

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques, en physique ou chimie comme en sciences industrielles de l'ingénieur.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthode »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

**La partie « vrai/faux »** vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique-chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers la 2<sup>e</sup> année et **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne



# Sommaire

<b>I. PREMIER SEMESTRE</b> .....	1
1. Logique et raisonnements.....	3
2. Ensembles et applications.....	29
3. Nombres complexes et trigonométrie .....	49
4. Calculs algébriques .....	75
5. Techniques de calcul en analyse.....	99
6. Fonctions usuelles .....	127
7. Géométrie élémentaire dans le plan .....	151
8. Géométrie élémentaire dans l'espace .....	177
9. Équations différentielles linéaires .....	201
10. Dénombrement.....	225
11. Systèmes linéaires.....	245
<b>II. DEUXIÈME SEMESTRE</b> .....	273
12. Nombres réels et suites numériques.....	275
13. Limite et continuité des fonctions .....	305
14. Dérivabilité .....	335
15. Intégration.....	361
16. Développements limités.....	389
17. Polynômes.....	411
18. Calcul matriciel .....	437
19. Espaces vectoriels.....	457
20. Applications linéaires .....	481
21. Matrices et applications linéaires.....	505
22. Probabilités sur un univers fini.....	531
23. Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini.....	563
Index.....	587



Première partie

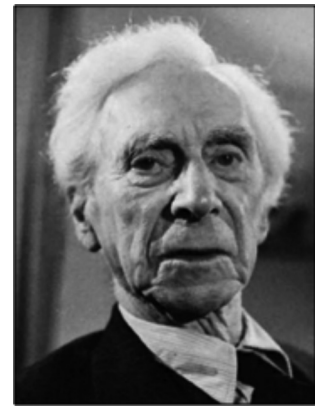
# **Premier semestre**



# Chapitre 1

## Logique et raisonnements

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier  $\cap$  et  $\cup$  désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note  $\exists$ , renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



**Bertrand Russell**  
1872-1970

## ■■ Objectifs

### ■ Les incontournables

- ▷ Manipuler les quantificateurs.
- ▷ Raisonner par implication ou par équivalence.
- ▷ Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- ▷ Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

### ■ Et plus si affinités...

- ▷ Appliquer une récurrence forte.
- ▷ Raisonner par analyse-synthèse.



# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Notions de logique

**Définition : Proposition** —. Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).

**Définition : Négation d'une proposition** —. Soit  $P$  une proposition. On appelle **négation** de  $P$  et on note  $\text{non } P$  la proposition définie par :

- $\text{non } P$  est vraie lorsque  $P$  est fausse ;
- $\text{non } P$  est fausse lorsque  $P$  est vraie.

**Définition : Conjonction de deux propositions** —. Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On appelle **conjonction** de  $P$  et  $Q$  la proposition notée  $P$  et  $Q$ , et définie de la manière suivante :

- $P$  et  $Q$  est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  sont vraies ;
- $P$  et  $Q$  est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.

**Définition : Disjonction de deux propositions** —. Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On appelle **disjonction** de  $P$  et  $Q$  la proposition notée  $P$  ou  $Q$ , et définie de la manière suivante :

- $P$  ou  $Q$  est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;
- $P$  ou  $Q$  est fausse lorsque  $P$  et  $Q$  sont fausses.

**Définition : Implication** —. Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On appelle **implication** de  $Q$  par  $P$  la proposition  $\text{non } P$  ou  $Q$ . Cette proposition se note  $P \Rightarrow Q$ .

**Vocabulaire** : la proposition  $P \Rightarrow Q$  se lit «  $P$  implique  $Q$  » ou encore « **si  $P$  alors  $Q$**  »

**Remarque** : lorsque  $P \Rightarrow Q$  est vraie, on dit que  $P$  est une **condition suffisante** pour avoir  $Q$ , ou que  $Q$  est une **condition nécessaire** pour avoir  $P$ .

**Définition : Réciproque** —. Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On appelle **réciproque** de  $P \Rightarrow Q$  l'implication  $Q \Rightarrow P$ .

**Définition : Équivalence** —. Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On appelle **équivalence** de  $P$  et  $Q$  la proposition  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$ . Cette proposition se note  $P \Leftrightarrow Q$ .

**Vocabulaire** : la proposition  $P \Leftrightarrow Q$  se lit «  $P$  **si et seulement si**  $Q$  ».

**Remarque** : lorsque  $P \Leftrightarrow Q$  est vraie,  $P$  est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir  $Q$ . Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

**Table de vérité des connecteurs logiques** :

P	Q	$\text{non } P$	$P$ et $Q$	$P$ ou $Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

**Remarque :** d'après cette table de vérité, si  $P$  et  $P \Rightarrow Q$  sont vraies alors  $Q$  est vraie. C'est le **principe de déduction**.

**Définition : Contraposée** —. Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. On appelle *contraposée de l'implication*  $P \Rightarrow Q$  l'implication  $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$

**Théorème 1.1.**— Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. L'implication  $P \Rightarrow Q$  et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

**Proposition 1.2.**— Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions. Alors :

- $\text{non } (P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
- $\text{non } (P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
- $\text{non } (P \Rightarrow Q) \iff P \text{ et } (\text{non } Q)$

## ■ Quantificateurs

Soit  $P(x)$  une propriété dépendant d'un paramètre  $x$ , où  $x$  est un élément d'un ensemble  $E$ .

**Définition : Quantificateur universel** —. On écrit :

$$\forall x \in E, P(x)$$

pour signifier que la propriété  $P(x)$  est vraie pour tous les éléments  $x$  de  $E$ .

**Vocabulaire :** le symbole  $\forall$  est appelé **quantificateur universel** et se lit « *quel que soit* ».

**Définition : Quantificateur existentiel** —. On écrit :

$$\exists x \in E, P(x)$$

pour signifier que la propriété  $P(x)$  est vraie pour au moins un élément  $x$  de  $E$ .

**Vocabulaire :** le symbole  $\exists$  est appelé **quantificateur existentiel** et se lit « *il existe* ».

**Proposition 1.3.**— **Négation des propositions avec quantificateurs** —.

- La négation de la proposition  $\forall x \in E, P(x)$   
est :  $\exists x \in E, \text{non } P(x)$ .
- La négation de la proposition  $\exists x \in E, P(x)$   
est :  $\forall x \in E, \text{non } P(x)$ .

**Remarque :** attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

## ■ Raisonnement par récurrence

**Théorème 1.4.— Propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$  —.** Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.

**Théorème 1.5.— Principe de récurrence —.** Soit  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant de  $n \in \mathbb{N}$ , et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si

- la proposition  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie,
- pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  implique  $\mathcal{P}(n + 1)$ ;

alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

**Théorème 1.6.— Récurrence double —.** Soit  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant de  $n \in \mathbb{N}$ , et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si

- les propriétés  $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0 + 1)$  sont vraies,
- pour tout entier  $n \geq n_0$ , ( $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n + 1)$ ) implique  $\mathcal{P}(n + 2)$ ;

alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

**Théorème 1.7.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —.** Soit  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant de  $n \in \mathbb{N}$ , et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si

- la proposition  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie,
- pour tout entier  $n \geq n_0$ , ( $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0 + 1)$  et  $\dots$  et  $\mathcal{P}(n)$ ) implique  $\mathcal{P}(n + 1)$ ;

alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .