

**PRÉPAS SCIENCES**

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Physique

# PSI/PSI\*

**3<sup>e</sup> édition actualisée**

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL

*Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)*

Christophe BERNICOT

*Professeure au lycée Dupuy de Lôme (Lorient)*

Régis BOURDIN

*Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)*

François-Xavier COQ

*Professeur au lycée Pothier (Orléans)*

Vincent FRATICELLI

*Professeur au lycée Pothier (Orléans)*

Ludovic MENGUY

*Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)*

Vincent PARMENTIER

*Professeur au lycée Pothier (Orléans)*

Jean Lou REYNIER

*Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)*

Alban SAURET

*Chercheur à l'ENS Cachan*

Nicolas TANCREZ

*Professeur au lycée Saint-Louis (Paris)*



# COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur [www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)



ISBN 9782340-027473  
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2018  
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques en physique, en chimie et en sciences industrielles de l'ingénieur.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

**La partie « vrai/faux »** permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie et de mathématiques vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

# Sommaire

1. Stabilité des systèmes linéaires .....	1
2. Rétroaction : exemple de l'ALI .....	35
3. Oscillateurs électroniques .....	69
4. Traitement du signal : de l'analogique au numérique .....	101
5. Modulation-démodulation .....	129
6. Statique des fluides .....	157
7. Description d'un fluide en écoulement .....	177
8. Fluides visqueux et nombre de Reynolds .....	201
9. Diffusion thermique .....	241
10. Diffusion de particules .....	277
11. Bilans pour les fluides en écoulement .....	301
12. Champ électrostatique .....	349
13. Potentiel électrostatique .....	377
14. Magnétostatique .....	409
15. Équations de Maxwell .....	439
16. Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS .....	471
17. Milieux ferromagnétiques .....	511
18. Puissance électrique en régime sinusoïdal forcé .....	543
19. Conversion statique de puissance .....	563
20. Les contacteurs électromagnétiques en translation .....	585
21. Machine synchrone .....	607
22. Machine à courant continu .....	641
23. Conversion électronique statique .....	673
24. Propagation unidimensionnelle non dispersive .....	705
25. Ondes sonores dans les fluides .....	749
26. Ondes électromagnétiques dans le vide .....	785
27. Propagation unidimensionnelle dispersive .....	819
28. Propagation dans un conducteur et un plasma .....	843
29. Réflexion d'OPPM à la surface d'un conducteur .....	877
Annexes .....	909
1. Formulaire d'analyse vectorielle .....	910
2. Éléments d'analyse spectrale .....	914
3. Le minimum de savoir-faire en mathématique .....	920
4. Constantes fondamentales et ordres de grandeur classiques .....	926
Index .....	927

# Chapitre 1

# Stabilité

# des systèmes

# linéaires

Pierre-Simon **Laplace** est considéré comme un des plus grands mathématiciens et physiciens de la fin du XVIII<sup>e</sup> et du début du XIX<sup>e</sup> siècle. Cependant, sa véritable passion fut l'astronomie. Ses travaux sur la gravitation universelle l'ont amené à étudier de nombreuses méthodes de calcul, en particulier dans le domaine des équations différentielles.

Son nom reste attaché à la théorie du déterminisme suivant laquelle l'avenir du monde est entièrement déterminé par son état actuel.



**Pierre-Simon Laplace**  
1749-1827

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les critères caractérisant le fonctionnement linéaire d'un système
- ▷ La représentation spectrale d'un signal périodique et sa signification
- ▷ La signification de la fonction de transfert
- ▷ Les critères de stabilité d'un système linéaire

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Déterminer une fonction de transfert
- ▷ Identifier la nature d'un filtre à partir du schéma ou de la fonction de transfert
- ▷ Prévoir le signal de sortie ainsi que sa composition spectrale à partir de la fonction de transfert
- ▷ Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel ou temporel
- ▷ Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

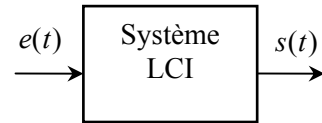
# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Le système linéaire continu invariant

### □ Définitions

Soit un **système** (circuit électrique, machine, ...) donnant à une entrée  $e(t)$  une réponse  $s(t)$  en sortie.

De manière générale,  $e$  et  $s$  peuvent être des grandeurs électriques, mécaniques, thermodynamiques... Par exemple  $e(t)$  peut être le courant d'alimentation d'un moteur, et  $s(t)$  la vitesse de rotation de ce moteur. L'étude est ici limitée aux **systèmes linéaires, continus, invariants** :



→ **Linéaire** : si une entrée  $e_1(t)$  donne une réponse en sortie  $s_1(t)$  et une entrée  $e_2(t)$  donne une réponse en sortie  $s_2(t)$ , alors une entrée  $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$  avec  $k_1$  et  $k_2$  constantes donnera une sortie  $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$  ;

→ **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies pour tout temps ;

→ **Invariant** : son comportement dans le temps reste inchangé ; si l'on reproduit une même entrée à deux instants différents, les réponses seront identiques (décalées de ce même temps).

### □ Propriété

Soit un signal d'entrée sinusoïdal permanent  $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Une propriété remarquable des systèmes linéaires (en régime permanent) est de donner nécessairement en sortie un signal également **sinusoïdal** et de **même pulsation**  $\omega$  qui s'écrit donc  $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi')$ . On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires.

Prévoir la réponse en sortie d'un système LCI se résume donc à rechercher  $(s_0 / e_0)$  rapport des amplitudes, et  $(\varphi' - \varphi)$  le déphasage.

## ■ La fonction de transfert

### □ Fonction de transfert

Introduisons les notations complexes associées respectivement à  $e(t)$  et  $s(t)$  :

$$\underline{e} = e_0 \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{E} \exp(j\omega t) \text{ avec } \underline{E} = e_0 \exp(j\varphi) \text{ et}$$

$$\underline{s} = s_0 \exp(j(\omega t + \varphi')) = \underline{S} \exp(j\omega t) \text{ avec } \underline{S} = s_0 \exp(j\varphi').$$

La fonction de transfert est par définition :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{s_0}{e_0} e^{j(\varphi' - \varphi)}$$

⇒ **Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel**

Compte tenu de la propriété d'isomorphisme précédemment citée, pour déterminer, en régime permanent, le signal de sortie  $s(t)$  réponse d'un signal  $e(t)$  sinusoïdal, il suffit de connaître  $\underline{H}$  à  $\omega$  :

→ le module de  $\underline{H}$ , appelé **gain**, donne  $(s_0 / e_0)$  rapport des amplitudes ;

→ l'argument de  $\underline{H}$  donne  $(\varphi' - \varphi)$ , appelé **avance de phase** (ou déphasage) du signal de sortie sur le signal d'entrée.

Dans le domaine temporel, un signal d'entrée  $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$  donne donc une réponse

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi') = \left| \underline{H}(j\omega) \right| e_0 \cos(\omega t + \varphi + \arg(\underline{H}(j\omega)))$$

⇒ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

### □ Systèmes régis par une équation différentielle à coefficients constants

→ Dans le cas d'un circuit électronique associant par exemple des composants  $R$ ,  $L$  ou  $C$ , les relations liants tensions et courants peuvent s'écrire dans le domaine temporel sous forme d'équations différentielles linéaires :  $u = Ri$ ,  $u = L \frac{di}{dt}$ ,  $i = C \frac{du}{dt}$ . En les combinant judicieusement à l'aide de la loi des mailles et de la loi des nœuds, il est toujours possible d'obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant  $s(t)$  à  $e(t)$  de la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

L'ordre du filtre est  $n$  avec  $n \geq m$ . Nous nous limiterons à l'ordre 2 pour la suite.

⇒ **Méthode 1.2. Détermination directe de l'équation différentielle dans le domaine temporel**

→ Utilisons maintenant les notations complexes (domaine fréquentiel). Remarquant que la dérivée temporelle de  $\exp(j\omega t)$  est  $j\omega \cdot \exp(j\omega t)$ , l'équation différentielle se simplifie :

$$b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 (j\omega)^2 \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + a_2 (j\omega)^2 \underline{e} \text{ soit : } \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}$$

La fonction de transfert se présente donc sous la forme d'une fraction rationnelle de  $j\omega$ .

### □ Notation de Laplace et transposition entre domaine temporel et domaine fréquentiel

On utilise la notation symbolique de Laplace  $H(p)$ ,  $p$  valant  $j\omega$  dans le domaine fréquentiel, mais  $p$  étant aussi l'opérateur  $[d/dt]$  dans le domaine temporel. Il est ainsi possible de passer facilement de la fonction de transfert à l'équation différentielle et réciproquement :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \Leftrightarrow [b_0 + b_1 p + b_2 p^2] s(t) = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2] e(t) \text{ avec } p = \frac{d}{dt}$$

⇒ **Méthode 1.3. Détermination de l'équation différentielle dans le domaine temporel à partir de la fonction de transfert**



## ■ La stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

### □ Étude à partir de l'équation différentielle

Pour une entrée  $e(t)$  donnée, la solution  $s(t)$  de l'équation différentielle linéaire à coefficients

constants  $b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$  est la somme de :

→ une solution particulière  $s_p(t)$  de l'équation complète ;

→ la solution générale  $s_H(t)$  de l'équation homogène  $b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0$ .

**Un système est stable lorsque :**  $\boxed{s_H(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0}$ .

La réponse  $s(t)$  d'un système stable présente alors 2 phases :

→ au début, le régime transitoire est décrit par  $s(t) = s_p(t) + s_H(t)$  ;

→ au bout d'un certain temps  $s_H(t) \approx 0$  : le régime permanent (ou établi) est atteint, et  $s(t) = s_p(t)$ . Le régime établi d'un système stable est décrit par la solution particulière.

### Remarque

Pour un signal permanent en entrée  $e(t)$  d'un système stable, on se contente de rechercher le signal **permanent**  $s_p(t)$ . La notion de filtre n'a de sens que pour les systèmes stables. Dans ce cas, il n'est pas utile d'expliciter le régime transitoire.

Par contre, dans le cas où  $s_H(t)$  ne tend pas vers 0, **le régime permanent  $s_p(t)$  n'est jamais atteint : le système est instable.**

C'est donc l'étude du régime transitoire qui permet de déterminer la stabilité d'un système.

→ Stabilité d'un système d'ordre 1

L'équation homogène s'écrit  $b_0 s(t) + b_1 p s(t) = 0$  avec  $p = [d/dt]$ , dont la solution est  $s_H(t) = A \exp(-b_0 / b_1)$ , qui tend vers 0 si et seulement si  $b_0$  et  $b_1$  sont de même signe.

→ Stabilité d'un système d'ordre 2

L'équation homogène s'écrit  $[b_0 + b_1 p + b_2 p^2]s(t) = 0$ . On remarque que l'écriture avec les notations de Laplace donne directement l'équation caractéristique  $b_0 + b_1 p + b_2 p^2 = 0$ . Il existe 3 types de solutions selon le signe du  $\Delta_{EC}$  (régime aperiodique, critique ou pseudo-periodique). Dans tous les cas, les termes en exponentiel doivent tendre vers 0 pour avoir stabilité. Mathématiquement, cela se traduit par la partie réelle des 2 solutions de l'équation caractéristique qui doivent être négatives. On peut vérifier que c'est le cas si et seulement si  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont de même signe.

**En conclusion, un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.**

⇒ Méthode 1.9. Étude de la stabilité dans le domaine temporel

### □ Étude à partir de la fonction de transfert

En revenant à la notation de Laplace  $H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$ , on remarque que les coefficients de l'équation homogène apparaissent directement au dénominateur.

**Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients  $b_i$  du polynôme au dénominateur de  $H$  sont de même signe.**

Remarque

Dans le cas d'un circuit ne contenant que des éléments passifs, le système est nécessairement stable. La seule exception envisageable est le cas d'un circuit sans aucune résistance ( $LC$  par exemple), qui est purement théorique. Hormis cette exception, il faut utiliser au moins un composant actif tel un ALI (voir chapitre suivant) pour apporter de l'énergie et déstabiliser le système.

Nous nous placerons dans le cas d'un système stable pour la suite du résumé de cours, et nous limiterons donc l'étude au régime permanent (ou établi).

⇒ **Méthode 1.8. Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de transfert**

## ■ Le signal périodique non sinusoïdal

### □ La décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

J. Fourier a déterminé que tout signal périodique de période  $T_0$  peut se décomposer en une somme infinie de sinus et de cosinus, appelée série de Fourier :

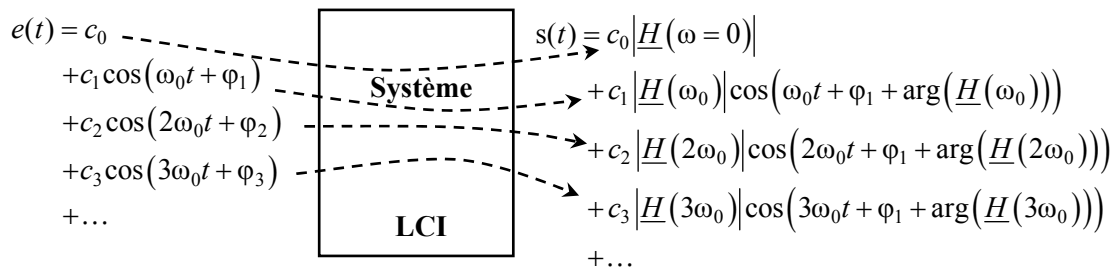
$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \text{avec } \omega_0 = 2\pi / T_0,$$

qui peut aussi s'écrire  $e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$ .

$c_0$  est la **composante continue** (valeur moyenne du signal),  $\omega_0$  est la pulsation la plus basse que l'on appelle **fondamentale**. Les termes de pulsation  $\omega_n = n\omega_0$  sont les **harmoniques de rang  $n$** .

### □ Détermination du signal de sortie et notion de filtrage

Tout signal périodique  $e(t)$  peut s'écrire sous forme de série de Fourier, et l'on sait déterminer la réponse en sortie pour chaque signal sinusoïdal placé en entrée. La série de Fourier du signal de sortie  $s(t)$  est donc simplement la somme des réponses correspondant à chaque terme de la série de  $e(t)$ .



⇒ Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi

### □ Modèles simples de filtres passifs

On se reportera à l'étude faite en première année. Seuls les principaux types de filtres d'ordre 1 et 2 sont rappelés ici. Notons  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite, et  $Q$  le facteur de qualité.

	Filtre passe-bas	Filtre passe-bande	Filtre passe-haut
Gabarit			
Filtre d'ordre 1	$H_0 \frac{1}{1 + jx}$	N'existe pas	$H_0 \frac{jx}{1 + jx}$
Filtre d'ordre 2	$H_0 \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$	$H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$	$H_0 \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$

Dans le diagramme de Bode, les pentes des filtres d'ordre 1 ne peuvent pas dépasser  $\pm 20$  dB par décade, et les filtres d'ordre 2  $\pm 40$  dB par décade.