ne peut pas être « logé » dans un seul instant du temps, quel que soit le nombre des dimensions d'espace, puisqu'une action est le produit d'une énergie non nulle (contenue dans l'espace) par une *durée* (laps de temps non nul).

Ces remarques nous ont conduit à penser que, pour rejoindre le point de vue quantique, on pouvait postuler un caractère *complexe pour chacune* des 4 dimensions de l'espace-temps. En bref, nous avons cherché à développer une Relativité dans un espace riemannien quadridimensionnel *complexe*  $C$  (que nous nommerons *Relativité complexe*), décrit par des  $G_{\alpha\beta}$  symétriques complexes (1). D'une certaine manière, on peut dire que cette méthode revient à dédoubler *chacune* des dimensions de l'espace d'Einstein  $E$ , aussi bien les 3 dimensions d'espace que la dimension temps. La métrique d'un tel espace :

$$(2) \quad ds^2 = G_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

où les coordonnées :

$$(3) \quad y^\alpha = \dot{y}^\alpha + i\tilde{y}^\alpha \quad (\alpha = 1 \text{ à } 4)$$

sont complexes, fait alors jouer des *rôles entièrement symétriques à l'espace et au temps*, quelle que soit la valeur de  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ . En ce sens, on peut dire aussi que l'espace quadridimensionnel riemannien complexe est l'extension la plus « naturelle » de l'espace d'Einstein, qui associait un temps réel à un espace purement imaginaire (métrique de type hyperbolique normal).

Comme on le constate, si l'espace *physique* (celui où est notamment satisfaite la conservation de l'impulsion-énergie) doit, pour être *complètement* décrit, être rapporté à des référentiels à coordonnées complexes, cela signifie que *chaque point*  $(y_0^j, t_0)$  de l'espace d'Einstein est en interaction physique non seulement avec les points avoisinants de cet espace d'Einstein à chaque instant, mais encore *avec tout un Univers associé d'espace-temps*  $(y'^j, t' \in [-\infty, +\infty])$ , capable de conférer par conséquent à chaque point mathématique  $(y_0^j, t_0)$  de l'espace d'Einstein une véritable structure phy-

sique, et notamment une action (spin). C'est là une propriété du point qui, comme nous l'avons précédemment noté, nous paraît être exigée pour représenter les phénomènes quantiques dans une description à caractère géométrique de l'espace-temps. Il est intéressant de rappeler que cette possibilité d'une description utilisant *un point à structure covariante* particulière était apparue à Einstein au cours de ses toutes dernières tentatives unitaires [6].

## 2. Représentation des spins demi-entiers.

Le formalisme général des spineurs, développé à l'origine dans un espace plat, peut être transposé sans aucun changement dans l'espace *tangent* en un point-événement quelconque  $P$  de l'espace riemannien courbé [7]. Il n'y a donc aucune difficulté de principe pour introduire un champ de spineurs dans un espace riemannien, à côté du champ de tenseurs.

Un écueil à surmonter est cependant le suivant : la Relativité complexe que nous allons développer, comme la Relativité générale, prétend pouvoir fournir à partir de ses postulats de départ (conservation de  $T_{\alpha\beta}$  notamment) une description *complète* de la réalité physique, traduite par les équations :

$$(4) \quad R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R G_{\alpha\beta} + A G_{\alpha\beta} = - T_{\alpha\beta} .$$

S'il en est bien ainsi, une description purement tensorielle telle que (4), qui ambitionne de décrire toute la réalité physique, doit être *équivalente* aux descriptions des phénomènes physiques faites au moyen des champs de spineurs. Or, comme on le sait [8], seul un champ de spin *entier* peut être décrit de manière équivalente soit par des spineurs soit par des tenseurs. Certes, il est possible d'introduire dans un espace géométrique riemannien des spineurs décrivant un spin demi-entier : mais alors c'est un apport « de l'extérieur », qui vient se surajouter à la description fournie par les équations (4), et dont le caractère « ad hoc » est très critiquable (comme c'est d'ailleurs déjà le cas de l'introduction du tenseur électromagnétique  $F_{\alpha\beta}$  en Relativité générale). Ce n'est alors qu'en mettant en fait côte à côte les équations (4) et les équations des champs de spin demi-entier (équations de Dirac par exemple) qu'on parviendrait à rejoindre entièrement les phénomènes quantiques, ce qui constituerait donc un formalisme synthétique, mais non un formalisme unitaire. On ne pourrait en tout cas pas affirmer que les champs de spin demi-entier sont décrits par (4), mais seulement qu'ils sont compatibles avec (4). En bref, (4) n'exprimerait donc plus *l'ensemble* de la réalité physique.

Pour résoudre cette difficulté, nous avons postulé que l'action *entière*  $\pm nh$  dont (4) est capable de tenir compte au moyen de grandeurs tensorielles, action dont nous montrerons l'existence nécessaire en chaque point de l'espace d'Einstein, se décompose en un spin  $\pm \frac{1}{2} n\hbar$  et une autre grandeur physique, associée à un mouvement d'oscillation *radiale* de chaque point de la « carte » Relativité générale *dans l'espace complexe*, et représentant égale-

ment une action  $\pm \frac{1}{2}nh$ . Nous avons nommé cette grandeur physique nouvelle, sur laquelle nous reviendrons longuement dans le texte qui suit, *le pulse*. Le champ de spineurs décrivant l'action totale *spin + pulse* en chaque point de l'espace d'Einstein est donc bien ici une action *entière*  $\pm nh$ , descriptible au moyen d'un champ de tenseurs, ou de manière équivalente par un champ de spineurs.

Si  $n = 1$  par exemple (action totale  $\pm h$  en chaque point, niveau fondamental), on pourra décrire cet état au moyen d'un champ de spineurs  $U_{ik}$  ( $i, k = 1$  à  $4$ ) à 16 composantes, et les équations satisfaites par les  $U_{ik}$  pourront alors être remplacées par des équations équivalentes portant sur des grandeurs tensorielles, comme cela est bien connu [8]. Ces équations d'action entière seront ensuite considérées comme résultant elles-mêmes de la fusion de deux états d'action demi-entière (*spin + pulse*), et l'on pourra obtenir par « fission » (c'est-à-dire « fusion a contrario ») la description de ces deux états d'action demi-entière ; on réclamera au champ de spineurs d'action demi-entière  $U_k$  ( $k = 1$  à  $4$ ) de satisfaire des équations telles que, par fusion matricielle de deux états  $U_k$ , on puisse retrouver les  $U_{ik}$  [8] et les équations d'évolution de ces grandeurs.

Notons que, dans un travail précédent [9], nous avons montré que l'hypothèse d'un *pulse* en chaque point de l'espace d'Einstein entraînerait une pulsation radiale de la « frontière » des hadrons, comme semble le corroborer l'observation [10] ; par ailleurs, cette pulsation radiale de la particule serait elle-même à l'origine [9] du potentiel *gravitationnel* créé par chaque particule. S'il en est bien ainsi, *le spin* jouerait alors un rôle essentiel au niveau des interactions électromagnétiques et nucléaires, tandis qu'on devrait tenir compte *du pulse* au niveau des interactions gravitationnelles.

### 3. Conservation de $T_{\alpha\beta}$ et action stationnaire.

Il est généralement admis que le tenseur matériel  $T_{\alpha\beta}$  des équations (4) de la Relativité générale est un tenseur *impulsion-énergie*, dont la divergence nulle traduit la conservation de l'impulsion-énergie.

Si  $T_{\alpha\beta}$  a bien cette signification physique, on peut dire que :

$$(5) \quad \nabla_{\alpha} T_{\beta}^{\alpha} = 0$$

est un principe *équivalent* à celui d'action stationnaire à la base du formalisme quantique [11] :

$$(6) \quad \delta \int_{V_4} U dx^4 = 0$$

où  $U$  est un Lagrangien exprimant une densité quadridimensionnelle d'action ; en effet, le principe noetherien conjugué de (6) est précisément celui de la conservation de l'impulsion-énergie [12].

A l'examen, il apparaît cependant que rien ne nous assure *a priori* que  $T_{\alpha\beta}$  est bien, comme on le prétend, un tenseur impulsion-énergie :

a) La forme des équations de la Relativité générale (pour l'espace vide) est déduite d'un principe variationnel :

$$(7) \quad \delta \int R \sqrt{-g} dx^4 = 0$$

où  $R$  est la courbure scalaire riemannienne et  $g$  le déterminant des  $g_{\alpha\beta}$ . Mais (7) porte sur des grandeurs purement géométriques ( $R$  et  $g_{\alpha\beta}$ ), et rien ne nous indique comment l'énergie intervient dans cette relation (7) ; cette relation ne fournit d'ailleurs que les équations de la Relativité générale du cas dit « extérieur », c'est-à-dire en l'absence de toute impulsion-énergie ( $T_{\alpha\beta} = 0$ , sauf au point-source, accepté comme une singularité de l'espace).

b) Le mouvement géodésique :

$$(8) \quad u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0 \quad \left( u^\alpha = \frac{dy^\alpha}{ds} \right)$$

peut être obtenu, comme on le vérifie sans peine, en annulant la divergence d'un tenseur :

$$(9) \quad T_{\alpha\beta} = \chi \rho^n u_\alpha u_\beta$$

quelle que soit la puissance  $n$  à laquelle on porte la densité  $\rho$ . Or si  $n \neq 1$ ,  $T_{\alpha\beta}$  n'est naturellement plus un tenseur impulsion-énergie. Notons d'ailleurs que le rôle symétrique observé dans la nature entre les énergies positives et négatives, et plus particulièrement dans le domaine quantique (électrons de Dirac), suggérerait plutôt une invariance de  $T_{\alpha\beta}$  avec le signe de  $\rho$ , c'est-à-dire une valeur *paire* de  $n$  dans (9) (nous verrons que la Relativité complexe fournit  $n = 2$ ).

c) Aucune forme de tenseur impulsion-énergie  $T_{\alpha\beta}$  n'a jusqu'ici pu fournir une description satisfaisante du cas « intérieur » ( $T_{\alpha\beta} \neq 0$ ) en Relativité générale, au point que *toutes* les comparaisons à l'expérience sont pratiquement faites avec  $T_{\alpha\beta} \equiv 0$  (sauf au point source du champ) ; cette difficulté ne tient-elle pas, au moins en partie, au fait qu'on veut imposer *a priori* à  $T_{\alpha\beta}$  d'être un tenseur impulsion-énergie ?

Pour ces diverses raisons nous avons supposé que (6) et (7) exprimaient des principes physiques *différents* : nous avons pu alors déduire d'un formalisme s'appuyant sur ces *deux* principes une structure microscopique explicite pour  $T_{\alpha\beta}$ . L'annulation de la divergence de ce tenseur  $T_{\alpha\beta}$  fournit bien toujours le mouvement géodésique (8), mais l'équation habituelle de continuité de la matière disparaît (comme cela doit toujours être le cas pour un espace soumis à des contraintes [17]) pour ne laisser subsister, comme en Relativité

générale, qu'une équation de continuité pour la courbure scalaire riemannienne [13] :

$$(10) \quad \nabla_{\alpha} R u^{\alpha} = 0 .$$

Bien entendu, comme la forme explicite que nous obtiendrons pour  $T_{\alpha\beta}$  dérive aussi du principe d'action stationnaire (6), notre formalisme va *satisfaire aussi* la conservation de l'impulsion-énergie (ce qui était naturellement nécessaire).

Soulignons le fait que l'hypothèse, à notre avis illégitime, d'avoir considéré  $T_{\alpha\beta}$  comme un tenseur impulsion-énergie, est sans doute le facteur principal qui a toujours pratiquement interdit de doter chaque point de l'espace d'Einstein d'une action  $\pm nh$ . c'est-à-dire interdit toute quantification de cet espace. En effet, puisque la conservation de l'impulsion-énergie était alors supposée réalisée en chaque point par les équations (4) *sans intervention de cette action*, il n'était plus possible d'affirmer que cette action  $\pm nh$  était *nécessaire* pour conserver l'impulsion-énergie en chaque point. Surajouter une telle action  $\pm nh$  aurait alors, une fois encore, été une adjonction d'apparence « ad hoc » et purement artificielle, dont l'existence pouvait à la rigueur être justifiée par l'observation, mais en tout cas pas par la théorie elle-même.

Dans la section II nous établirons les équations de la *Relativité complexe* ( $G_{\alpha\beta}$  complexes) à partir des deux principes de conservation de  $T_{\alpha\beta}$  et d'action stationnaire.  $T_{\alpha\beta} = \xi^2 \rho^2 u_{\alpha} u_{\beta}$  s'exprimera en fonction du carré d'une densité propre  $\rho$ .

Dans la section III nous comparerons l'espace d'Einstein ( $g_{\alpha\beta}$  réels) à l'espace complexe : nous montrerons que la description limitée à l'espace d'Einstein ne conserve l'impulsion-énergie (principe satisfait automatiquement par l'axiomatique de l'espace complexe) que s'il existe *une action non nulle, définie au signe près, en chaque point* de l'espace d'Einstein. A l'analyse, cette action apparaîtra comme constituée pour moitié d'un moment cinétique de rotation (spin) et pour moitié d'une pulsation périodique radiale (pulse). Chacune de ces deux grandeurs sera quantifiée à  $\pm \frac{1}{2} nh$ .

Nous étudierons alors le *champ de spineurs* qui décrit cette action totale  $\pm nh$  en chaque point de l'espace d'Einstein ; nous opérerons comme d'habitude dans l'espace de Lorentz tangent. Le résultat est, pour  $n = 1$ , une forme riemannienne des équations de Maxwell (onde  $\Sigma$  à 10 composantes distinctes  $E, H, A, V$ ).

Dans la section IV nous examinerons comment cette Relativité générale quantifiée conduit à un *caractère probabiliste* de l'observation. On établira la correspondance entre notre fonction de description  $\Sigma$  et la fonction probabiliste habituelle  $\psi$ .  $\Sigma$  et  $\psi$  conduisent aux mêmes observations. La Relativité générale quantifiée entraîne un probabilisme *strict*, c'est-à-dire non réductible à un point de vue statistique.

Enfin, dans les sections V à VIII, nous appliquerons les équations de la Relativité complexe à la recherche de solutions pour la courbure scalaire riemannienne  $R$  partout finies, continues et sans aucune singularité (même au point-source). Ecrites dans un système propre de référence ces solutions fournissent un modèle de l'Univers dans son ensemble (*modèle cosmologique*) et un modèle pour la structure des particules stables et instables (*photons, leptons et hadrons*). Une première analyse numérique de ces modèles démontre leur compatibilité avec les faits observables.