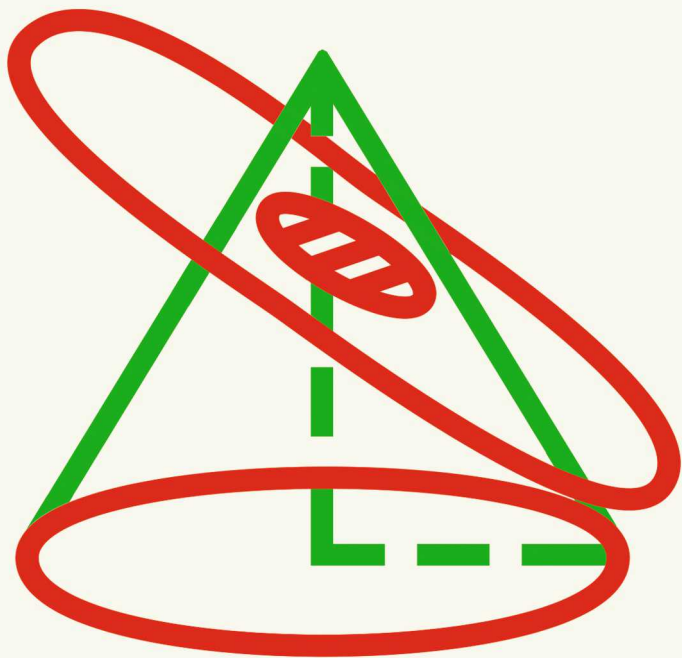


CLAIRE VOISIN

FAIRE DES MATHÉMATIQUES

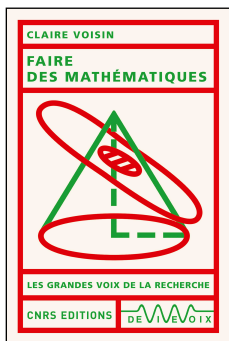


LES GRANDES VOIX DE LA RECHERCHE

CNRS EDITIONS

**DE
I
E
O
I
X**

Présentation de l'éditeur



Qu'est-ce que le savoir mathématique ? À quoi sert une théorie mathématique ? Et qu'est-ce que faire des mathématiques ? La nature et l'objet des mathématiques restent mystérieux, et celles-ci apparaissent souvent comme très abstraites.

Les mathématiques ont pourtant une notion bien définie du vrai : est vrai ce qui est démontré. Pour les besoins de la démonstration, précisément, les mathématiques usent d'outils. Le langage, d'abord, joue un rôle fondamental dans l'élaboration de la définition, l'hypothèse, la démonstration et le théorème. Les mathématiques entretiennent également un lien étroit avec la logique, à tel point que l'on peut se demander s'il faut les distinguer. De façon diamétralement opposée, on peut s'interroger sur la place de la géométrie dans la recherche moderne en mathématiques.

Dans cet essai court, Claire Voisin raconte, de l'intérieur, comment se font les mathématiques, et nous montre que l'abstraction n'est pas complexification mais qu'elle naît au contraire du souci constant de simplification et d'économie de pensée qui caractérise les mathématiques.

Médaille d'or du CNRS, Claire Voisin est mathématicienne, et titulaire de la chaire de Géométrie algébrique du Collège de France.

Claire Voisin

Faire
des mathématiques

CNRS ÉDITIONS

DE VIVE VOIX

La version audio du présent ouvrage
est disponible à l'achat sur le site www.devivevoix.com

Couverture : Paul Cox

© CNRS Éditions / De Vive Voix
coll. « Les Grandes Voix de la Recherche »
Paris, 2019.

ISBN : 978-2-271-12942-0

www.cnrseditions.fr
www.devivevoix.com

Les Grandes Voix de la Recherche

Une collection CNRS Éditions / De Vive Voix

Donner la parole aux lauréats et lauréates de la médaille d'or du CNRS, la plus prestigieuse récompense scientifique française : telle est l'ambition de la collection *Les Grandes Voix de la Recherche*.

En des textes courts et vivants, les médailles d'or retracent leur parcours, nous transmettent leur passion, nous présentent leurs travaux. Grâce à des contenus accessibles et à jour des dernières avancées scientifiques, ils nous introduisent au meilleur de la recherche française.

En passeurs et médiateurs, ces grandes voix de la recherche explorent tous les domaines de la connaissance et présentent de manière claire les grands défis de la science.

À écouter ou à lire, ces grandes voix de la recherche sont disponibles sous forme de livre audio et de livre papier.



Claire Voisin, lors d'un cours au Collège de France en octobre 2016.

© Patrick Imbert / Collège de France.

Introduction

Pour commencer, il est peut-être bon de s'interroger sur le savoir mathématique et sur la position qu'occupent les mathématiques parmi les autres sciences. Tout d'abord, le terme de « science » ne s'applique pas de façon évidente parce que, étymologiquement, il signifie « savoir » ; or, la nature même et l'objet du savoir mathématique sont mystérieux. Un trait spécifique des mathématiques est le fait qu'elles fonctionnent en corps à corps avec le langage, qui y joue un rôle fondamental et apparaît dans l'organisation de la démarche mathématique à toutes les étapes : la définition, l'hypothèse, la démonstration et le théorème.

La définition permet de convoquer des objets à l'aide d'un formalisme. Si je commence un énoncé mathématique, je me donne d'abord des objets. C'est un énoncé verbal qui prend la forme : « Soit G un groupe... » (par exemple). Je fais ici deux opérations de nature linguistique. Je donne d'abord un nom : G (majuscule parce que c'est un groupe). Les mathématiciens sont extrêmement sourcilleux sur les questions de notation parce qu'il leur faut nommer leurs objets, et ils utilisent pour cela des lettres tirées de divers alphabets, qui vont servir en quelque sorte de noms propres. Mais il faut pouvoir s'y retrouver, et ces lettres ont donc souvent des connotations spécifiques, selon l'alphabet par exemple. C'est une première forme de relation au langage.

Je parle ensuite de « groupe », un objet qui a fait l'objet d'une définition, voire d'une théorie préalable. Quand je dis : « Soit G un groupe... », non seulement je nomme, mais en plus je convoque la totalité d'un objet mathématique et de ses attributs, c'est-à-dire tout un

ensemble d'axiomes et de propriétés qui ont fait l'objet d'une théorie préalable.

Une spécificité du savoir mathématique est que les mathématiciens sont les seuls scientifiques à avoir une notion bien définie de « vrai ». Pour un mathématicien, un énoncé qui est vrai est un énoncé qui est démontré. Malheureusement, cela dit aussi que le savoir mathématique, à supposer que cela ait un sens, est un savoir conditionnel, c'est-à-dire conditionné à des hypothèses. Un mathématicien ne dit pas « je sais », mais « je sais que telle hypothèse entraîne telle conclusion ». Il ne se contente pas de dire « je sais », il le démontre. Ainsi, l'un des maîtres mots en mathématiques est « démonstration ». On n'est donc plus seulement dans le registre du *savoir*, au sens d'encyclopédie, de liste officielle des choses que l'on sait, mais aussi dans le registre du *faire*. On dit : « faire une démonstration. »

Le langage, et le langage formel, sont donc très importants en mathématiques. C'est ce sur quoi reposent toute notre activité, toute notre réflexion. Paradoxalement, à côté de cet

extrême formalisme, certains objets mathématiques fondamentaux, qui peuvent être considérés par les non-mathématiciens comme abstraits, apparaissent aux mathématiciens avec une réalité très crue, comme s'ils étaient plus réels que la réalité qui nous environne. Tout mathématicien peut répondre à la question « quel objet mathématique emporteriez-vous sur une île déserte ? ». Pour ma part, ce serait très certainement une structure de Hodge.

Mathématiques – Logique

Quel est le lien entre la logique et les mathématiques ? Peut-on séparer l'une de l'autre ? Cela n'est pas clair pour moi. Je parlerais plutôt d'intrication. La logique joue un rôle un peu métamathématique. D'un point de vue un peu vague et général, la logique est tout simplement l'exigence de la rigueur, qui va bien au-delà des mathématiques.

L'exigence de la rigueur consiste à maîtriser et respecter la logique contenue dans les tables de vérité. Par exemple, « A implique B » peut être représenté par ce que l'on appelle une table de vérité dans laquelle on étudie tous les cas de figure : A est vrai et B est vrai ; A est faux et B est vrai, etc. À chaque fois, on décide si c'est

vrai ou si c'est faux, selon cette implication. Ainsi, dans la table de vérité de « A implique B », on ne peut pas avoir à la fois « A est vrai et B est faux ». C'est la logique de base.

Derrière la logique de base, il y a l'algèbre de Boole, qui permet de modéliser tous les énoncés et raisonnements logiques à l'aide de trois opérations de base : « et », « ou » et « non », c'est-à-dire le passage du vrai au faux. A faux, c'est non-A. C'est la logique binaire : un énoncé (hypothèse, propriété) prendra les valeurs « vrai » ou « faux ».

Cela peut sembler vraiment rudimentaire, mais cette algèbre de Boole nous amène finalement à la théorie des ensembles, dans laquelle on a l'analogue de « et », « ou » et « non ». Si A est un énoncé, une propriété sur un ensemble, on a l'ensemble de tous les éléments pour lesquels A est vrai. Si B est un autre énoncé, on a l'ensemble de tous les éléments satisfaisant B. Quand je dis « A et B », je prends l'intersection de ces deux ensembles. Quand je dis « A ou B », je prends la réunion des deux (soit A est vrai, soit B est vrai, on prend bien

la réunion de ces deux ensembles). Le « non » correspond à prendre ce que l'on appelle en termes ensemblistes le « complémentaire ». Si A correspond l'ensemble des éléments pour lesquels A est vrai, alors $\text{non-}A$ correspond tout le reste. C'est une sorte de réalisation des quantificateurs et des opérations logiques que les (sous)-ensembles et leurs opérations fournissent. Cela donne le lien entre la logique binaire et la théorie des ensembles.

La théorie des ensembles est très importante en mathématiques parce que c'est sur elle qu'est fondée la théorie des cardinaux ; or qui dit cardinaux dit nombres. Le cardinal d'un ensemble est *a posteriori* le nombre d'éléments de cet ensemble, mais en fait on peut utiliser les ensembles et la notion de bijection entre ensembles pour définir les nombres. Alors que l'on se croyait dans un registre totalement formel plus proche du savoir des machines que celui des êtres humains, on se retrouve tout d'un coup à fabriquer les nombres entiers, correspondant aux ensembles de cardinal fini, puis tous les nombres. On est ainsi passé de la

logique aux ensembles, puis des ensembles aux nombres.

Vient ensuite la question du continu, faisant intervenir des cardinaux différents. L'ensemble des nombres entiers est un ensemble dénombrable : on peut lister un à un ses éléments. On sait que le cardinal de toutes les parties de cet ensemble sera toujours strictement supérieur à celui de l'ensemble lui-même. C'est un théorème de logique dû à Cantor qui utilise très peu de mathématiques, uniquement un petit argument de logique et de théorie des ensembles : un ensemble n'est jamais en bijection avec l'ensemble de ses parties, c'est-à-dire qu'on ne peut faire correspondre de façon biunivoque les éléments de l'un et ceux de l'autre. C'est un très beau théorème, peut-être le premier que l'on peut comprendre sans connaître aucune mathématique. Ainsi, l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers naturels, qui est en bijection avec l'ensemble des nombres réels, est un ensemble beaucoup plus gros que celui des entiers naturels. C'est la même chose pour l'ensemble des nombres réels. Ce théorème nous

dit donc qu'il y a des cardinaux beaucoup plus gros. Chaque fois que l'on passe d'un ensemble à l'ensemble de ses parties, on augmente ce cardinal. La question est de savoir s'il y a quelque chose entre les deux. L'hypothèse du continu est que non. Ces problèmes sont des questions de logique, qui vont plutôt vers la philosophie, et auxquelles le mathématicien raisonnable ne pense pas. Pour résumer, c'est là le deuxième rôle de la logique ; nous en dépendons pour définir rigoureusement ces objets très importants que sont les nombres.

Un troisième aspect de l'intervention de la logique dans les mathématiques est devenu de plus en plus important depuis les années 1990. Il s'agit de réflexions sur la définissabilité, permettant de démontrer des résultats de géométrie ou d'arithmétique grâce à des arguments très formels proches de la théorie des ensembles. Des développements actuels de logique mathématique tels que la théorie de l'ordinalité sont inspirés par la logique, mais sont finalement mathématisés et désormais font partie de la culture mathématique. L'idée

de la définissabilité est d'utiliser des arguments reposant sur l'examen attentif de la manière dont on a défini les choses, pour montrer certains énoncés. Il y a des domaines mathématiques plus ou moins proches de la logique. Un exemple typique est la combinatoire qui est proche de la logique du fait qu'elle repose sur très peu de définitions fondatrices : peu d'objets, beaucoup de raisonnements. Le paradoxe de la théorie de l' ω -minimalité est qu'elle s'applique dans des domaines classiquement très éloignés de la logique, comme la géométrie, l'arithmétique, la théorie de la transcendance.

Actuellement, nous sommes obligés de nous interroger sur les frontières des mathématiques, qui sont données par la preuve informatique, c'est-à-dire la possibilité d'examiner, de décrire complètement les mathématiques dans un langage qui soit vérifiable par ordinateur, voire, si l'on extrapole, la possibilité de faire faire des mathématiques à un ordinateur. J'en parle sur un mode virtuel parce que ce n'est pas un sujet qui m'intéresse particulièrement. C'est avec mes structures de Hodge que je partirai

sur une île déserte, et c'est un objet qui me donnera du travail pendant assez longtemps pour que je ne me soucie pas de savoir si un ordinateur saurait le faire mieux que moi, mais je l'évoque parce que ce sont des questions qui se posent actuellement au sujet du statut des mathématiques.

Abstraction

La pratique en mathématiques est très importante et oblige à la réflexion sur l'équilibre abstrait/concret. En tant que mathématicienne, je suis frappée par le fait qu'il n'y a pas d'abstraction qui résiste à la pratique. Les notions peuvent être plus ou moins difficiles à introduire parce qu'elles peuvent arriver avec un bagage de définitions plus ou moins imposant. Certaines définitions peuvent paraître difficiles à digérer, mais, lorsque les notions introduites sont adéquates, que leur usage s'avère être une économie de l'esprit, une économie de temps, on finit par se familiariser avec les objets et à les utiliser en toute confiance, de même qu'un enfant peut apprendre à pratiquer des additions.

Les Grandes Voix de la Recherche

Dans la même collection

Thibault Damour, *Ondes gravitationnelles
et trous noirs*

Gérard Berry, *La pensée informatique*

Nicole Le Douarin, *Les secrets de la vie*

Jean Jouzel, *Climats passés, climats futurs*

Philippe Descola, *Une écologie des relations*

Alain Connes, *La géométrie et le quantique*

Alain Aspect, *Einstein et les révolutions quantiques*

Maurice Godelier, *Fondamentaux de la vie sociale*

Jean Weissenbach, *Dépolluer la planète*

Claude Hagège, *Le linguiste et les langues*

Retrouvez tous les ouvrages de CNRS Éditions
sur notre site www.cnrseditions.fr