

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie, en mathématiques et en sciences industrielles de l'ingénieur.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique-chimie comme ceux de mathématiques et de sciences industrielles de l'ingénieur vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Champ électrostatique	1
2. Potentiel électrostatique	27
3. Magnétostatique	57
4. Équations de Maxwell	85
5. Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS	113
6. Ondes électromagnétiques dans le vide	143
7. Réflexion d'OPPM à la surface d'un conducteur	181
8. Généralités sur les ondes et interférences lumineuses	221
9. Dispositifs interférentiels	257
10. Statique des fluides	297
11. Description d'un fluide en écoulement	313
12. Fluides visqueux et nombre de Reynolds	337
13. Énergétique des écoulements en conduite	361
14. Corps pur sous deux phases	391
15. Diffusion thermique	435
16. Thermodynamique des systèmes ouverts	457
17. Thermodynamique industrielle	489
18. Stabilité des systèmes linéaires	533
19. Montage à rétroaction : exemple de l'ALI	567
20. Oscillateurs électroniques	599
21. Traitement du signal : de l'analogique au numérique	629
22. Grandeurs standard de réaction, loi de Hess, effets thermiques	653
23. Équilibre et évolution d'un système chimique	695
24. Optimisation d'un procédé chimique	717
25. Diagrammes potentiel-pH	745
Annexes	785

Chapitre 1

Champ électrostatique

Expérimentateur très rigoureux, Charles **Coulomb** se consacre, à partir de 1781, essentiellement à l'étude de la physique. Grâce à des expériences précises et rigoureuses, il étudie la distribution des charges électriques sur une surface et établit les lois qui régissent l'attraction et la répulsion des charges électriques et des pôles magnétiques. Il construit en particulier une balance électrique grâce à laquelle il établit de manière expérimentale que l'attraction des charges électriques est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance. Fort justement, son nom est donné à l'unité de charge électrique dans le Système international.



Charles Coulomb
1736-1806

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La loi de Coulomb
- ▷ Les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge et les conséquences pour le champ électrostatique
- ▷ Le théorème de Gauss (pour le champ électrostatique et pour le champ gravitationnel) sous sa forme intégrale et locale
- ▷ La capacité d'un condensateur plan

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Déterminer la direction d'un champ électrostatique, à partir des symétries de la distribution de charges
- ▷ Déterminer les coordonnées spatiales dont dépendent les composantes du champ, à partir des invariances de la distribution de charges
- ▷ Expliciter un champ électrostatique en utilisant le théorème de Gauss
- ▷ Trouver des informations sur le champ par lecture d'une carte des lignes de champ

■ ■ Résumé de cours

■ Interaction électrique et champ

□ Charges électriques

La charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative, qui caractérise le comportement de la matière vis-à-vis de l'interaction électromagnétique ; elle peut être positive ou négative.

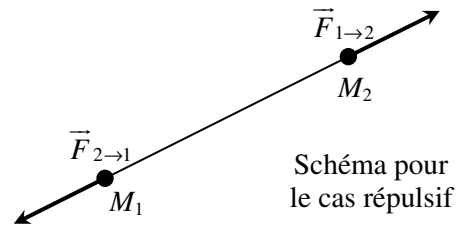
Elle est quantifiée : toutes les charges isolables sont multiples de la charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. La charge électrique est répartie de manière discontinue au niveau microscopique, là où sont les particules qui peuvent être considérées comme ponctuelles.

□ Loi de Coulomb

En électrostatique, on s'intéresse à des charges immobiles les unes par rapport aux autres. Alors les forces exercées par des charges q_1 et q_2 l'une sur l'autre sont données par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}$$

Elles sont attractives si les charges sont de signe opposé ($q_1 q_2 < 0$) et répulsives si les charges sont de même signe ($q_1 q_2 > 0$).



La constante ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide et vaut $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

□ Notion de champ électrostatique

On peut décrire indirectement l'interaction électrique en faisant intervenir la notion de champ :

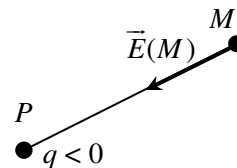
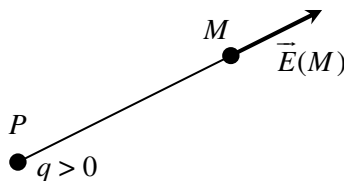
– des charges immobiles créent en un point M un champ électrostatique $\vec{E}(M)$;

– une charge q placée au point M subit alors une force électrique $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$.

□ Champ créé par une charge ponctuelle

Le champ créé en un point M par une charge q immobile en un point P est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

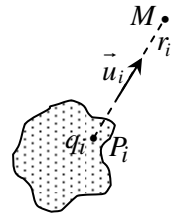


□ Principe de superposition, champ créé par une distribution discrète

Le champ créé par une charge est indépendant de la présence d'autres charges. De plus les forces s'additionnent vectoriellement, donc le champ créé par un ensemble de charges est la

somme vectorielle des champs créés par chaque charge individuellement. Ainsi le champ créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles q_i situées aux points P_i est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{u}_i}{r_i^2} \quad \text{où } \vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|} \text{ et } r_i = \|\overrightarrow{P_i M}\|.$$



■ Champ créé par une distribution continue de charges

□ Distribution volumique

Si $d\tau(P)$ est un volume élémentaire contenant la charge $dq(P)$ à l'instant t autour du point P

d'une distribution de charge (D), on définit la densité volumique de charge par $\rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau(P)}$

en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$. La charge totale de la distribution est alors obtenue par : $Q = \int_D \rho(P) d\tau(P)$, où

\int_D désigne ici la triple sommation continue sur (D).

Remarque

La densité volumique $\rho(P)$ est définie à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à une échelle de dimension assez faible à l'échelle macroscopique pour qu'elle soit localement représentative du milieu et de dimension suffisamment grande à l'échelle microscopique pour que la notion de moyenne ait un sens. Ainsi, $\rho(P)$ est une grandeur locale et moyennée. À cette échelle, la distribution est continue (l'aspect corpusculaire caractéristique de l'échelle atomique est lissé par le processus de moyenne), d'où l'usage de sommes continues.

□ Distribution surfacique

La distribution surfacique est la limite d'une réalité volumique où les charges sont réparties sur une petite épaisseur a avec une densité volumique de ρ , la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme, $\sigma = \lim_{a \rightarrow 0} \rho a$. La charge portée par une surface élémentaire

dS centrée sur P s'écrit : $dq = \sigma(P) dS$, où $\sigma(P)$ est la **densité surfacique de charge** au point P .

□ Distribution linéique

C'est la limite d'une réalité volumique « filiforme » lorsque sa section tend vers zéro.

La charge portée par un élément de longueur dl centré sur P s'écrit : $dq = \lambda(P) dl$, où $\lambda(P)$ est la **densité linéique de charge** au point P .

□ Correspondance entre les éléments de charge

Les éléments de charges dans les descriptions volumique, surfacique et linéique sont liés par :

$$dq = \rho d\tau = \sigma dS = \lambda dl.$$

■ Symétries de la distribution de charges et du champ

□ Principe de Curie

Le principe de symétrie de Curie postule que « les effets ont au moins les symétries des causes ». Appliqué à l'électrostatique, ce principe implique donc que le champ électrostatique a au moins les mêmes symétries que la distribution de charges.

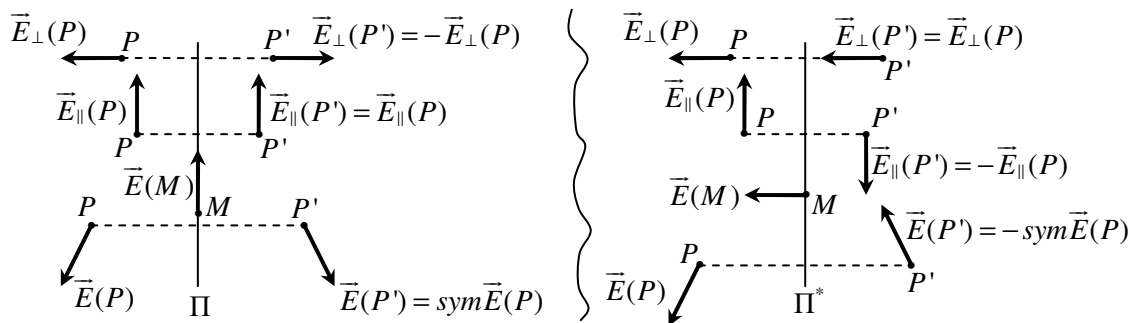
□ Plans de symétrie et d'antisymétrie

Plan de symétrie

Un plan Π est plan de symétrie d'une distribution volumique de charges si, quels que soient les points P et P' symétriques par rapport à Π , $\rho(P') = \rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan de symétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est le symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles orthogonales au plan sont opposées.

En particulier, *en un point M d'un plan de symétrie, le champ est contenu dans ce plan.*



Plan d'antisymétrie

Un plan Π^* est plan d'antisymétrie d'une distribution volumique de charges si, pour tous points P et P' symétriques par rapport à Π^* , $\rho(P') = -\rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan d'antisymétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales.

En particulier, *en un point M d'un plan d'antisymétrie, le champ est orthogonal à ce plan.*

⇒ **Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?**

□ Invariances

Invariance par translation

Si la distribution de charges est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un axe (symétrie de révolution)

Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un point (symétrie sphérique)

Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un point, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc d'aucune coordonnée angulaire.

⇒ **Méthode 1.2.** Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?

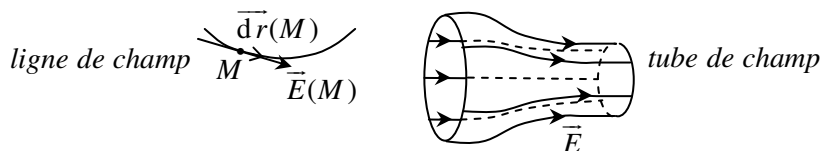
■ Lignes et tubes de champ

Une **ligne de champ** de \vec{E} est une courbe tangente au champ \vec{E} en chacun de ses points.

Équation d'une ligne de champ : elle est obtenue en écrivant que \vec{E} est localement tangent à un élément $d\vec{r}(M)$ de la ligne de champ au point M , c'est-à-dire en explicitant le fait que $\vec{E}(M) \wedge d\vec{r}(M) = \vec{0}$ dans le système de coordonnées adapté aux symétries du problème.

Un plan de symétrie contient entièrement une infinité de lignes de champ.

Un plan d'antisymétrie est orthogonal aux lignes de champ en chacun de ses points.

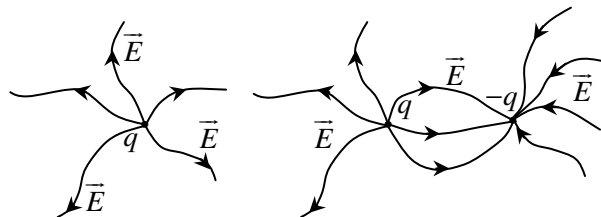


Un **tube de champ** est une surface (ouverte) formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée. On peut le fermer à ses extrémités pour former une surface fermée.

⇒ **Méthode 1.3.** Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?

□ Topographie des lignes de champ

L'équation locale de (M.G) traduit le fait que \vec{E} est à divergence non nulle en présence de charges c'est-à-dire de monopôles électrostatiques. Les lignes de champs de \vec{E} divergent à partir du point P vers l'infini si la charge est positive et convergent vers P depuis l'infini si elle est négative. De façon plus générale, il apparaît que \vec{E} diverge en partant de charges positives et converge vers des charges négatives électrostatiques ou vers l'infini comme le montre la cartographie des lignes de champ ci-dessous.



■ Théorème de Gauss

□ Flux du champ électrostatique

Le flux du champ électrostatique au travers d'une surface Σ est par définition :

$$\Phi(\vec{E})_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d s \vec{n}.$$

\vec{n} est un vecteur unitaire normal (localement) à la surface Σ . Le choix du sens de \vec{n} revient à orienter la surface, en fonction de l'orientation de son contour.

⇒ **Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?**

Si la surface n'est pas plane, \vec{n} n'est pas partout le même mais il est toujours dirigé du même côté de la surface.

Pour une surface fermée (entourant complètement un certain volume), \vec{n} est dirigé soit vers l'extérieur de la surface (on parle alors de flux sortant), soit vers l'intérieur (flux entrant).

□ Théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée Σ est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface, divisée par la constante ϵ_0 :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d s \vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

⇒ **Méthode 1.4. Utiliser le théorème de Gauss**

□ Formulation locale du théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss (M.G) : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ traduit localement le théorème de Gauss.

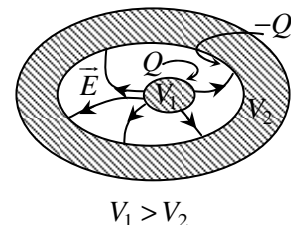
Remarque

Le théorème de superposition pour le champ découle de la linéarité de cette équation locale liant source et champ.

■ Condensateur

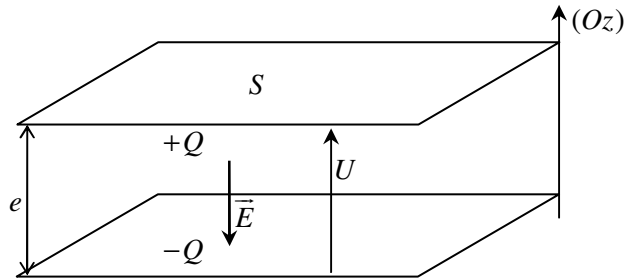
□ Notion de condensateur

Deux conducteurs en regard, portés à des potentiels différents, forment un condensateur lorsque toutes les lignes de champ partant de la surface du conducteur de plus haut potentiel arrivent sur celle de plus bas potentiel. Les deux surfaces en regard, dites armatures du condensateur, portent alors des charges opposées. Cette définition impose dans la pratique que l'un des conducteurs est creux et entoure totalement l'autre. Dans le cas contraire, les **effets de bords doivent être négligés**.



□ Description et modélisation

Un condensateur plan est constitué de deux surfaces planes conductrices appelées armatures, placées l'une en face de l'autre et séparées par un isolant. On note S la surface des armatures et e la distance qui les sépare. On considère ici que l'isolant est le vide.



Lorsque le condensateur est chargé, ses armatures portent des charges égales en valeur absolue et de signe opposé $-Q$ et $+Q$, réparties uniformément sur les armatures avec des densités surfaciques $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{S}$. Dans le cas où la distance entre les armatures est très inférieure à leurs dimensions, on peut modéliser le condensateur chargé par deux plans infinis uniformément chargés. Le champ électrostatique entre les armatures a pour expression :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z.$$

À l'extérieur des armatures : $\vec{E} = \vec{0}$.

□ Capacité

La capacité d'un condensateur est le rapport entre la charge portée par l'armature positive et la différence de potentiel entre les armatures : $C = \frac{Q}{U}$.

Pour un condensateur plan : $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{e}$.

□ Théorème de Gauss pour le champ de gravitation

La loi de Coulomb et la loi de la gravitation en physique classique ont des expressions tout à fait analogues. On peut donc transposer les notions vues en électrostatique, et notamment le théorème de Gauss, aux forces de gravitation. Il suffit pour cela de remplacer les charges par les

masses et la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-G$: $\oiint_{\Sigma} \vec{g}(M) \cdot dS \vec{n} = -4\pi G M_{\text{int}}$.

Dans cette expression, \vec{g} est le champ gravitationnel et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation.

■ ■ Méthodes

□ Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?

→ Préciser d'abord en quel point on recherche la direction du champ électrostatique. Cela peut être un point bien particulier, un point sur un axe, un point sur un plan ou n'importe quel point de l'espace.

→ Rechercher ensuite des plans de symétrie *qui passent par le point considéré* : la direction du champ est l'intersection de ces plans.

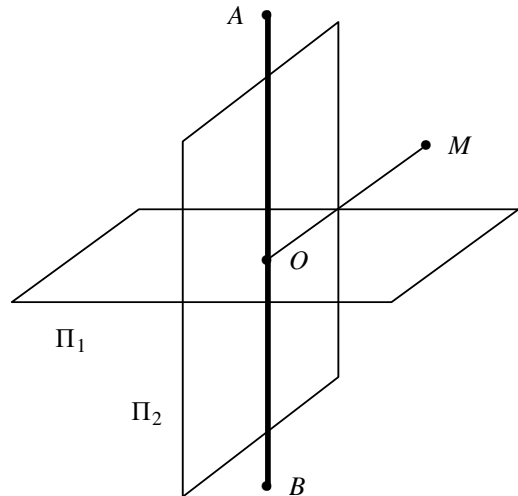
→ On peut également rechercher un plan d'antisymétrie *qui passe par le point considéré* : la direction du champ est alors orthogonale à ce plan.

⇒ Exercices 1.1 à 1.5

– *Exemple 1* : segment uniformément chargé en longueur.

On considère un fil rectiligne de longueur $L = AB$, de milieu O , qui porte une charge uniformément répartie avec une charge linéique λ . On s'intéresse au champ dans le plan médiateur du segment, Π_1 .

Le point M considéré est ici un point quelconque du plan médiateur du segment. Il y a deux plans de symétrie qui passent par ce point M : le plan médiateur Π_1 lui-même et le plan Π_2 qui contient le segment et le point M . La direction du champ est l'intersection de ces deux plans, donc la droite (OM) .



– *Exemple 2* : sphère uniformément chargée en volume.

On considère une sphère de centre O et de rayon R qui porte une charge uniformément répartie à l'intérieur avec une charge volumique ρ . On s'intéresse au champ en tout point de l'espace.

Le point M considéré est ici un point quelconque. Comme tout plan qui contient le centre de la sphère est plan de symétrie, il y a une infinité de plans de symétrie qui contiennent M . Quels que soient ceux que l'on considère, leur intersection est la droite (OM) qui est donc la direction du champ (on dit que le champ est radial) ; on note explicitement : $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e}_r$.

□ Méthode 1.2. Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?

Rechercher les invariances de la distribution de charges, puis choisir le bon système de coordonnées et déterminer celles dont dépend le champ électrostatique.

→ Invariance par translation le long d'un axe : utiliser la coordonnée linéaire sur cet axe. Le champ ne dépend pas de cette coordonnée.

→ Invariance par rotation autour d'un axe de symétrie : utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec l'axe de symétrie comme axe (Oz) . Les composantes du champ (donc sa norme) ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ .

→ Invariance par rotation autour d'un point de symétrie : utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec le point de symétrie comme origine. Les composantes du champ ne dépendent pas des coordonnées angulaires θ et φ .

⇒ Exercices 1.1 à 1.5

– Exemple 1 : fil infini uniformément chargé en longueur.

On considère un fil rectiligne infini qui porte une charge uniformément répartie avec une charge linéique λ .

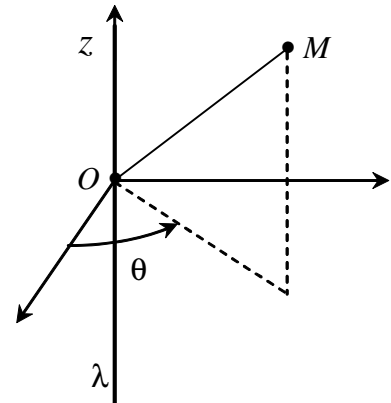
On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe (Oz) coïncidant avec le fil chargé, pour repérer la position d'un point M où l'on cherche le champ.

La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) , les composantes du champ ne dépendent donc pas de θ .

La distribution de charges est invariante par translation le long de l'axe (Oz) , le champ ne dépend donc pas de z .

Les composantes du champ ne dépendent donc que de r .

Il ne peut y avoir invariance par translation que si la distribution de charges s'étend jusqu'à l'infini (c'est un modèle).

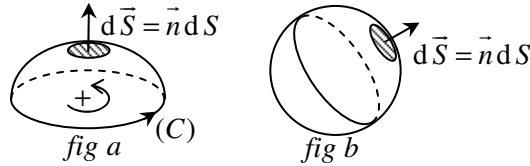


– Exemple 2 : sphère uniformément chargée en volume.

On a déjà vu que $\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. La distribution de charges est invariante par rotation autour du point O , la coordonnée radiale qui ici est **la norme du champ** ne dépend donc pas de θ et φ : $E_r(M) = E_r(r)$, on note explicitement : $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

□ Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?

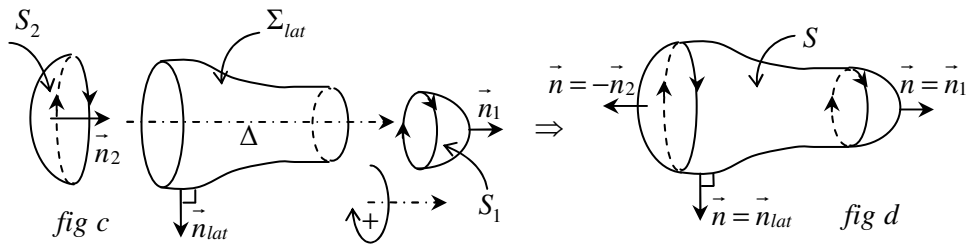
→ Normale à une surface ouverte (fig. a) : soit un contour (C) fermé orienté par un sens positif de parcours arbitrairement choisi. La normale à une surface ouverte s'appuyant sur ce contour est orientée suivant la règle du tire-bouchon relativement à ce sens positif.



→ Normale à une surface fermée (fig. b) : la normale locale à une surface fermée pointe toujours de l'intérieur vers l'extérieur de celle-ci.

→ Considérons à présent la situation fréquente d'une surface ouverte Σ_{lat} de révolution autour d'un axe orienté Δ de symétrie physique. Fermons cette surface par deux surfaces ouvertes S_1 et S_2 orientées s'appuyant sur deux contours que nous prendrons ici, par convention, de même orientation (conformément à la règle du tire-bouchon relativement à l'orientation de l'axe Δ).

La surface $S = \Sigma_{lat} \cup S_1 \cup S_2$ de normale \vec{n} est fermée.



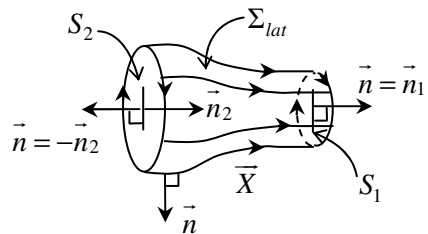
Il convient ici de ne pas confondre les surfaces ouvertes orientées S_1 et S_2 prises séparément (fig. c), dont les vecteurs unitaires sont \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , avec S_1 et S_2 appartenant à la même surface fermée S (fig. d).

⇒ De très nombreux exercices des chapitres d'électromagnétisme

Considérons un tube de champ de surface Σ_{lat} et fermons-le par deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur deux contours de même orientation s'appuyant sur le tube. La surface $S = \Sigma_{lat} \cup S_1 \cup S_2$ est fermée.

Notons $\phi = \oiint_S \vec{X} \cdot \vec{n} dS$ le flux de \vec{X} à travers S .

$$\phi = \iint_{\Sigma_{lat}} \vec{X} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n} dS, \text{ où } \vec{n} \text{ est la normale locale à } S \text{ pointant de}$$



l'intérieur vers l'extérieur de S . Ainsi, si l'on note $\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS$ le flux à travers S_1 partie de S fermée, avec en tout point de S_1 : $\vec{n} = \vec{n}_1$, il vient $\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = \phi_{S_1}$. Le flux de \vec{X} à travers S_1 , surface ouverte s'appuyant sur le tube, s'identifie donc avec celui à travers S_1 partie de S fermée. Au contraire, en tout point de S_2 , $\vec{n} = -\vec{n}_2$ et $\phi_2 = -\iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n}_2 \, dS_2 = -\phi_{S_2}$. Comme en tout point de Σ_{lat} , \vec{n} est orthogonal à \vec{X} , $\iint_{\Sigma_{lat}} \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS = 0$ et finalement $\phi = \phi_{S_1} - \phi_{S_2}$. Nous verrons que lorsque \vec{X} désigne un champ de vecteur tel que l'on a nullité du flux à travers toute surface fermée, $\phi = \oiint_S \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS = 0$ et $\phi_{S_1} = \phi_{S_2}$: il y a conservation du flux de \vec{X} à travers toute section d'un même tube de champ. Cela concernera le champ magnétostatique ainsi que le vecteur densité volumique de courant dans le cadre de l'ARQS ainsi qu'en statique.

□ Méthode 1.4. Comment utiliser le théorème de Gauss ?

Le théorème de Gauss permet de calculer simplement le champ électrostatique si la distribution de charges possède suffisamment de symétries.

→ La première étape consiste à prévoir la direction du champ et les variables dont il dépend (voir méthodes 23.1 et 23.2).

→ La deuxième étape est le choix de la surface *fermée* sur laquelle on applique le théorème de Gauss, c'est la surface de Gauss. Il faut respecter les critères suivants : en un point de la surface, le vecteur unitaire normal doit être soit colinéaire soit orthogonal au champ, et la **norme du champ doit être constante** sur toute partie de la surface où le flux n'est pas nul.

→ La troisième étape est l'expression du flux sortant en fonction du champ recherché : il faut souvent découper la surface en plusieurs parties, calculer les flux au travers de chacune d'elles et les ajouter ensuite.

→ La quatrième étape est le calcul de la charge contenue à l'intérieur de la surface puis la conclusion via le théorème de Gauss.

⇒ Exercices 1.1 à 1.5

On reprend l'exemple d'une sphère de centre O et de rayon R qui porte une charge uniformément répartie à l'intérieur avec une charge volumique ρ (sur le schéma, en hachuré). On considère un point M quelconque, à une distance $r = OM$ du centre de la sphère et on repère sa position en coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

On a déjà trouvé précédemment : $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

Choix de la surface de Gauss : la sphère Σ de centre O qui passe par le point M (donc de rayon r). Quel que soit le point M sur cette sphère, le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur est \vec{e}_r et est donc toujours colinéaire au champ. De plus, sur l'ensemble de la surface Σ , r ne varie pas et donc la norme du champ non plus.

$$\text{Expression du flux : } \Phi(\vec{E})_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{s} \vec{n}.$$

On remplace $\vec{E}(M)$ par $E_r(r)\vec{e}_r$ et \vec{n} par \vec{e}_r :

$$\Phi(\vec{E})_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} E_r(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r d\vec{s} = \iint_{\Sigma} E_r(r) d\vec{s}.$$

Comme $E_r(r)$ ne varie pas sur toute la surface Σ ,

$$\iint_{\Sigma} E_r(r) d\vec{s} = E_r(r) \iint_{\Sigma} d\vec{s}.$$

Enfin, $\iint_{\Sigma} d\vec{s}$ est la surface de la sphère Σ de rayon r qui vaut $4\pi r^2$.

$$\text{Finalement } \Phi(\vec{E})_{\Sigma} = 4\pi r^2 E_r(r).$$

Calcul de la charge Q_{int} contenue à l'intérieur de la sphère Σ dans deux cas :

Soit M est à l'extérieur de la sphère chargée, donc $r > R$ (cas représenté sur le schéma) ; soit M est à l'intérieur de la sphère chargée, donc $r < R$.

Dans le premier cas, la charge intérieure est la totalité de la charge contenue dans la sphère chargée de rayon R et vaut donc $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Dans le second cas, Σ est plus petite que la sphère chargée et la charge intérieure vaut $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

Il ne reste plus qu'à conclure avec le théorème de Gauss : $\Phi(\vec{E})_{\Sigma} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

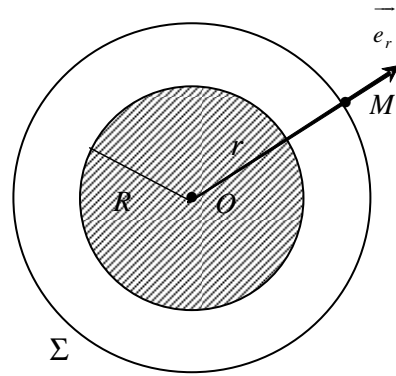
Dans le premier cas, cela donne $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$, et donc $E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$.

Dans le second cas, cela donne $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$, et donc $E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

On rassemble ces résultats en donnant l'expression vectorielle du champ : pour $r < R$ (M à l'intérieur), $\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$; pour $r > R$ (M à l'extérieur), $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.

Lien avec le champ créé par une charge ponctuelle Q en O : si on ramène la charge totale de la sphère $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ en son centre, le champ extérieur $E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ a la même expression que

celui qu'aurait cette charge ponctuelle Q en O : $E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

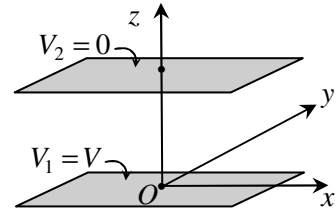


□ Méthode 1.5. Comment utiliser l'équation de Maxwell-Gauss sous sa forme locale ?

L'équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ renseigne localement sur la dépendance spatiale du champ. Bien entendu la méthode requiert une étude préalable des symétries et invariances de la distribution de charge.

⇒ **Nombreux exercices**

On considère un condensateur plan formé de deux armatures métalliques planes, rectangulaires et identiques, de surface S notées conducteurs 1 et 2, perpendiculaires à (Oz) et séparées l'une de l'autre par un diélectrique d'épaisseur e assimilable au vide. O est choisi au centre de l'armature 1. L'armature en $z=0$ est portée au potentiel V et celle en $z=e$ est maintenue à un potentiel nul. Les deux conducteurs sont considérés comme parfaits et à l'équilibre électrostatique, ainsi, leur charge intérieure est nulle et ils ne peuvent porter que des charges surfaciques opposées. On note σ la densité surfacique de charge sur l'armature positive. On néglige les effets de bords, ce qui revient à considérer les plans des armatures infinis ou plus précisément à considérer que e est très faible devant leur dimensions transversales. Les armatures sont porteuses de charges égales en valeur absolue et de signe opposé : $Q_1 = -Q_2 = Q$. On se place en coordonnées cartésiennes (x, y, z) rapportées au trièdre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Compte tenu des symétries on a : $\vec{E}(M) = E_z(M) \vec{e}_z$. La distribution de charge est invariante par toutes translations d'axe (Ox) et (Oy) . Ainsi, E_z ne dépendant que de z : $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$.

Appliquons l'équation de Maxwell-Gauss (forme locale du théorème de Gauss) dans le vide entre les armatures où la densité volumique de charge est nulle, il vient en coordonnées cartésiennes $\frac{\partial E_z(z)}{\partial z} = 0$. Ainsi E_z ne dépend pas de z . Finalement : $\vec{E}(M) = E_0 \vec{e}_z$ où E_0 est

constant. Le champ entre les armatures est donc uniforme.