

**PRÉPAS SCIENCES**

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Sciences industrielles de l'ingénieur

## MP/MP\* – PSI/PSI\*

ouvrage écrit par

Patrick BEYNET

*Professeur au lycée Rouvière (Toulon)*



COLLECTION  
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur [www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)



*Un étudiant n'est pas un sac que l'on remplit mais une bougie que l'on enflamme.*

Vladimir Arnold

ISBN 9782340-027657

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2018  
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en sciences industrielles pour l'ingénieur comme en mathématiques, physique ou chimie.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

**La partie « vrai/faux »** permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de SII comme ceux de physique, de chimie et de maths vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

# Sommaire

1. Cinématique du solide indéformable .....	1
2. Statique du solide indéformable .....	43
3. Étude des chaînes de solides .....	87
4. Cinétique du solide indéformable .....	127
5. Principe fondamental de la dynamique .....	165
6. Application du théorème de l'énergie cinétique .....	207
7. Précision et rapidité des S.L.C.I. ....	245
8. Stabilité des S.L.C.I. ....	289
9. Contrôle des S.L.C.I. ....	323
10. Modélisation multiphysique .....	361
11. Systèmes numériques .....	389
Table de notations .....	421
Unités .....	427

# Chapitre 1

# Cinématique du solide indéformable

Le lancement des premiers modules de la **Station spatiale internationale** a été réalisé en 1998. C'est un projet piloté par la **NASA**, développé conjointement avec l'agence spatiale fédérale russe **FKA**, et avec la participation des agences spatiales européenne **ESA**, japonaise **JAXA** et canadienne **ASC**. La Station spatiale internationale est le plus grand des objets artificiels placés en orbite terrestre. Après de nombreuses évolutions, elle s'étend aujourd'hui sur 110 m de longueur, 74 m



de largeur et 30 m de hauteur. Sa masse est d'environ 400 tonnes. La station est occupée en permanence par un équipage international effectuant des expériences scientifiques. L'astronote **Thomas Pesquet** a été le dixième Français à partir dans l'espace en décollant le 17 novembre 2016 à bord de Soyouz MS-03 dont l'équipage a occupé la station pendant six mois.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les notions de trajectoire, vitesse et accélération d'un point en mouvement par rapport à un repère
- ▷ Le torseur cinématique caractérisant le mouvement d'un solide par rapport à un autre
- ▷ La relation de composition des torseurs cinématiques
- ▷ Le torseur cinématique d'une liaison normalisée.

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Proposer une modélisation des liaisons avec une définition précise de leurs caractéristiques géométriques
- ▷ Associer le paramétrage au modèle cinématique retenu
- ▷ Associer à chaque liaison son torseur cinématique
- ▷ Déterminer une trajectoire, un vecteur vitesse ou un vecteur accélération
- ▷ Déterminer le torseur cinématique d'un solide.

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Trajectoire, vitesse et accélération

### □ Trajectoire d'un point

La trajectoire d'un point P dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du temps dans R. On la note  $T(P/R)$ .

### □ Formule de Bour

Soient un vecteur  $\vec{U}$  quelconque et deux bases  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{B_0} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{B_1} + \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{U}$$

où  $\vec{\Omega}(B_1/B_0)$  est le taux de rotation de  $B_0$  par rapport à  $B_1$ .

### □ Vecteur vitesse

Soit un point P en mouvement dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\vec{V}(P/R) = \left. \frac{d\overline{OP}}{dt} \right|_R \quad [\text{m.s}^{-1}]$$

### □ Vecteur accélération

Soit un point P en mouvement dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\vec{a}(P/R) = \left. \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d^2\overline{OP}}{dt^2} \right|_R \quad [\text{m.s}^{-2}]$$

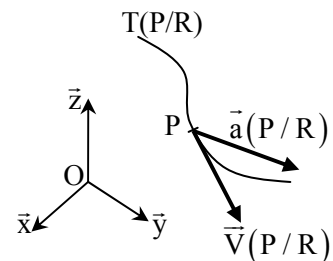
⇒ **Méthode 1.1. Détermination d'un vecteur vitesse ou accélération par application de la formule de Bour**

### Remarques

– Le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire  $T(P/R)$  au point P, et orienté dans le sens du mouvement.

Le vecteur accélération possède une composante tangente à la trajectoire et une composante normale, dirigée vers l'intérieur de la trajectoire lorsqu'elle possède une courbure.

– Pour le calcul d'un vecteur vitesse ou d'un vecteur accélération, aucune base de projection n'est à privilégier. On s'attachera à avoir un résultat concis.



## ■ Torseur cinématique d'un solide indéformable

### □ Définition

Au point de réduction M, le torseur cinématique caractérisant le mouvement du solide i en mouvement par rapport au solide j est défini par :

$$\left\{ \mathbf{V}(i/j) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(i/j) \\ \overline{\mathbf{V}}(M, i/j) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array} \right\}_{\text{base de projection}}$$

$\overline{\Omega}(i/j)$  : résultante du torseur cinématique ou taux de rotation [rad.s<sup>-1</sup>]

$\overline{\mathbf{V}}(M, i/j)$  : moment résultant du torseur cinématique ou vitesse linéaire [m.s<sup>-1</sup>]

Remarques

–  $\overline{\mathbf{V}}(P/R) \neq \overline{\mathbf{V}}(P, S/R)$  et  $\overline{\mathbf{a}}(P, S/R) \neq \left. \frac{d\overline{\mathbf{V}}(P, S/R)}{dt} \right|_R$  sauf si le point P est fixe dans le repère lié au solide indéformable S.

–  $\overline{\mathbf{a}}(M, S_n/S_1) \neq \sum_{i=2}^n \overline{\mathbf{a}}(M, S_i/S_{i-1})$  sauf si les termes de Coriolis sont nuls.

### □ Propriétés

Relation de Varignon

$$\overline{\mathbf{V}}(A, S/R) = \overline{\mathbf{V}}(B, S/R) + \overline{\mathbf{AB}} \wedge \overline{\Omega}(S/R)$$

Addition

$$\left\{ \mathbf{V}(3/2) \right\} + \left\{ \mathbf{V}(2/1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(3/2) + \overline{\Omega}(2/1) \\ \overline{\mathbf{V}}(M, 3/2) + \overline{\mathbf{V}}(M, 2/1) \end{array} \right\}_M$$

Invariants

– Premier invariant : la résultante  $\overline{\Omega}(i/j)$

– Second invariant : l'automoment

$$\overline{\Omega}(i/j) \cdot \overline{\mathbf{V}}(A, i/j) = \overline{\Omega}(i/j) \cdot \overline{\mathbf{V}}(B, i/j)$$

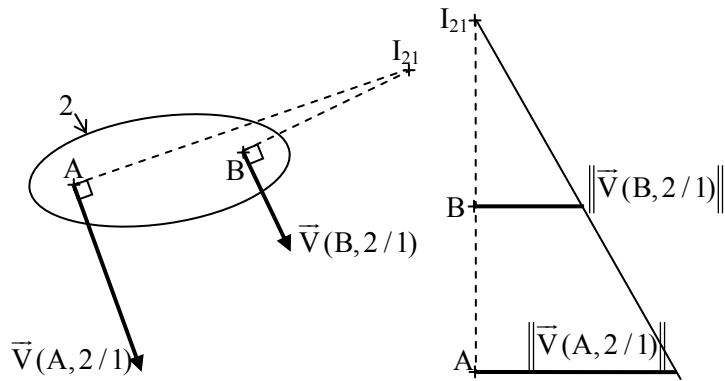
Axe instantané de rotation

Ensemble des points pour lesquels la norme de la vitesse  $\overline{\mathbf{V}}(M, i/j)$  est nulle, la résultante  $\overline{\Omega}(i/j)$  étant non nulle.

Centre instantané de rotation (C.I.R.) :  $\overline{\mathbf{V}}(I_{21}, 2/1) = \vec{0}$

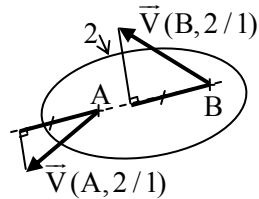
$$\frac{\| \overline{\mathbf{V}}(A, 2/1) \|}{I_{21A}} = \frac{\| \overline{\mathbf{V}}(B, 2/1) \|}{I_{21B}} = \| \overline{\Omega}(2/1) \| \quad (\text{voir figure en page suivante})$$





Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

$$\vec{V}(A, 2/1) \cdot \overline{AB} = \vec{V}(B, 2/1) \cdot \overline{AB}$$



⇒ Méthode 1.2. Applications de cinématique graphique

### □ Mouvements particuliers

Mouvement de translation

$$\{V(2/1)\}_M = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_{\text{Base de projection}}$$

Mouvement de rotation autour d'un point O

$$\{V(2/1)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{\text{Base de projection}}$$

Mouvement de rotation autour d'un axe  $(O, \vec{u})$

$$\{V(2/1)\}_M = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{u}, \dots)} \quad M \in (O, \vec{u})$$

Mouvement hélicoïdal d'axe  $(O, \vec{u})$

$$\{V(2/1)\}_M = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{u} \\ u_{21} \vec{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{u}, \dots)} \quad \begin{aligned} u_{21} &= \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si l'hélice est à droite} \\ u_{21} &= -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si l'hélice est à gauche} \end{aligned}$$

$\lambda$  : pas du système vis / écrou

Mouvement plan sur plan de normale  $\vec{z}$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} r_{21}\vec{z} \\ u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

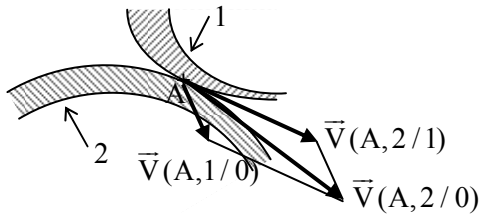
### □ Composition des mouvements

Soient  $n$  solides  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on montre qu'il y a composition des torseurs cinématiques :

$$\{V(S_n / S_1)\} = \sum_{i=2}^n \{V(S_i / S_{i-1})\}$$

On a alors  $\vec{\Omega}(S_n / S_1) = \sum_{i=2}^n \vec{\Omega}(S_i / S_{i-1})$  et  $\vec{V}(M, S_n / S_1) = \sum_{i=2}^n \vec{V}(M, S_i / S_{i-1})$ .

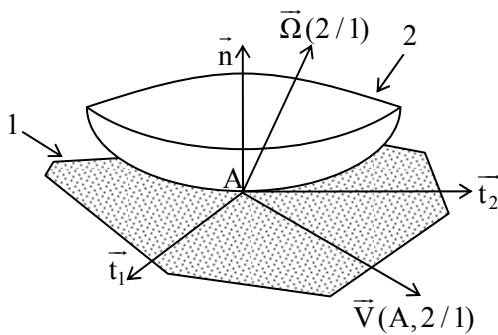
Vitesse de glissement



Vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(A, 2/1)$  : s'il est non nul, il est dans le plan tangent au contact entre les solides 1 et 2.

$$\vec{V}(A, 2/1) = \vec{V}(A, 2/0) - \vec{V}(A, 1/0)$$

Cinématique du contact



$$\vec{\Omega}(2/1) = \vec{\Omega}_p(2/1) + \vec{\Omega}_r(2/1) = p_{21}\vec{n} + q_{21}\vec{t}_1 + r_{21}\vec{t}_2$$

$$\vec{V}(A, 2/1) = v_{21}\vec{t}_1 + w_{21}\vec{t}_2$$

vitesse de rotation de pivotement

$$\|\vec{\Omega}_p(2/1)\| = p_{21}$$

vitesse de rotation de roulement

$$\|\vec{\Omega}_r(2/1)\| = \sqrt{(q_{21})^2 + (r_{21})^2}$$

vitesse linéaire de glissement

$$\|\vec{V}(A, 2/1)\| = \sqrt{(v_{21})^2 + (w_{21})^2}$$

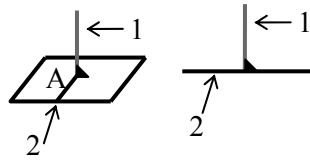
Condition de **non-glissement** :  $\vec{V}(A, 2/1) = \vec{0}$

Condition de **maintien du contact** :  $\vec{V}(A, 2/1) \cdot \vec{n} = 0$

## ■ Liaisons normalisées

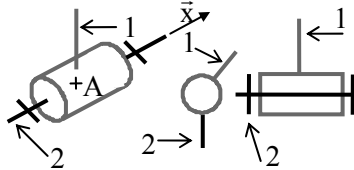
Liaison **encastrement** :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



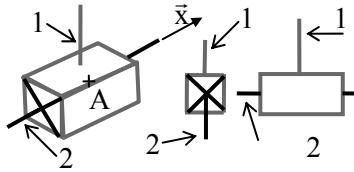
Liaison **pivot d'axe**  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



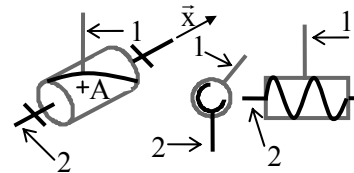
Liaison **glissière** de direction  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



Liaison **hélicoïdale** d'axe  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & \pm \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



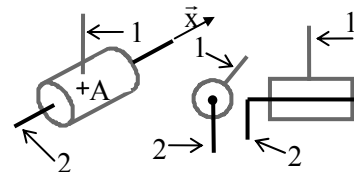
$\lambda$  : pas de l'hélice

$$u_{21} = \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si hélice à droite}$$

$$u_{21} = -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si hélice à gauche}$$

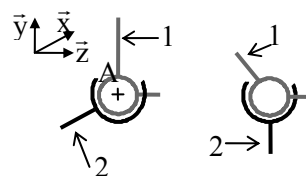
Liaison **pivot glissant** d'axe  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



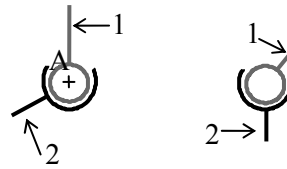
Liaison **sphérique à doigt** d'axes  $(A, \bar{x})$  et  $(A, \bar{z})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



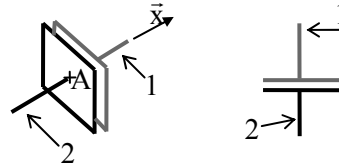
Liaison **sphérique** de centre A :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



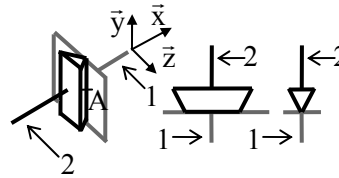
Liaison **appui plan** de normale  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



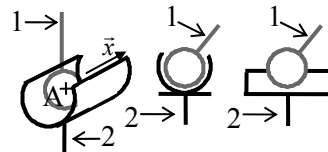
Liaison **linéaire rectiligne** d'axe  $(A, \bar{y})$  et de normale  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



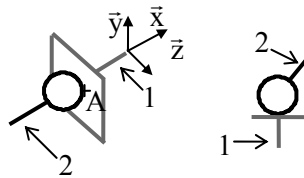
Liaison **sphère cylindre** de centre A et de direction  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



Liaison **sphère plan** de normale  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



⇒ Méthode 1.3. Détermination du torseur cinématique d'un solide