Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires ECG (maths appliquées) qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 31 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices pour que ce livre constitue une aide efficace pour le lecteur, non seulement pendant la première année de classe préparatoire, mais aussi par la suite.

Sylvain Rondy

Sommaire

Dénombrement et probabilités

1 Modes de raisonnement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☐ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que si n^2 est un entier pair alors n aussi.
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On commencera par écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible (c'est-à-dire non simplifiable).

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 4 –

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

Montrer par récurrence double que :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 6 –
Soit u la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-3n+5)\,3^n$$

Exercice 7 –
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $b > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = bu_n^2$$

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, $2n$ ne l'est pas. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers naturels. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☒ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. On souhaite montrer que si n^2 est pair, alors n aussi. Supposons donc que n n'est pas pair et montrons que n^2 n'est pas pair. L'entier n est donc impair : il existe un entier $k \geq 0$ tel que $n = 2k+1$. Alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

et $2k^2 + 2k$ est un entier donc n^2 est impair. On a ainsi montré le résultat souhaité par contraposée.

Méthode

Soit P et Q deux propositions mathématiques. Montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie est équivalent à montrer que l'implication non$(Q) \Rightarrow$ non(P) est vraie. Autrement dit, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que Q est fausse et montrer que P est fausse.

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Sachant que ce nombre est strictement positif, il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et sans perte de généralité, on peut supposer que cette fraction est irréductible. On a alors $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est un entier pair donc p aussi d'après la question 1. Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors :

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ce qui implique que $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair donc q aussi d'après la question 1. On en déduit que p et q sont tous les deux divisibles par 2 ce qui est absurde car $\frac{p}{q}$ est irréductible. On vient donc de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cours

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Un réel est irrationel si il n'est pas rationnel.

Méthode

Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Exercice 3 –

On a $2^1 = 2 > 1$ donc l'inégalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$ tel que $2^n > n$. Montrons que $2^{n+1} > n + 1$. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$$

par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$ donc $2n = n + n \geq n + 1$. On en déduit que :

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1$$

ce qui montre le résultat souhaité.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Méthode

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

- *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.
- On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- On conclut.

Exercice 4 –

On a :

$$\frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$$

L'inégalité à montrer est donc vraie aux rangs 0 et 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_n}{n!} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$$

Montrons que :

$$a_{n+2} \leq (n+2)!$$

On a par hypothèse de récurrence et sachant que les termes sont positifs :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + (n+1)a_n \\ &\leq (n+1)! + (n+1)n! \\ &\leq 2(n+1)! \\ &\leq (n+2)(n+1)! \\ &\leq (n+2)! \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Par récurrence double, on vient donc de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Méthode

Pour démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq 0$, on suit le raisonnement suivant :

- *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
- On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq 0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et montre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
- On conclut.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté dans le cas de certaines suites dont un terme dépend des deux précédents. On adapte évidemment le raisonnement si la propriété est définie à partir d'un autre rang que 0.

Exercice 5 –
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi la propriété est vérifiée au rang 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux tel que :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On sait que :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence on sait que $0 \leq u_n \leq 1$. Il est clair que :

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

et on a :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \geq 0$$

car $n \geq 2$. Ainsi, u_n et $1 - \frac{1}{n^2}$ sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par produit, u_{n+1} appartient donc lui aussi à $[0, 1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 6 –
On a :

$$(-3 \times 0 + 5)\, 3^0 = 5 = u_0 \quad \text{et} \quad (-3 \times 1 + 5)\, 3^1 = 2 \times 3 = 6 = u_1$$

L'égalité souhaitée est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = (-3n + 5)\, 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-3(n+1) + 5)\, 3^{n+1} = (-3n + 2)\, 3^{n+1}$$

Montrons que :

$$u_{n+2} = (-3(n+2) + 5)\, 3^{n+2} = (-3n - 1)\, 3^{n+2}$$

Par définition de u, on sait que :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6\,(-3n + 2)\, 3^{n+1} - 9\,(-3n + 5)\, 3^n \\ &= 2\,(-3n + 2)\, 3^{n+2} - (-3n + 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-6n + 4 + 3n - 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-3n - 1)\, 3^{n+2} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

Par récurrence double, on vient donc de montrer que la propriété de l'énoncé est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 7 –

Raisonnons par contraposée. Soit x un réel non nul.

Montrons l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x^2 > \varepsilon$.

Non$(\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon) = (\exists \varepsilon > 0 \mid x^2 > \varepsilon)$

Posons :

$$\varepsilon = \frac{x^2}{2}$$

Sachant que x est non nul, il est clair que $\varepsilon \in \left]0, x^2\right[$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 8 –

On a :

Il est toujours utile de calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence. Cela permet de conjecturer le signe, les variations, l'expression du terme général...

$$u_1 = bu_0^2$$

puis :

$$u_2 = bu_1^2 = b(bu_0^2)^2 = b^3u_0^4$$

et :

$$u_3 = bu_2^2 = b^7u_0^8$$

On conjecture alors :

Attention : $u_0^{2^n}$ n'est pas $(u_0^2)^n$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

On montre cette égalité par récurrence. Elle est vraie au rang 0 car :

$$b^{2^0-1}u_0^{2^0} = b^0u_0^1 = u_0$$

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = b^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}}$$

Par définition de la suite, on a :

$$u_{n+1} = bu_n^2$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b\left(b^{2^n-1}u_0^{2^n}\right)^2 \\ &= bb^{2(2^n-1)}u_0^{2\times 2^n} \\ &= b^{1+2^{n+1}-2}u_0^{2^{n+1}} \\ &= b^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Exercice 9 –

1. Vrai. Soit $n \geq 1$ s'écrivant comme le carré d'un entier : $n = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $2n$ est aussi le carré d'un entier : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = p^2$. On en déduit que $p^2 = 2k^2$ donc par stricte positivité de p et k :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{k}$$

ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple. En étudiant les premières valeurs de n, on remarque que la propriété est fausse pour $n = 7$. En effet, si il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$7 = a^2 + b^2 + c^2$$

alors a, b et c appartiennent nécessairement à $\{0, 1, 2\}$ (sinon, la somme est supérieure ou égale à 9). On vérifie alors facilement qu'aucun triplet n'est solution.

Méthode

Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier $n \geq 0$ est fausse, il suffit de donner un contre-exemple concret.

2 Ensembles et applications

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$	☐ Vrai	☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$	☐ Vrai	☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 3 –

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [0, 2]$, $B = [1, 2]$, $C = [1, 3]$. Donner explicitement les ensembles suivants :

— $A \cup B$.

— $A \cup C$.

— $A \cap C$.

— $\overline{A} \cap C$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x$$

1. $f \circ g$ est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner son expression.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.

Exercice 5 –

Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble telles que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –
Soit X une partie d'un ensemble E. On définit la fonction indicatrice de X, $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, de la manière suivante :

$$\forall e \in E,\ \mathbf{1}_X(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in X \\ 0 & \text{si } e \notin X \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E. Montrer que :

1. $\mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$.
2. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
3. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin
Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$ ☒ Vrai ☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$ ☒ Vrai ☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$ ☐ Vrai ☒ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$ ☒ Vrai ☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ☒ Vrai ☐ Faux

Cours
Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

— On définit la réunion de A et B, et on note $A \cup B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

— On définit l'intersection de A et B, et on note $A \cap B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

— On définit le complémentaire de A dans E, et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

À retenir

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On a les propriétés suivantes (distributivité) :

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Exercice 2 –

Notons E cet ensemble. Alors :

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$$

Cours

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est l'ensemble des sous-ensembles de E. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, et l'ensemble E sont des parties de E.

Exercice 3 –

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup B$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à B. Or B est inclus dans A donc $A \cup B = A = [0, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup C$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à C. On en déduit que $A \cup C = [0, 3]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cap C$ si et seulement si x appartient à A et x appartient à C. On en déduit que $A \cap C = [1, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $\overline{A} \cap C$ si et seulement si x n'appartient pas à A et x appartient à C donc si et seulement si $x < 0$ ou $x > 2$ et $x \in [1, 3]$. Ainsi, $\overline{A} \cap C =]2, 3]$.

Exercice 4 –

1. On a f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de même pour g donc $f \circ g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$$

Cours

Soit A, B et C trois ensembles $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle *application composée* de f par g et on note $g \circ f$ l'application :

$$g \circ f \; : \; \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Dans le cas de deux fonctions, les ensembles d'arrivées ne sont pas forcément précisés. Pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ dans le cas de deux fonctions f et g définies sur A et B, on détermine les éléments $a \in A$ tels que $f(a) \in B$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f \circ g(x) &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + \tfrac{1}{e^x}) \\ &= \ln(1 + e^x) - \ln(\tfrac{e^x+1}{e^x}) \\ &= \ln(1 + e^x) - (\ln(e^x + 1) - \ln(e^x)) \\ &= \ln(e^x) \\ &= x \end{aligned}$$

Exercice 5 –

Montrons le raisonnement par double inclusion. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup C$ donc $x \in B \cup C$ par hypothèse. On en déduit que x appartient à B ou à C. Distinguons deux cas :

— Si x appartient à B, c'est ce que l'on voulait montrer.

— Si x appartient à C alors il appartient à $A \cap C$. Or $A \cap C = B \cap C$ donc x appartient à B.

On vient donc de montrer que pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc A est inclus dans B.

Par un raisonnement analogue (on échange les rôles de A et de B), on montre que B est inclus dans A. Ainsi, $A = B$.

Méthode

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A = B$ est équivalent à montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercice 6 –

1. Soit $x \in E$. Alors $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si et seulement si $x \notin A$ donc si et seulement si $x \in \overline{A}$. Une fonction indicatrice ne prenant que deux valeurs, on a aussi que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si et seulement si $x \notin \overline{A}$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$$

2. Soit $x \in E$. Alors x appartient à $A \cap B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_B(x) = 1$ donc (sachant qu'une fonction indicatrice vaut 0 ou 1) si et seulement si $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$$

3. La partie $A \cup B$ de E est l'union disjointe des éléments de A qui ne sont pas dans B, des éléments de B qui ne sont pas dans A et des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. En se basant sur ceci, posons :

$$f = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$$

Soit $x \in A \cup B$. Distinguons les trois cas précédents. Si x appartient à A mais pas à B alors :

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 \times 0 = 1$$

De même, si x appartient à B mais pas à A, on obtient $f(x) = 1$. Pour finir, si $x \in A \cap B$:

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$$

Si $x \notin A \cup B$ alors il est clair que $f(x) = 0$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

Exercice 7 –

1. Vrai. Raisonnons par double inclusion. Le fait que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ implique que :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \text{ et } \mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(B)$$

donc :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Alors X est une partie de A et une partie de B donc X est une partie de $A \cap B$. Ainsi :

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$$

On en déduit que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. Faux. Donnons un contre exemple en posant $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$.
On a alors $A \cup B = [0, 3]$. Le segment $[0, 3]$ est donc une partie de $A \cup B$ mais n'est pas une partie de A, ni de B.