

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques

PT/PT*

3^e édition actualisée

ouvrage coordonné par

Olivier LEUCK

Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)

Michel GOUMI

Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)

Ivan GOZARD

Professeur au lycée Carnot (Dijon)

Bertrand HAUCHECORNE

Professeur au lycée Pothier (Orléans)



COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen ; les figures par Olivier Leuck et Ivan Gozard.

ISBN 9782340-018686
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2017
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique et de chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Algèbre linéaire	3
2. Déterminants.....	49
3. Réduction des endomorphismes et des matrices	75
4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle	125
5. Séries numériques.....	155
6. Espaces préhilbertiens	189
7. Espaces probabilisés.....	223
8. Intégrales généralisées	259
9. Courbes planes	293
10. Équations différentielles et systèmes différentiels	337
11. Séries entières.....	385
12. Isométries d'un espace euclidien.....	427
13. Coniques	455
14. Fonctions de deux ou trois variables réelles.....	491
15. Intégrales dépendant d'un paramètre	545
16. Courbes et surfaces dans l'espace.....	571
17. Variables aléatoires discrètes	615
Index.....	665

Chapitre 1

Algèbre linéaire

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX^e siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n -uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré.

On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.



Giuseppe Peano
1858-1932

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Montrer qu'une famille est libre, génératrice dans un espace vectoriel de dimension quelconque
- ▷ Justifier qu'une application est linéaire
- ▷ Reconnaître un hyperplan
- ▷ Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels, ainsi que de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et donc de projecteur
- ▷ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire
- ▷ Utiliser le théorème du rang.

■ Et plus si affinités...

- ▷ Établir que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension finie ou non
- ▷ Calculer la trace d'un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

■ ■ Résumé de cours

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

■ Familles génératrices, familles libres, bases

Soit I un ensemble quelconque.

◆ Combinaisons linéaires

Définition : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(x_i)_{i \in I}$ toute somme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ dans laquelle $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires appelés **coefficients**, tous nuls sauf éventuellement un nombre fini.

Commentaire : L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est un sous-espace vectoriel de E , noté $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré par la famille** $(x_i)_{i \in I}$.

◆ Familles libres, familles génératrices

Définition : Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.

Commentaires : La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si toute combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ vérifie $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

▷ La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite **liée** lorsqu'elle n'est pas libre. Dans ce cas, il existe une partie finie J de I , et une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \in J}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0.$$

Proposition 1.1 — Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre ;
- (ii) pour toute partie finie J de I , la famille $(x_j)_{j \in J}$ est libre.

Commentaire : Si J est une partie de I , la famille $(x_j)_{j \in J}$ est une sous-famille de la famille $(x_i)_{i \in I}$. La proposition précédente se résume de la manière suivante : une famille est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Exemple : Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés est libre.

Définition : La famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une famille **génératrice** de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs x_i .

Commentaire : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E ;
- (ii) $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$;

(iii) pour tout vecteur x de E , il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ tous nuls sauf un nombre fini telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

◆ Base

Définition : Une famille libre et génératrice de E est appelée une **base** de E .

Proposition 1.2 — Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E ;
- (ii) tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_i .

Commentaire : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour tout vecteur x de E , il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ tous nuls sauf un nombre fini telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i.$$

Pour tout i , le scalaire λ_i s'appelle **la $i^{\text{ième}}$ coordonnée** ou **composante** de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

Exemples : $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}[X]$.

▷ La famille $(e_i)_{i \in [1, n]}$, où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 se trouvant en $i^{\text{ième}}$ position) forme une base de \mathbb{K}^n appelée base canonique de \mathbb{K}^n .

▷ Toute famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant, pour tout k , $\deg(P_k) = k$, est une base de $\mathbb{K}[X]$.

◆ Cas des espaces vectoriels de dimension finie

On étend à des familles indexées par un ensemble quelconque les propriétés rencontrées en PTSI dans le cadre de famille finie.

Proposition 1.3 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

- (i) De toute famille génératrice, on peut extraire une base de E .
- (ii) Toute famille libre de E est finie et a au plus n éléments.
- (iii) Toute base de E est finie et contient n éléments.

■ Somme, somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition : Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $0_E \in F$;
- (ii) $x, y \in F \implies x + y \in F$;
- (iii) $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x \in F$.

Commentaire : L'ensemble F , avec les lois induites par celles de E , est un espace vectoriel. Ceci justifie la terminologie « sous-espace vectoriel ».

◆ Somme

Soit m un entier non nul et $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E .

Définition : On appelle *somme des sous-espaces vectoriels* $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i=1}^m F_i = \left\{ \sum_{i=1}^m f_i \mid (f_i) \in \prod_{i=1}^m F_i \right\}.$$

Commentaire : Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de E car il est non vide, stable par combinaison linéaire. On le note également $F_1 + F_2 + \dots + F_m$ et il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les F_i .

◆ Somme directe

Soit m un entier non nul et $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E ; on note F la somme des F_i :

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_m.$$

Définition : On dit que la somme F des F_i est *directe* si tout vecteur de F se décompose de manière unique en une somme de vecteurs de F_i . On note alors :

$$F = \bigoplus_{i=1}^m F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m.$$

Proposition 1.4 — Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la somme F des F_i est directe ;
- (ii) les hypothèses $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$ et $f_1 + f_2 + \dots + f_m = 0$ impliquent

$$f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0.$$

◆ Décomposition en somme directe

Définition : On dit que E est *somme directe* des F_i si la somme des F_i est directe et égale à E , autrement dit si :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m.$$

Commentaires : Lorsque E est somme directe des F_i , on dit que la famille $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une *décomposition en somme directe de E* .

▷ Dans le cas où $m = 2$, dire que E est somme directe de F_1 et F_2 est équivalent à dire que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E .

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

Proposition 1.5 — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) E est somme directe des F_i ;
- (ii) tout vecteur de E se décompose de manière unique en une somme de vecteurs de F_i ;
- (iii) $E = F_1 + F_2 + \dots + F_m$ et les hypothèses $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m, f_1 + f_2 + \dots + f_m = 0$ impliquent $f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0$.

◆ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et que la famille $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une décomposition en somme directe de E :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Proposition 1.6 — Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, soit \mathcal{B}_i une base de F_i . La réunion des bases \mathcal{B}_i est une base de E .

Définition : On appelle *base adaptée à la décomposition en somme directe* $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ toute base obtenue comme réunion de bases des F_i .

◆ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

On rappelle ci-dessous les différentes caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires, lorsque E est de dimension finie.

Théorème 1.7 — Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) F et G sont supplémentaires dans E ;
- (ii) $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$;
- (iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

■ Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que E est de dimension $n \geq 2$.

Définition : On appelle *hyperplan* de E tout espace admettant une droite comme supplémentaire.

Proposition 1.8 — Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement s'il est de dimension $n - 1$.

◆ Équation d'un hyperplan

Théorème 1.9 — Soit F un sous-espace vectoriel de E et \mathcal{B} une base de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) F est un hyperplan de E ;
- (ii) il existe des scalaires a_1, \dots, a_n non tous nuls tels que pour tout $x \in E$:

$$x \in F \quad \iff \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 ;$$

égalité dans laquelle x_1, \dots, x_n sont les coordonnées de x dans \mathcal{B} .

Commentaire : Les hyperplans de \mathbb{K}^2 sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^2 est une droite vectorielle si et seulement s'il admet une équation du type $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Théorème 1.10 — Soit \mathcal{B} une base de E et deux familles de scalaires non tous nuls, (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) , telles que pour tout $x \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0.$$

Il existe alors un scalaire λ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_i = \lambda a_i.$$

Commentaire : Fixons \mathcal{B} une base de E et soit F un hyperplan de E . D'après le théorème 1.9, il existe une famille non nulle de scalaires (a_1, \dots, a_n) telle que pour tout $x \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} :

$$x \in F \quad \Longleftrightarrow \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

D'après le théorème 1.10, ces scalaires sont définis à une constante multiplicative près. On dit que $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est une **équation de l'hyperplan F dans la base \mathcal{B}** .

◆ Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.11 — Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.

Théorème 1.12 — Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

Commentaire : Toute droite vectorielle de \mathbb{K}^3 est intersection de deux plans vectoriels. Elle est définie par un système d'équations du type

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (α, β, γ) sont des éléments de \mathbb{K}^3 non proportionnels.

■ Application linéaire, matrice (rappel de PTSI)

On désigne par E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Définition : Une application $u : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Notation : On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

Commentaires : $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Lorsque E et F sont de dimension finie, on a : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

▷ Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E .

▷ Une application linéaire de E dans F bijective est appelée **isomorphisme**.

▷ On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F .

▷ Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. En particulier tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .