

Avant propos

Consacré aux phénomènes électromagnétiques dépendant du temps (régime dynamique), ce cours est une suite logique de l'ouvrage intitulé "électrostatique et magnéto-statique" du même auteur. Il est le fruit d'une trentaine d'années d'expérience de l'enseignement de la propagation des ondes électromagnétiques et des antennes à des étudiants en formation d'ingénieur des grandes écoles. Toutefois, compte tenu des développements mathématiques assez rigoureux pour établir les expressions régissant les phénomènes physiques de propagation des ondes électromagnétiques, il peut aussi intéresser les étudiants en post-graduation et même les enseignants universitaires appelés à assurer une formation didactique dans ce domaine datant du début du 20^{ème} siècle.

En 1919, Oersted a découvert qu'un courant électrique produit un champ magnétique et Ampère, Biot et Savart (1920) ont formulé les lois de ce champ. En 1831, Faraday a établi qu'un champ magnétique variable produit un courant électrique. En 1867, Maxwell a unifié l'électricité et le magnétisme en une seule théorie, l'électromagnétisme, dont l'une des conséquences importantes est l'existence des ondes électromagnétique qui a été vérifiée expérimentalement par Hertz en 1885. Cette théorie a joué par la suite un rôle important dans le développement dans beaucoup d'autres branches de la physique. Une bonne compréhension des ondes électromagnétiques et leur propagation est essentielle à toute formation scientifique et, particulièrement dans le domaine des télécommunications. L'ouvrage est structuré en cinq chapitres très consistants.

Le premier chapitre est essentiellement consacré à l'établissement des équations de Maxwell en régime variable quelconque et, en particulier, au régime harmonique. L'importance de l'introduction du courant de déplacement par Maxwell est mise en évidence à partir du théorème de Gauss. L'établissement des conditions aux limites nous a conduits à déterminer la topologie du champ électromagnétique au voisinage immédiat d'un conducteur électrique parfait. A partir du champ électromagnétique, on a introduit le couple des potentiels scalaire et vecteur ainsi que le concept de l'invariance de jauge (Jauge de Lorentz). L'aspect énergétique des ondes électromagnétiques est traité en fin de chapitre (énergie emmagasinée, puissance cédée aux charges, puissance moyenne rayonnée et principe de la conservation de l'énergie

Au second chapitre, on a mis en évidence l'aspect propagation du champ électromagnétique. On a vu au chapitre précédent à partir des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, qu'un champ magnétique variable dans le temps donne naissance à un champ électrique et vice versa. Cet effet récurrent est à l'origine du phénomène de propagation des ondes électromagnétiques dont on établira les équations (équations d'onde) dans le cas du vide illimité et en absences de sources d'excitation (propagation libre. C'est dans ce chapitre, qu'on a introduit les notions d'ondes planes (OP), d'ondes planes progressives (OPP), d'ondes stationnaires et surtout d'ondes planes progressives monochromatiques (OPPM). La notation complexe et la notation phaseur des champs sont traitées en détails pour montrer leur importance dans le maniement des vecteurs champs et, surtout, pour déterminer les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques. C'est également dans ce chapitre qu'on a traité la polarisation d'une OPPM et donner les différentes variantes y compris celle utilisant les vecteurs de Jones.

Dans le troisième, on montre qu'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu, autre que le vide, interagit avec les particules chargées de ce milieu. Les équations de Maxwell, établies dans le cas du vide (chapitre I) restent en théorie valables dans un milieu matériel quelconque à condition d'adopter une répartition de sources représentative des phénomènes physiques induits dans le milieu. Le champ total à l'intérieur du matériau est alors donné par la superposition de l'onde source et des ondes émises par le mouvement des charges. L'effet de la somme de toutes ces contributions microscopiques peut être pris en compte par un ensemble de paramètres macroscopiques (susceptibilité, permittivité, indice de réfraction...) généralement dépendant de la fréquence (phénomènes de dispersion et de dissipation). Les milieux considérés dans ce chapitre sont les conducteurs (principalement les métaux), les diélectriques opaques et transparents ainsi que les plasmas froids et dilués.

Le chapitre quatre est dédié aux problèmes du comportement d'une onde électromagnétique à l'interface de séparation entre milieux différents. En effet, dans les chapitres précédents, l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques a été limitée à des milieux illimités occupant tout l'espace. En réalité, lors de son trajet l'onde rencontre des anomalies et des hétérogénéités (discontinuités). Il est alors légitime de se poser la question suivante: que se passe-t-il lorsqu'une onde incidente), supposée être une OPPM, arrive à l'interface de deux milieux différents semi-infinis. On montre que cette discontinuité va générer une onde réfléchie dans le premier milieu et à une onde transmise dans le deuxième milieu. Pour déterminer les quatre champs des ondes réfléchie et transmise à partir des champs de l'onde incidente), on doit déterminer les coefficients de réflexion et de réfraction (formules de Fresnel) et ce en utilisant les conditions aux limites au niveau de l'interface de séparation. Dans le cas général de milieux quelconques, les coefficients de réflexion et de transmission sont des quantités complexes dont le module et la phase peuvent être contrôlés en faisant varier l'angle d'incidence. Dans le cas d'une polarisation verticale, on arrive à supprimer l'onde réfléchie en donnant à l'angle d'incidence une certaine valeur dite "angle de Brewster" qui dépend uniquement des caractéristiques physiques des deux milieux. Ce principe est utilisé pour concevoir des instruments optiques (polariseurs, lasers, lunettes polarisantes...). De même, on peut obtenir une réflexion totale (coefficient de réflexion égal à 1) en choisissant convenablement l'angle d'incidence en l'égalant à ce que l'on appelle "l'angle critique". Cet angle critique est indépendant de la polarisation mais ne peut exister que si l'onde incidente arrive du milieu le plus réfringent. Le concept d'angle critique est à la base des lignes de transmission pour effectuer une propagation guidée (fibres optiques, guides d'ondes etc.). Nous présenterons également dans ce chapitre l'intérêt des structures multicouches diélectriques qui présentent un grand intérêt pratique. Elles permettent, par exemple, l'obtention d'une réflexion nulle (cas des couches dites anti-reflets) ou une réflexion totale (cas des miroirs).

L'objectif du chapitre cinq est d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide en présence d'un ou plusieurs conducteurs supposés parfaits. La présence de ces conducteurs va imposer des conditions aux limites particulières qui vont donner naissance à des ondes réfléchies. Il faut alors se poser la question de savoir quelles sont les conséquences sur les champs, les charges et les courants à l'intérieur et sur les parois de ces conducteurs. Par la suite, on va exploiter cette réflexion pour étudier le guidage des ondes électromagnétiques à l'intérieur de structures appelées guides d'ondes qui permettent de canaliser l'énergie de façon à minimiser l'atténuation de l'onde. Le guidage est généré par la présence d'une structure conductrice ou diélectrique (ou une combinaison des deux) qui permet des modes de propagation privilégiés dans une direction donnée. Dans ce chapitre, on se limitera à l'étude de guides rectangulaires pour utiliser les coordonnées cartésiennes et on choisira arbitrairement comme direction privilégiée l'axe Oz. L'onde devant se propager dans un guide d'onde doit vérifier des conditions aux limites sur les parois du guide, en particulier la continuité du champ électrique tangentiel. A la différence des ondes se propageant en espace libre, les ondes électromagnétiques guidées ne sont pas toujours transverses. En effet, seuls les modes transverses électriques TE^z et les modes transverses magnétiques TM^z peuvent exister dans un tel guide. Le dernier paragraphe de ce chapitre est dédié à l'étude d'une cavité résonante parallélépipédique obtenue en court-circuitant les deux accès d'un guide rectangulaire.

Pour entraîner et intéresser l'étudiant à ce cours, nous avons traité des exemples concrets pratiquement à chaque fin de paragraphe, fourni un nombre important d'exercices corrigés de manière rigoureuse à chaque fin de chapitre. Nous avons également inclus un certain nombre de questions de réflexion qui n'exigent souvent aucun calcul mais une analyse du phénomène physique ou une synthèse des connaissances déjà acquises. En rédigeant ce cours, nous souhaitons avoir apporté une contribution dans le domaine de la propagation des ondes électromagnétiques, rendu ce domaine plus accessible à l'étudiant et fourni un bon outil de travail à l'enseignant.

Pr. R. AKSAS

Sommaire

CHAPITRE I: Equations fondamentales de l'électromagnétisme	9
1. Bilan des relations en régime statique	10
2. Régime dynamique	11
2.1 Loi d'induction de Faraday	11
2.2 Théorème de Gauss	11
2.3 Champ magnétique à flux conservatif	11
2.4 Généralisation du théorème d'Ampère	12
2.5 Equations de Maxwell dans le vide	14
3. Les potentiels et la jauge de Lorentz.	20
3.1 Equation au potentiel vecteur	21
3.2 Equation au potentiel scalaire	21
3.3 Jauge de Lorentz	21
3.4 Remarques	22
4. Equations de Maxwell dans les milieux matériels	23
4.1 Milieux diélectriques-milieu magnétiques	23
4.2 Milieux simples	25
4.3 Milieux quelconques	26
5. Régime harmonique.....	27
5.1 Importance de la notation complexe en régime harmonique	27
5.2 Equations de Maxwell en régime harmonique	30
5.3 Onde non harmonique	30
6. Aspect énergétique.....	31
6.1 Vecteur de Poynting et flux sortant à travers une surface.....	31
6.2 Puissance cédée aux charges	31
6.3 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique	32
7. Exercices corrigés	33
CHAPITRE II : Equations de propagation des ondes dans le vide et loin des sources	53
1. Equations de propagation	54
1.1 Equation de propagation pour le champ électrique	54
1.2 Equation de propagation pour le champ magnétique	54
1.3 Equation de propagation pour le potentiel vecteur	55
1.4 Equation de propagation pour le potentiel scalaire	55

2. Modèle de l'onde plane	56
2.1 Définition.....	56
2.2 Résolution de l'équation de d'Alembert.....	56
2.3 Interprétation de la solution obtenue	58
2.4 Onde stationnaire	59
2.5 Caractéristiques d'une OPP en régime variable quelconque	61
2.6 Ondes sphérique	63
3. L'onde plane monochromatique (OPPM).....	64
3.1 Description	64
3.2 Notation complexe et phaseur	65
3.3 Caractéristiques d'une OPPM	68
3.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe	69
3.5 Aspect énergétique	72
3.6 Polarisation d'une OPPM	77
4. Ondes planes inhomogènes	87
5. Exercices corrigés	89
CHAPITRE III: Ondes électromagnétiques dans la matière	109
1. Milieux conducteurs	109
1.1 Conducteur électrique	109
1.2 Ondes monochromatiques dans un milieu conducteur	114
1.3 Degré de conductivité	118
2. Milieux diélectriques	122
2.1 Aspect intuitif	123
2.2. Le modèle de l'électron élastiquement lié	124
2.3 Limitation du modèle de l'électron lié	133
2.4 Onde électromagnétique dans un milieu diélectrique LHI	135
2.5 Notions de propagation des ondes dans les milieux anisotropes	139
3. Notion de plasma	143
3.1 Position du problème	143
3.2 Equations du mouvement des charges - conductivité complexe	144
3.3 Propagation d'une onde dans un plasma	146
3.4 Aspect énergétique	150
3.5 Application	153
3.6 Conclusion	154
4. Exercices corrigés	154

CHAPITRE IV: Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques	190
1. Incidence normale-milieux sans pertes	191
1.1 Détermination des coefficients de réflexion et de transmission.....	191
1.2 Aspect énergétique.....	193
2. Incidence oblique-milieux non dissipatifs	195
2.1 Lois de la réflexion et de la réfraction - lois de Snell-Descartes.....	196
2.2 Polarisation horizontale.....	198
2.3 Polarisation verticale.....	203
2.4 Réflexion nulle-angle de Brewster	208
2.5 Réflexion totale-angle critique.....	210
2.6 Incidence rasante ou quasi-rasante	217
3. Milieux dissipatifs	218
3.1 Incidence normale	219
3.2 Incidence oblique-matériau dissipatif	222
4. Réflexion et transmission sur de multiples interfaces.....	225
4.1 Cas de deux interfaces diélectriques	225
4.2 Cas de trois interfaces diélectriques.....	232
4.3 Généralisation à N+1 interfaces diélectriques.....	233
5. Influence de la réflexion sur la polarisation.....	237
6. Exercices corrigés	238
CHAPITRE V: Réflexion en présence de conducteurs- Guides d'ondes et cavités résonantes	258
1. Propriétés d'un conducteur parfait	258
1.1 Conséquences sur les champs à l'intérieur d'un conducteur.....	258
1.2 Conséquences sur les charges et courant	259
1.3 Champ à la surface d'un conducteur parfait	259
2. Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait	260
2.1 Existence et détermination de l'onde réfléchie.....	260
2.2 Charges et courant à la surface d'un conducteur parfait	262
2.3 Aspect énergétique.....	263
2.4 Onde résultante	264
2.5 Pression de radiation	266
2.6 Cas du conducteur réel.....	267
3. Réflexion en incidence oblique sur un conducteur parfait.....	269
3.1 Polarisation horizontale ou TE.....	269
3.2 Polarisation verticale ou TM	273

4. Champ électromagnétique guidé-discrétisation	275
4.1 Discrétisation de l'angle d'incidence	275
4.2 Relation de dispersion et fréquence de coupure.....	277
4.3 Vitesse de phase et vitesse de groupe dans le guide	279
4.4 Aspects énergétiques	280
5. Principe du guidage	282
5.1 Densité surfaciques de charge et de courant sur les nouvelles parois.....	282
5.2 Guide d'onde rectangulaire	283
6. Cavité résonante rectangulaire.....	295
6.1 Mode z TE.....	295
6.2 Mode z TM	299
7. Exercices corrigés	301
Annexe A : Résolution de l'équation d'onde homogène	325
Bibliographie	332
Annexe B : Eléments d'analyse vectorielle.....	333
Liste des abréviations et symboles	339
Index.....	343

CHAPITRE I

Equations fondamentales de l'électromagnétisme

L'étude des ondes électromagnétique (électromagnétisme dynamique) peut être envisagée de deux manières distinctes.

La première d'ordre axiomatique, consiste à poser les lois générales (équations de Maxwell) comme postulats pour déduire les applications possibles. Les régimes statiques et quasi-statiques sont alors déduits comme étant des cas particuliers. Il est clair que cette dernière approche, plus complexe et plus abstraite, présente l'avantage d'utiliser un formalisme plus général.

La seconde, d'ordre chronologique, consiste à reprendre les développements théoriques et expérimentaux effectués dans le cas des régimes statiques et quasi-statiques et leur apporter les corrections nécessaires pour les rendre compatibles en régime variable C'est cette approche qui sera utilisée dans ce cours car elle jugée plus pédagogique dans le sens où elle exploite des résultats déjà établis (cf. référence 1). Dans le vide, ces résultats s'écrivent comme suit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (1a); \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (1b); \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1c); \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1d).$$

Lors de l'étude des phénomènes d'induction de Faraday (chapitre VIII de la référence 1), nous avons été amenés, à corriger la relation (1a) entre les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} . Cette correction réside dans l'introduction du concept de l'induction électromagnétique qui se traduit par la relation de Maxwell-Faraday (M.F) à savoir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{forme locale}) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{forme intégrale}) \quad (2)$$

qui est une forme dynamique de la relation (1) valable.

Il est légitime à ce stade e se poser la question si toutes les relations entre les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , les potentiels scalaire V et vecteur \vec{A} sont entièrement établies. La réponse est non. En effet, nous allons voir qu'effectivement, il manque quelque chose concernant le théorème d'Ampère (relation 1c) auquel il faut apporter une correction si l'on doit tenir compte des régimes dynamiques.

Pour établir définitivement les équations de Maxwell, valables en régime quelconque, on commencera par effectuer un bilan des relations entre les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} obtenues en régime statique et quasi-statique, puis en régime dynamique en tenant compte des différents résultats obtenus en cours d'électrostatique et de magnétostatique [1]. On verra que ce bilan fera apparaître une contradiction qui nous amènera à introduire un nouveau concept qui est celui du courant de déplacement. On obtiendra alors une forme généralisée du théorème d'ampère dite équation de Maxwell-Faraday (M.F).

Les équations de Maxwell étant valables en tout point d'un milieu continu illimité, il est intéressant de scruter le comportement du champ électromagnétique au voisinage immédiat de l'interface de séparation entre deux milieux différents. Ceci nous conduit à introduire les

conditions de passage et d'en déduire la structure du champ électromagnétique sur la surface d'un conducteur électrique parfait.

Une fois les équations de Maxwell établies, on reviendra aux problèmes des potentiels V et \vec{A} et, en particuliers, à la question de l'invariance de jauge qui nous amènera à introduire la jauge de Lorentz qui permet la simplification du calcul de ces potentiels et de déduire ensuite les expressions des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} .

On traitera ensuite le cas du champ électromagnétique dont la variation temporelle est de type harmonique en introduisant la notion des vecteurs phaseurs. Le concept de phaseurs (entité mathématique n'ayant aucun sens physique au sens de la mécanique classique) permet de simplifier les calculs en transformant les équations de Maxwell sous forme locale (équations différentielle) en équations algébriques plus faciles à résoudre.

Enfin, on termine ce chapitre par l'aspect énergétique du champ électromagnétique en introduisant les notions d'énergie emmagasinée par ce champ, la puissance fournie aux charges en mouvement éventuelles par le biais de la force de Lorentz et la puissance rayonnée définie comme étant le flux du vecteur de Poynting.

1. Bilan des relations en régime statique.

Les sources (densité de charges ρ et de courant \vec{J}) sont situées en un point d'excitation $P(\vec{r}')$ alors que les champs (\vec{E} et \vec{B}) ainsi que les potentiels (V et \vec{A}) sont déterminés en un point d'observation $M(\vec{r})$ (fig. 1). ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

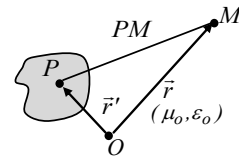


Fig. 1 Positions des sources, des champs et des potentiels.

Rappelons qu'en régime statique [1], les lois régissant les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , dans le vide, sont résumées dans le tableau 1.

Forme locale	Forme intégrale	Signification
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ (3a)	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (3b)	Le champ électrostatique est à circulation conservative
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ (4a)	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$ (4b)	Théorème de Gauss
$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (5a)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{enlacés}$ (5b)	Théorème d'Ampère
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (6a)	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (6b)	Le champ magnétostatique est à flux conservatif
$\Delta \cdot V = -\rho / \epsilon_0$ (7a)	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$ (7b)	Equation de Poisson pour le potentiel scalaire et sa solution
$\Delta \cdot \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ (8a)	$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d\tau$ (8b)	Equation de Poisson pour le potentiel vecteur et sa solution

Tableau 1 Résumé des lois de l'électrostatique et de la magnétostatique [1].

Enfin, pour compléter le formalisme mathématique (équations de Maxwell illustrées dans le tableau), il faut ajouter les conditions de passage du champ (\vec{E}, \vec{B}) d'un milieu vers un autre que l'on présentera au paragraphe 2.5.6 ainsi que la force électromagnétique de Lorentz. Cette force agissant sur une particule de charge q animée d'une vitesse \vec{v} et placée dans un lieu où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , s'écrit

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (9)$$

Les relations (3) à (9) ainsi que les conditions de passage régissent le champ électromagnétique en régime statique dans le vide.

Dans le cas des milieux matériels il faut ajouter la réponse de ces milieux (propriétés diélectriques et magnétiques) et faire intervenir les densités de charges de polarisation et de courants magnétiques [1].

2. Régime dynamique

En régime dynamique, les sources (densités de charges et de courant) seront considérées comme étant variables aussi bien selon leur position $P(\vec{r}')$ que dans le temps. Soit $\rho(\vec{r}', t)$ et $\vec{J}(\vec{r}', t)$. Le champ électromagnétique généré par ces sources va dépendre également de sa position $M(\vec{r})$ (fig. 1) et du temps. Autrement dit, il est de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Comment cette dépendance temporelle va-t-elle se traduire sur la forme des équations stationnaires (3) à (8) ?

Trois lois demeurent inchangées

2.1 Loi d'induction de Faraday

Depuis la découverte des phénomènes d'induction par Faraday, la relation, qui devient l'équation de Maxwell-Faraday, s'écrit définitivement sous la forme de la relation (2) à savoir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (10)$$

Cette loi demeure valable en régime variable et stipule que le champ électrique \vec{E} peut être considéré comme étant la superposition d'un champ statique (à circulation conservative) et d'un champ électromoteur généré par la variation temporelle du champ magnétique \vec{B} . Cette relation a été largement commentée au chapitre VIII du cours de la référence [1].

2.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss sous sa forme locale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (11)$$

doit être conservé en régime dynamique car aucun fait expérimental n'a remis en cause cette loi.

2.3 Champ magnétique à flux conservatif

Le champ magnétique \vec{B} demeure à flux conservatif. Autrement dit, la loi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (12)$$

reste valable en régime dynamique.

2.4 Généralisation du théorème d'Ampère

Avant de voir comment modifier ce théorème, établi en magnétostatique [1] afin de le rendre valable en régime dynamique, on doit d'abord établir la loi de conservation de la charge électrique.

a) Equation de conservation de la charge

On se propose de déterminer la quantité de charges électriques sortant à la vitesse \vec{v} , en un temps très court δt , de la surface S délimitant le volume τ (fig. 2). Durant ce laps de temps, la quantité de charges sortant à travers l'élément de surface $d\vec{S}$ correspond à la variation de la charge quittant l'élément de volume $\delta^2 \tau = \vec{v} \delta t \cdot d\vec{S}$ centré au point P et qui vaut $\delta^2 q = \rho \delta^2 \tau = \rho \vec{v} dt \cdot d\vec{S}$. ρ étant la densité volumique de charges au point P . Dans ces conditions la variation totale de charges quittant le volume total τ à travers la surface S est

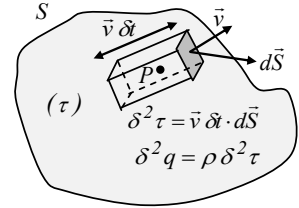


Fig. 2 flux sortant à travers une surface S délimitant un volume τ .

$$\delta q(t) = - \iiint_{\tau} \delta^2 q(t) = - \oiint_S \rho \vec{v} \delta t \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

Le signe $-$ indique une perte de charges dans le volume τ .

Il s'en suit que

$$\frac{\delta q(t)}{\delta t} = - \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Lorsque δt devient infiniment petit, cette expression est assimilée à la dérivée de la charge totale q contenue dans le volume τ . Soit

$$\frac{dq(t)}{dt} = - \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

La charge totale q est indépendante de la position du point P considéré dans ce volume. Par contre, la densité volumique de charges ρ dépend de la position du point P . Dans ces conditions, on peut écrire

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \rho d\tau \quad (15)$$

Des relations (14) et (15), on en déduit que

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence (annexe B), cette expression peut être reformulée de la manière suivante

$$\iiint_{\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) d\tau = 0$$

Comme la forme du volume τ est quelconque, il s'en suit que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (16)$$

Cette relation illustre ce que l'on appelle l'équation de continuité (ou de conservation de la charge électrique). Sachant que la densité de courant électrique est $\vec{J} = \rho \vec{v}$, la relation (16) est très souvent exprimée sous la forme bien connue

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

Cette loi stipule que la divergence de la densité de courant \vec{J} est compensée par la variation temporelle de densité volumique de charges électriques ρ .

Le problème qui se pose est que cette loi est incompatible avec le théorème d'Ampère sous sa forme stationnaire (relations 5) à savoir

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J}$$

En effet, en appliquant l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = 0$ au théorème d'Ampère, on obtient

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_o \vec{J}) = \mu_o (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) = 0$$

Soit
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (18)$$

Cette relation montre que la densité de courant \vec{J} est à flux conservatif.

Si la loi de conservation de la charge (relation 17) est compatible avec le théorème d'Ampère en régime statique, elle ne l'est plus en régime variable. Il manque donc quelque chose à l'expression du théorème d'Ampère pour le rendre applicable en régime quelconque. C'est ce quelque chose que l'on se propose d'étudier et qui va nous conduire à introduire la notion de courant de déplacement et établir une nouvelle équation à savoir la relation de Maxwell-Ampère.

b) Courant de déplacement et équation de Maxwell-Ampère

Pour introduire le courant de déplacement, on part de la loi de Gauss (relation 11), soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

qui implique
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_o \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

La loi de conservation de la charge (relation 17) devient alors

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

On vient ainsi d'introduire un terme supplémentaire, homogène à une densité de courant, appelé densité de courant de déplacement à savoir

$$\vec{J}_D = \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (19)$$

et qui permet la généralisation du théorème d'Ampère sous la forme de l'équation dite de Maxwell-Ampère qui s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (20)$$

L'équation (20) renseigne sur la nature des sources du champ magnétique: une variation temporelle du champ électrique, assimilée à un courant, et la présence de courant électrique local.

On retrouve là le résultat d'une expérience célèbre. Celle d'Oersted (1920, qui constata que la circulation d'un courant électrique provoquait la rotation de l'aiguille d'une boussole, phénomène qui correspond au premier terme de droite de cette équation. Par contre, le deuxième terme n'a rien d'expérimental. C'est Maxwell lui-même (1865) qui a introduit ce terme pour rendre cohérent son ensemble d'équations sans présenter aucune justification expérimentale de cette modification. Il a fallu attendre la mise en évidence expérimentale des ondes électromagnétiques par Hertz (1887) pour la vérifier.

La relation (20) présente une certaine similitude avec le théorème de Maxwell-Faraday (relation 11) qui stipule qu'une variation temporelle du champ magnétique produit un champ électrique d'induction. La grande intuition de Maxwell a été de penser que pour des raisons de symétrie, une relation équivalente inverse devait être vraie. Autrement dit, une variation temporelle du champ électrique doit générer un champ magnétique.

En régime variable, les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} sont indissociables et ce phénomène est régi par les équations couplées de Maxwell-Faraday (10) et de Maxwell-Ampère (20). Ces deux équations couplées traduisent la conversion de la composante magnétique d'une onde en sa composante électrique et vice-versa, alternativement. Dans le cas général, on ne peut pas découpler les deux champs, c'est pourquoi on parle d'un champ électromagnétique ou d'une onde électromagnétique, que l'on note (\vec{E}, \vec{B}) , et qui peut donc se propager sans autre support qu'elle même.

2.5 Equations de Maxwell dans le vide

2.5.1 Formulation locale des équations

Avec l'introduction de la densité de courant de déplacement \vec{J}_D (relation 19) qui permet, en particulier, d'expliquer la propagation des ondes et l'établissement de la relation (20), Maxwell a formulé les quatre lois fondamentales de l'électromagnétisme. Dans le vide, ces lois s'écrivent sous la forme locale bien connue comme suit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Faraday: MF}) \quad (21a)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Ampère: MA}) \quad (21b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (\text{Maxwell-Gauss : MG}) \quad (21c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{"Maxwell flux": M}\Phi) \quad (21d)$$

On a un système de quatre équations différentielles, qui à partir d'une distribution de charges et de courant permet de calculer les champs \vec{E} et \vec{B} en tout point de l'espace et à chaque instant. Dans les conditions réelles (sources d'extension finie), on impose au champ (\vec{E}, \vec{B}) la condition d'être nul à l'infini.

2.5.2 Remarques

- A partir des équations de Maxwell, des conditions initiales et des conditions aux limites, on peut déterminer de manière univoque le champ électromagnétique. C'est le critère d'unicité pour les solutions des équations de Maxwell
- Les équations de Maxwell sont compatibles entre elles. L'équation de Maxwell-Faraday (relation 21a) permet de déduire l'équation de "Maxwell flux" (relation 21d). En effet, en appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation (21a), et en tenant compte de l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = 0$, on obtient

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

Cette relation montre que $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ est une constante indépendante du temps. Si cette constante n'est pas nulle, on aurait une distribution de charges magnétique par analogie avec le théorème de Gauss (relation 21c) à savoir $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$. Comme les charges magnétiques n'existent pas dans la nature, cette constante est alors nulle et on obtient bien la relation (21d) à savoir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation de conservation de la charge. Pour confirmer cette assertion, on effectue un travail analogue au précédent en appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation (21b) tout en tenant compte du théorème de Gauss (relation 21c). Soit

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Si \vec{E} est solution des équations de Maxwell alors $\vec{E} + \vec{E}_0$ est également solution de ces équations pour peu que \vec{E}_0 soit un champ stationnaire.
- En régime statique ($\partial / \partial t = 0$), on retrouve bien les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique [1] illustrées sur le tableau 1.
- Si les distributions (ρ_1, \vec{J}_1) et (ρ_2, \vec{J}_2) produisent respectivement les champs (\vec{E}_1, \vec{B}_1) et (\vec{E}_2, \vec{B}_2) , alors la distribution $(\alpha \rho_1 + \beta \rho_2, \alpha \vec{J}_1 + \beta \vec{J}_2)$ produira le champ $(\alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2, \alpha \vec{B}_1 + \beta \vec{B}_2)$.
- Comme remarque historique, il est à signaler qu'à l'époque de Maxwell, les opérateurs divergence, rotationnel et gradient n'existaient pas. Il en était de même pour la représentation d'une grandeur vectorielle, par une lettre en dessous d'une flèche, telle que nous la connaissons maintenant. Aussi, les résultats présentés par Maxwell (une vingtaine d'équations) étaient lourds et fastidieux. C'est Heaviside (1850-1925) qui donna aux équations de Maxwell la forme actuelle.

2.5.3 Sources et équations duales

Si on suppose l'existence de sources magnétiques en introduisant les densités de charge ρ_m et de courant \vec{J}_m , duales des sources électrique (ρ et \vec{J}), on doit modifier les équations sans sources (21a et 21d) en les remplaçant par leurs équations duales [2,3]

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$$

Il faut ajouter également une équation duale à l'équation de conservation de la charge (relation 17) que l'on exprime comme suit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

2.5.4 Importance du courant de déplacement

Considérons la portion de circuit électrique constituée par un condensateur plan dont les armatures sont supposées de grandes dimensions par rapport à leur écartement afin de négliger les effets de bords (fig. 3). Considérons un contour fermé orienté \mathcal{C} sur lequel s'appuient deux surfaces S_1 et S_2 (fig.3). Montrons que l'application du théorème d'Ampère (relation 5a) pour déterminer la circulation du champ magnétique \vec{B} le long du contour \mathcal{C} aboutit à un paradoxe et que celui-ci est résolu par le théorème de Maxwell-Ampère (relation 21b).

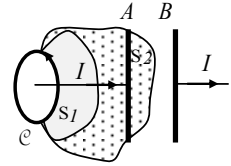


Fig. 3. Paradoxe du Condensateur.

a) Théorème d'Ampère

- Contour \mathcal{C} et surface S_1 (fig. 3):
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \mu_o \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_o \vec{J}$$
- Contour \mathcal{C} et surface S_2 :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \mu_o \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$
 (courant nul entre les armatures).

La même méthode fournit des résultats contradictoires pourtant les deux surfaces S_1 et S_2 s'appuient sur le même contour \mathcal{C} .

b) Théorème de Maxwell-Ampère

- Contour \mathcal{C} et surface S_1 :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \mu_o \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \mu_o \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_o \vec{J}$$

car
$$\iint_{S_1} \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$
 (champ électrique nul à l'extérieur du condensateur plan).

- Contour \mathcal{C} et surface S_2 :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \mu_o \left(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$