Avant-propos

Sans technique un don n'est rien
qu'une sale manie.
Georges Brassens.

Le présent ouvrage s'adresse en particulier aux élèves de Seconde afin qu'ils puissent acquérir les bases nécessaires pour le cycle Terminal.

Nous partons du constat qu'au cours de ces 30 dernières années les différentes réformes éducatives ont fait que le programme de mathématiques promulgué aux élèves a beaucoup souffert tant dans son contenu que dans la façon de l'enseigner.

Le changement de paradigme a fait qu'une grande partie des étudiants entrant, à l'heure actuelle, dans le Supérieur manquent sérieusement de connaissances et d'outils afin de réussir leur insertion dans le Post-Bac.

Viennent alors soit de nombreux abandons soit une désaffection importante et dangereuse à long terme pour les études scientifiques en général et pour les mathématiques en particulier.

C'est pour ces raisons que nous avons souhaité écrire ces trois livres, proposer des infrastructures, afin que le lecteur puisse apprendre ou ré-apprendre les mathématiques élémentaires. Nous avons ainsi souhaité proposer un projet alternatif aux programmes de mathématiques des lycées et voilà pourquoi les trois tomes, qu'il faut aborder comme un tout, ne suivent donc pas à la lettre le programme officiel des classes de lycées et encore moins l'esprit.

Même si la plupart des objets mathématiques sont entièrement définis (ou redéfinis), le lecteur est supposé familier avec les notions de base et le vocabulaire de la géométrie de collège et une certaine aisance avec le calcul algébrique.

Les structures (groupes, corps, espaces vectoriels, etc.) n'apparaissent pas dans ces tomes car elles relèvent des mathématiques supérieures. Elles sous-tendent un nombre important de démonstrations que le lecteur au fait de ces notions pourra retrouver entre les lignes.

Bien que ce livre se veuille avant tout destiné aux élèves de Seconde mais aussi à tout curieux désireux d'apprendre de « belles » mathématiques, il servira aussi à ceux qui sont intéressés par l'enseignement. C'est ainsi que ces trois livres peuvent être lus tels qu'ils sont présentés mais ils peuvent aussi être abordés suivant un certain ordre en fonction du but cherché. On peut ainsi regrouper les chapitres par thèmes : algèbre, géométrie, analyse et probabilité que nous résumons dans ce tableau :

	cours de seconde	cours de première	cours de terminale
Algèbre :	3 - 5 - 7	5 - 9 - 13	2
Géométrie :	6 - 11	6 - 7 - 8	1 - 7 - 8
Analyse :	9 - 10	1 - 2 - 3 - 4 - 12	3 - 4 - 5 - 6 - 9
Probabilités :	4 - 8 - 12	10 - 11	

Enfin nous avons pris le parti de ne pas développer l'histoire des mathématiques dans ces livres. Néanmoins, il nous semble plus qu'important de savoir à quelle époque les concepts présentés dans cet ouvrage ont pu voir le jour et quels mathématiciens en sont à l'origine.

Nous pensons que tout étudiant en mathématiques – tant au secondaire que dans le supérieur – doit acquérir un peu de l'histoire de cette science.

Pour cela nous vous proposons une liste non exhaustive de livres :

Hauchecorne Bertrand, Suratteau Daniel, *Des mathématiciens de A à Z* - 3$^{\text{e}}$ édition entièrement refondue, Ellipses 2008.

Thirion Maurice, *Les mathématiques et le réel*, Ellipses 1999.

Nous terminons par quelques remarques pratiques.

Ce panneau signale un risque de dérapage fréquemment observé chez les lecteurs un peu rapides.

Le carré blanc à la fin de la dernière ligne d'une démonstration signale la fin de celle-ci, que les auteurs n'iront pas plus loin ! C'est en somme une abréviation pour « la proposition en résulte » ou « ce qu'il fallait démontrer ». Il se présente sous cette forme : □

Enfin, une place a été laissée à la programmation et notre choix a porté sur le langage `python` car c'est celui qui est le plus utilisé dans les lycées et dans le Supérieur.

Nous ne pouvons conclure cet avant-propos sans remercier Jean-Pierre Demailly pour son soutien et son apport. La rédaction de l'intégrale de Kurzweil-Henstock est la sienne. Nous sommes redevables à Emmanuel Vielliard-Baron car le chapitre sur les coniques et une bonne partie de l'arithmétique lui doivent beaucoup ainsi que son site « les mathématiques.net » qui fut une bonne source d'inspiration. Merci à Loïc Terrier pour ses graphiques et ses exercices. Merci aussi à Clémence Labrousse et à Philippe Colliard pour un soutien constant et précieux.

Table des matières

Chapitre 1

De quoi parlons-nous ?

Sommaire

1.1 Le vrai et le faux

En mathématiques, on n'utilise que des phrases qui ne peuvent être que vraies ou fausses, sans ambiguïté. La phrase : « La Loire prend sa source au Mont Gerbier de Jonc » n'est pas une phrase mathématique. Il faudrait délimiter sans ambiguïté ce qu'est le Mont Gerbier de Jonc et définir ce qu'est une source d'un fleuve. De plus cette phrase suppose l'unicité de la source. Rappelons qu'on considère traditionnellement trois sources pour la Loire : l'authentique, la véritable et ... l'unique.

Une phrase mathématique s'appelle une **proposition**.

Ce qui suit peut s'appeler de la logique, ou du français, ou tout simplement du bon sens.

Définition 1 (Théorème)**.**

On appelle **théorème** toute proposition pour laquelle on peut prouver qu'elle prend la valeur « Vrai ». Autrement dit, « théorème » est une **abréviation** pour « proposition qui prend la valeur « Vrai » d'une façon **certaine**.

La notation := sera utilisée par la suite dans les écritures symboliques. Elle signale une abréviation. Autrement dit, := est une abréviation pour « est une abréviation de » ...

1.2 La négation

La **négation** d'une phrase vraie est fausse. La négation d'une phrase fausse est vraie. On considère une proposition qu'on appelle A. Sa négation sera notée : non A. On peut résumer la négation d'une proposition grâce à un tableau :

A	non A
Vrai	Faux
Faux	Vrai

Exemple 1
Soit x un nombre relatif. La négation de la proposition : « $x > 0$ » est tout d'abord la proposition : non(« $x > 0$ »).

On peut affirmer dans ce cas précis, que non(« $x > 0$ ») prend la même valeur logique que la proposition « $x \leqslant 0$ » et ce quel que soit le nombre relatif x.

1.3 La conjonction

Définition 2.

À partir de deux propositions A, B, on peut définir une troisième proposition appelée A et B. Elle prend la **valeur logique** VRAI dans le cas où les propositions A, B sont vraies à la fois, et FAUX sinon. On obtient ainsi la **table de vérité** suivante :

A \ B	VRAI	FAUX
VRAI	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	FAUX

Exemple 2
« 6 est divisible par 2 et 6 est divisible par 3 » est une proposition vraie.

Exemple 3
« Un carré est un rectangle et un losange » est une proposition vraie. C'est même la définition d'un carré. Autrement dit, pour une figure $\mathscr{F}$ du plan, « $\mathscr{F}$ est un carré » est une abréviation de « $\mathscr{F}$ est un rectangle » et « $\mathscr{F}$ est un losange ».

1.4 La disjonction

Définition 3.

À partir de deux propositions A, B, on peut définir une troisième proposition appelée A ou B. Elle prend la valeur logique Faux dans le cas où les deux propositions A, B sont fausses à la fois, et vraie sinon. On obtient ainsi la table de vérité suivante :

A \ B	VRAI	FAUX
VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	VRAI	FAUX

Exemple 4
Soit x un nombre relatif. Dire que $x \leqslant 0$ c'est dire que $x < 0$ ou $x = 0$.

1.5 Négation de « et » et de « ou »

La négation d'un « et » peut se traduire par un « ou ». Plus précisément :

Théorème 1

- Une négation de « A et B » est « (non A) ou (non B) ».
- Une négation de « A ou B » est « (non A) et (non B) ».

Exemple 5
Je considère la proposition A : « Nicolas me parle en anglais ou en français ». Sa négation, c'est-à-dire non(A) peut s'écrire « Nicolas ne me parle pas en anglais **et** Nicolas ne me parle pas en français ».

Exemple 6
On a vu que « $ABCD$ est un carré » pouvait s'écrire « $ABCD$ est un rectangle et $ABCD$ est un losange ». En prenant la négation, on obtient :

« $ABCD$ n'est pas un carré » peut s'écrire « $ABCD$ n'est pas un rectangle ou $ABCD$ n'est pas un losange ».

Exemple 7
Soit x un nombre relatif, l'encadrement $0 < x \leqslant 1$ est une abréviation de « $0 < x$ et $x \leqslant 1$ ».
On peut donc en écrire la négation suivante :
« $0 \geqslant x$ ou $x > 1$ ».

Démonstration 1
La démonstration du théorème s'effectue grâce à la table de vérité suivante.

A	B	A et B	non(**A** et **B**)	non A	non B	(non **A**) ou (non **B**)
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

Les colonnes de non(**A** et **B**) et de (non **A**) ou (non **B**) sont identiques, ce qui signifie que les deux propositions prennent bien les mêmes valeurs de vérité. □

On peut démontrer de la même façon la négation de ... *ou* ... Cf. exercice 5 page 13.

1.6 L'implication

L'implication est une opération logique qui se révèle être bien moins naturelle qu'il y paraît. Elle doit être utilisée avec discernement et circonspection.

1.6.1 Table de vérité

Définition 4.

À partir de deux propositions A, B, on peut définir une troisième proposition appelée « A implication B » et notée A $\Longrightarrow$ B, à l'aide de la table de vérité suivante :

A $\Longrightarrow$ B	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai

Théorème 2
La proposition A $\Longrightarrow$ B prend les mêmes valeurs de vérité que la proposition B ou (non A).

Démonstration 2
La démonstration s'effectue grâce à la table de vérité suivante.

A	B	**A $\Longrightarrow$ B**	non A	**B** ou non **A**
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**

Les colonnes de (A $\Longrightarrow$ B) et de (B ou non A) sont identiques, ce qui signifie que les deux propositions prennent bien les mêmes valeurs de vérité. □

Exemple 8
Soit n un entier naturel. On considère les propositions :
- $\mathscr{D}_2(n)$: n est un entier pair.
  Autrement dit, le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n est $0, 2, 4, 6$ ou 8.
- $\mathscr{D}_5(n)$: n est un entier divisible par 5.
  Autrement dit, le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n est 0 ou 5.

(La divisibilité sera définie grâce à la définition 1 page 24 du cours de terminale.)

Pour quels entiers n a-t-on
$$\mathscr{D}_2(n) \Longrightarrow \mathscr{D}_5(n+1)?$$

Tout d'abord l'implication est Vraie pour tous les entiers n pour lesquels $\mathscr{D}_2(n)$ est Faux, c'est-à-dire pour tous les entiers impairs.

Enfin, elle est Vraie pour tous les entiers n pour lesquels $\mathscr{D}_2(n)$ est Vrai et $\mathscr{D}_5(n+1)$ est Vrai, c'est-à-dire pour tous les entiers pairs qui se terminent par 9 ou 4, autrement dit pour tous les entiers pairs qui se terminent par 4.

Finalement, l'implication est Vraie pour tous les entiers n qui se terminent par $1, 3, 5, 7, 9$ ou 4.

En particulier lorsque A prend la valeur FAUX, l'implication A $\Longrightarrow$ B prend la valeur VRAI. De ce fait, pour établir la vérité de l'implication A $\Longrightarrow$ B, on peut se restreindre au cas où A est vraie. Deux situations se produisent alors :

- B est vraie et dans ce cas A $\Longrightarrow$ B est vraie.
- B est fausse et dans ce cas A $\Longrightarrow$ B est fausse.

Ainsi, l'implication A $\Longrightarrow$ B peut s'énoncer « Si A est vraie, alors B est vraie », ou même « Si A, alors B ».

Exemple 9
Théorème.
Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Si $ABCD$ est un losange, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque 1.

La plupart des théorèmes du cours sont écrits sous la forme d'implications. Pour autant, le débutant – c'est vous *a priori* – doit se méfier des phrases qui s'écrivent « Si ..., alors ... ». Il est toujours possible de s'en passer dans la rédaction d'une copie. L'expérience montre que – lorsqu'elles apparaissent dans une solution – ces rédactions « Si ..., alors ... » sont la plupart du temps incorrectes.

1.6.2 Il faut, il suffit...

Quand l'implication A $\Longrightarrow$ B est vraie :

- A est une condition suffisante pour B : Il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie.
- B est une condition nécessaire pour A : Il faut que B soit vraie pour que A soit vraie.

- ▶ Il suffit que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- ▶ Il faut que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme pour que $ABCD$ puisse être un losange.
- ▶ Il est nécessaire que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme pour que $ABCD$ puisse être un losange.

1.6.3 Contraposée

Théorème 3
Soit A et B deux propositions. L'implication (non B) $\Longrightarrow$ (non A) a la même table de vérité que l'implication A $\Longrightarrow$ B. Ces deux implications sont dites contraposées l'une de l'autre.

Autrement dit, pour établir une implication, il suffit d'établir sa contraposée.

Exemple 10
Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Si $ABCD$ est un losange, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Autrement dit, pour démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme, il suffit de démontrer que $ABCD$ est un losange.

La contraposée de cette implication s'écrit :

Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Si $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, alors $ABCD$ n'est pas un losange.

Autrement dit, pour démontrer que $ABCD$ n'est pas un losange, il suffit de démontrer que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

Démonstration 3
La démonstration s'effectue grâce à la table de vérité suivante.

A	B	$\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B}$	non A	non B	non $\mathbf{B} \Longrightarrow$ non $\mathbf{A}$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**V**	V	F	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

Les colonnes de $(A \Longrightarrow B)$ et de (non $B \Longrightarrow$ non A) sont identiques, ce qui signifie que les deux propositions prennent bien les mêmes valeurs de vérité. □

1.6.4 Négation

On a déjà vu que l'implication A $\Longrightarrow$ B pouvait s'écrire « B ou (non A) ».
De ce fait, une négation de A $\Longrightarrow$ B peut s'écrire « (non B) et A ».

1.6.5 Réciproque

Définition 5.

Soient A et B deux propositions. Les implications A $\Longrightarrow$ B et B $\Longrightarrow$ A sont dites **implications réciproques** l'une de l'autre.

Une implication peut être vraie et son implication réciproque fausse.

Exemple 11
Soit ABC un triangle.

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Cette implication est vraie : C'est le théorème de Pythagore.

La réciproque est : Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A. La réciproque est vraie elle aussi. C'est le théorème réciproque de Pythagore.

Exemple 12
Soit x un nombre réel.

Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$. La réciproque A $\Longrightarrow$ B est : « si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ ». Cette réciproque est fausse car on peut avoir en même temps (non B) : $x = -2$ et A : $x^2 = 4$.

1.7 Équivalence

Définition 6.

Soit A et B deux propositions. On dit que A et B sont **équivalentes** lorsqu'elles ont la même valeur de vérité. On peut noter alors : A $\Longleftrightarrow$ B.

Théorème 4
Deux propositions A et B sont équivalentes lorsque A $\Longrightarrow$ B et B $\Longrightarrow$ A.

Démonstration 4
Vérification aisée par les tables de vérités. □

En français A $\Longleftrightarrow$ B peut s'écrire :
- Pour que A il faut et il suffit que B.
- On a A si et seulement si B.

1.8 Égalités

1.8.1 Écrire une égalité

Qu'est-ce qu'une égalité ?
Qu'est-ce qu'écrire une égalité ?
Écrire une égalité, c'est écrire la même chose de deux façons différentes.

Exemple 13
La proposition : « $0,5 = \dfrac{1}{2}$ » est un théorème. Autrement dit, $0,5$ et $\dfrac{1}{2}$ sont deux écritures différentes du même nombre.

Définition 7.

Une égalité est une phrase, comportant le verbe égaler, et dont le sujet – le membre de gauche – et le complément d'objet – le membre de droite – sont le même objet mathématique.

Autrement dit, chaque fois que l'on lit un des deux membres dans une proposition, on peut réécrire cette proposition en le remplaçant par l'autre membre sans changer la valeur de vérité de la proposition en question. Ce principe de substitution – fondamental en mathématiques – est à la base de la recette du sanglier à la crème [1]

Dire que deux objets mathématiques sont égaux, c'est dire que tout ce qui arrive à l'un arrive à l'autre.

Remarque 2.

On ne peut pas écrire d'égalité entre deux objets mathématiques de types différents, comme un point qui égale un nombre.

1.9 Quantification

1.9.1 Motivation

La phrase :

$$4(2-3x) = 8-12x,$$

n'est pas correcte telle qu'elle est écrite. En effet on ne sait pas qui est x. La question de la véracité ou de la fausseté de cette phrase ne se pose même pas : elle n'a pas de sens hors contexte. Il faut donc préciser qui est x.
Pour tout nombre x, $4(2-3x) = 8-12x$. Cette phrase est vraie.
En effet, en développant, on obtient, pour tout nombre x,

$$\begin{aligned} 4(2-3x) &= 4\times 2 - 4\times(3x) \\ &= 8-12x \end{aligned}$$

Remarque 3.

Les nombres relatifs du collège s'appellent des nombres **réels** au lycée. Il est possible d'abréger « nombre réel » en « réel ».

On peut désormais écrire : pour tout nombre réel x , $4(2-3x) = 8-12x$.

Remarque 4.

Un **calcul** est une suite d'égalités. Tous les nombres qui apparaissent dans les différents membres d'une égalité sont donc égaux. Il faut prêter une attention particulière à la disposition des calculs et bien aligner les signes « égale » les uns au-dessous des autres.

1. Le lecteur aura saisi la référence à la discussion culinaire entre Olaf Grossebaf et Obélix. Cf. *Astérix et les Normands*, Dargaud, 1966.

Pour tout nombre réel x, $4(2-3x) = 8 + 7x$.

Cette phrase est fausse. Autrement dit, sa **négation** est vraie.

Une négation de la phrase « Tous les élèves de la classe sont des garçons. » est : « Il y a au moins un élève de la classe qui n'est pas un garçon. » ou bien « Il y a au moins un élève de la classe qui est une fille. »

De même pour établir la fausseté de la phrase « Pour tout nombre réel x , $4(2-3x) = 8+7x$ », il suffit de trouver un nombre réel x pour lequel l'égalité n'a pas lieu. Prenons $x = 2$. Dans ce cas, puisqu'on a une égalité, tout ce qui arrive à x arrive à 2. D'une part

$$\begin{aligned} 4(2-3x) &= 4(2-3\times 2) \\ &= 4(2-6) && \text{tout ce qui arrive à } 3\times 2 \text{ arrive à } 6. \\ &= 4\times(-4) \\ &= -16. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 8+7x &= 8+7\times 2 \\ &= 8+14 \\ &= 22. \end{aligned}$$

Donc pour $x = 2$, on n'a pas $4(2-3x) = 8+7x$, car cela voudrait dire que $-16 = 22$.

Donc la phrase « Pour tout nombre réel x, $4(2-3x) = 8+7x$ » est fausse.

On dit que $x = 2$ est un **contrexemple** pour cette phrase.

1.9.2 Les différents types de propositions

Les exercices de type « Vrai-Faux » consistent à décider si une proposition donnée prend la valeur « Vrai » ou « Faux ». En règle générale, il est bon de savoir si ce que l'on écrit (ou lit !) est vrai ou faux.

Le but de ce paragraphe est de distinguer trois types de propositions que l'on sera amené à rencontrer. Un retour sur cette question avec les ensembles et les quantificateurs au paragraphe 3.2.1 page 42.

- Les propositions « Pour tout ». Ce type de proposition – appelée proposition universelle – sera signalé par la suite par le symbole ∀.

> **Exemple 14**
> **Tout** carré est un quadrilatère a quatre côtés de même longueur.

- Les propositions « Il existe ». Ce type de proposition sera signalé par la suite par le symbole ∃.

> **Exemple 15**
> Chaque fois que vous ouvrez une carte de France – et que vous êtes en France – **il existe** un point du territoire qui coïncide avec le point de la carte qui le représente.

- Les propositions sans lettre. Ce type de proposition sera signalé par la suite par le symbole Ɔ.

> **Exemple 16**
> $6 \times 7 = 42.$