Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à deux semaines de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Chapitre 1
Séries

L'utilisation de la somme d'une série apparaît dès l'Antiquité avec **Archimède**, pour des calculs d'aires et de volumes. Il faut attendre la deuxième moitié du XVII^{e} siècle pour voir se développer l'étude des séries, en particulier avec le développement du calcul différentiel et intégral. Jean **Le Rond d'Alembert** s'y intéresse aussi. C'est sans doute par ses discussions avec **Diderot** que le mot *série*, jusqu'alors utilisé avant tout en mathématiques, entre dans le langage courant. En 1821, Augustin-Louis **Cauchy** établit le premier une théorie rigoureuse. Il énonce même, cinq ans avant la naissance du mathématicien allemand, la règle de convergence des séries de **Riemann**.

Augustin-Louis Cauchy
1789-1857

Objectifs

Les incontournables

▷ Savoir étudier la nature d'une série à l'aide de la définition.

▷ Connaître les sommes des séries usuelles.

▷ Savoir appliquer les critères de convergence dans le cas des séries à termes positifs.

Et plus si affinités

▷ Savoir réaliser un "test de Riemann".

▷ Savoir utiliser la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ pour étudier la suite (u_n).

Résumé de cours

Définitions

Définitions 1.1. — Soit (u_n) une suite réelle. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Étudier la nature de la *série de terme général* u_n, c'est étudier si la suite (S_n) est convergente ou pas.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite des sommes partielles* de la série.

Notation 1.1 — La série de terme général u_n est souvent notée $\sum u_n$. Attention, ceci n'est qu'une notation sans aucun sens "sommatoire" car la somme n'a ni indice, ni bornes !
S'il y a le moindre risque de confusion avec une "vraie" somme (comme par exemple S_n), il vaut mieux écrire en entier « la série de terme général u_n ».

Remarque 1.1. — Il est possible que la suite (u_n) ne soit définie qu'à partir du rang 1, ou même du rang n_0, il suffit alors de changer la borne inférieure des sommes que l'on rencontre.

Nature d'une série

❑ Séries convergentes, séries divergentes

Définition 1.2. — Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge, lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée converge. Sinon, on dit que la série diverge.
Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série de terme général* u_n et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On a donc : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque 1.2. — Les séries dont il est facile de trouver la somme sont celles dont le terme général s'écrit sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$. En effet, on peut écrire :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$. Il ne reste plus alors qu'à connaître le comportement de la **suite** (v_n) pour conclure sur la série $\sum u_n$ (et réciproquement).

⇨ **Méthode 1.1. Comment utiliser la suite des sommes partielles ?**
⇨ **Méthode 1.7. Comment calculer la somme d'une série grâce aux sommes partielles ?**

Propriété 1.1. — Si les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors quels que soient les réels a et b, la série $\sum (av_n + bw_n)$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}(av_n + bw_n) = a\sum_{n=0}^{+\infty} v_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

⇨ **Méthode 1.8. Comment calculer la somme d'une série par combinaison linéaire ?**

Mise en garde 1.1. — Il peut se faire que la série $\sum (av_n + bw_n)$ converge, alors que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ divergent. On ne "scinde" donc pas la somme d'une série convergente en deux sommes de séries sans avoir vérifié au préalable que ces deux séries convergent.

Théorème 1.1. — Condition nécessaire de convergence.
Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, mais la réciproque est fausse.
En contraposant : si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque 1.3. — Ce résultat est facile à établir en remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Puisque la série converge, en notant S sa somme, on a $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 1.3. — Si la série de terme général u_n est convergente, on appelle *reste d'ordre n* de la série, le réel noté R_n, défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Théorème 1.2. — Le reste d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, soit :

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$.

Remarque 1.4. — Il suffit d'écrire $R_n = S - S_n$, puis utiliser le fait que $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

❑ Séries absolument convergentes

Définition 1.4. — La série $\sum u_n$ est *absolument convergente* lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1.3. — Toute série absolument convergente est convergente.

⇨ **Méthode 1.6. Comment utiliser la convergence absolue ?**

Remarque 1.5. — La réciproque est fausse : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (se reporter aux **exercices 18.11** et **21.16** du **tome 1**) mais elle ne converge pas absolument : elle est dite *semi-convergente*.

Théorème 1.4. — Si une série est absolument convergente, alors on ne change ni sa nature, ni sa somme, en changeant l'ordre de sommation de ses termes.

■ Séries à termes positifs

❑ Somme partielle d'une série à termes positifs

Propriété 1.2. — La suite (S_n) des sommes partielles associée à une série à termes positifs est croissante (car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$).
- Si la suite des sommes partielles est majorée alors la série $\sum u_n$ converge.
- Sinon, la série diverge et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

❑ Critères de convergence

Mise en garde 1.2. — Les quatre critères qui suivent ne donnent pas la somme de la série.

Théorème 1.5. — Critère d'équivalence.
Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs, au moins à partir d'un certain rang.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (si l'une converge, alors l'autre converge et si l'une diverge, alors l'autre diverge).

⇨ **Méthode 1.2. Comment utiliser le critère d'équivalence ?**

Remarque 1.6. — Le critère d'équivalence est aussi valable si les deux séries sont à termes négatifs à partir d'un certain rang.

Théorème 1.6. — Critère de comparaison.
Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ (au moins à partir d'un certain rang).
- si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

⇨ **Méthode 1.3. Comment utiliser le critère de comparaison ?**

Théorème 1.7. — Critère de négligeabilité.
Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs, au moins à partir d'un certain rang.
Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

⇨ **Méthode 1.4. Comment utiliser le critère de négligeabilité ?**

Théorème 1.8. — Critère de d'Alembert. Soit une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs, au moins à partir d'un certain rang, telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.
Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

⇨ **Méthode 1.5. Comment utiliser le critère de d'Alembert ?**

■ Séries alternées

Définition 1.5. — On appelle *série alternée* toute série dont le terme général u_n s'écrit $u_n = (-1)^n a_n$, où la suite (a_n) est positive, au moins à partir d'un certain rang.

Théorème 1.9. — Si la suite (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

Remarque 1.7. — Ce théorème, ainsi que quelques unes de ses conséquences, font l'objet de l'**exercice 1.12**. Il est préférable d'en connaître la démonstration plutôt que l'énoncé.

■ Séries usuelles

❑ Séries géométriques

Théorème 1.10. — Les séries $\sum q^k$, $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q|<1$. On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \\ \bullet \ \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{(série dite } \textit{géométrique "dérivée d'ordre } 1\text{")} \\ \bullet \ \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \quad \text{(série dite } \textit{géométrique "dérivée d'ordre } 2\text{")} \end{cases}$$

❑ Séries de Riemann

Définition 1.6. — On appelle *série de Riemann* toute série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel constant.

Théorème 1.11. — La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exemple 1.1. — Cas $\alpha = 1$: la série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique*. Elle est divergente.

❑ Séries exponentielles

Théorème 1.12. — Quel que soit le réel *x*, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Méthodes

Nature d'une série

Méthode 1.1. Comment utiliser la suite des sommes partielles ?

Si on sait calculer la somme partielle d'une série, alors il est facile de donner la nature de la série, et en prime, la valeur de sa somme lorsqu'elle converge.
Si on peut mettre le terme général d'une série sous la forme $v_{n+1} - v_n$, alors on sait calculer la somme partielle, puis conclure sur la nature de la série.

⇨ **Exercices 1.5, 1.7, 1.13**

Exemple 1. Étudier la nature de la série de terme général $\ln(1+1/n)$ (avec $n \geq 1$).

$$\forall n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1).$$

On en déduit que la suite (S_n) est de même nature que la suite $(\ln(n+1))_{n\geq 1}$, c'est-à-dire divergente. Par définition, la série de terme général $\ln(1+1/n)$ est donc divergente.

Exemple 2. Voir l'exemple de la **méthode 1.7** pour un cas de série convergente.

Méthode 1.2. Comment utiliser le critère d'équivalence ?

Si la série $\sum u_n$ est à termes positifs et si u_n est équivalent à v_n quand n tend vers l'infini, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
En revanche, en cas de convergence, on ne peut rien dire quant à leurs sommes.

⇨ **Exercices 1.1, 1.3, 1.8**

Exemple. Étudier, selon les valeurs du réel a strictement positif, la nature de la série de terme général $\dfrac{n^2+2}{n^a+1}$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

Comme a est strictement positif, on a : $\dfrac{n^2+2}{n^a+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^a} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{a-2}}$.

• Si $0 < a \leq 3$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{a-2}}$ diverge (série de Riemann de paramètre $a-2 \leq 1$).
Les séries étant à termes positifs, le critère d'équivalence s'applique : la série de terme général $\dfrac{n^2+2}{n^a+1}$ diverge également.

Méthodes

• Si $a > 3$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{a-2}}$ converge (série de Riemann de paramètre $a-2>1$). Les séries étant à termes positifs, le critère d'équivalence s'applique : la série de terme général $\dfrac{n^2+2}{n^a+1}$ converge également.

❑ Méthode 1.3. Comment utiliser le critère de comparaison ?

> On considère la série $\sum u_n$.
> • Si u_n est majoré par le terme général v_n d'une série convergente (au moins à partir d'un certain rang), et si les séries sont à termes positifs, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
> • Si u_n est minoré par le terme général w_n d'une série divergente (au moins à partir d'un certain rang), et si les séries sont à termes positifs, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

⇨ **Exercices 1.1, 1.6, 1.8, 1.10, 1.13**

Exemple. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $\ln(n) \geq 1$ et on en déduit que : $\forall n \geq 3,\ \dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge et comme les séries en jeu sont à termes positifs, on conclut, grâce au critère de comparaison, que la série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ diverge.

❑ Méthode 1.4. Comment utiliser le critère de négligeabilité ?

> Dans le cas où il existe un réel α strictement supérieur à 1 tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$,
> alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^\alpha})$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente (car $\alpha > 1$), donc, si u_n est positif (au moins à partir d'un certain rang), le critère de convergence par négligeabilité s'applique : la série $\sum u_n$ converge.
> Remarque : cette méthode est particulièrement efficace dans le cas où le terme général tend "très vite" vers 0. Il faut comprendre "suffisamment vite pour que, avec $\alpha > 1$, $n^\alpha u_n$ tende vers 0".
> On dit que l'on a effectué un test de Riemann.

⇨ **Exercice 1.1**

Exemple. Étudier la nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{n}}$.

On essaie de montrer que $e^{-\sqrt{n}}$ est négligeable au voisinage de $+\infty$, par rapport à $\frac{1}{n^2}$. En effet, en posant $X=\sqrt{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{X\to+\infty} X^4 e^{-X} = 0$. On en déduit que : $e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2})$.

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car de paramètre $\alpha = 2 > 1$) et comme les séries sont à termes positifs, le critère de convergence par négligeabilité s'applique : la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.

❑ Méthode 1.5. Comment utiliser le critère de d'Alembert ?

Ce critère est parfaitement adapté au cas d'une série à termes positifs dont le terme général s'exprime avec des produits car le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie bien.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut rien conclure.

⇨ **Exercices 1.1, 1.11**

Exemple. Pour tout réel x non nul, on pose : $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$. Montrer que la série de terme général u_n converge.

Pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ et on peut conclure grâce au critère de d'Alembert (la série est bien à termes positifs) que la série de terme général u_n converge.

Remarque. On vient de montrer que la série exponentielle est absolument convergente.
Le cas où x est nul est évident (la série dont le terme général est nul est convergente).

Méthodes