

Table des matières

9 Traction et cisaillement	1
I Conditions d'équilibre des milieux déformables	2
II Traction pure	2
1 Schéma de principe et conditions aux limites	2
a Définitions d'ordre géométrique	2
b Définition de la traction pure	4
c Tenseur des contraintes en surface	5
2 Tenseur des contraintes en traction pure	6
3 Déformations en traction pure	8
a Module de Young E	9
b Coefficient de Poisson ν	10
c Tenseur des déformations en traction pure	12
d Module de compression K et variation de volume d'une barre en traction	13
4 Champ de déplacement	13
III Compression pure	14
1 Principe	14
2 Application	14
IV Cisaillement pur	16
1 Schéma de principe : forces et contraintes	17
2 Déformations et champ de déplacement	19
V Equations de Lamé, Hooke et Navier revisitées	20
1 Transformations isothermes	21
a Equations de Lamé et de Hooke	21
b Equation de Navier	22
2 Transformations adiabatiques	22
VI Application : Propriétés élastiques d'un cylindre creux	23
1 Données du problème	24
2 Calcul du champ de déplacement	25
3 Calcul des déformations et des contraintes	26
a Tenseur des déformations	28
b Tenseur des contraintes	29
4 Cas particuliers	29
a Pressions égales : $p_e = p_i$	30
b Pressions inégales : $p_e \ll p_i$	30
c Pressions inégales : $p_e \gg p_i$	31
5 Première approche du « principe » de Saint-Venant	31
6 Notion de concentration de contrainte	33

7	Méthode des déplacements	33
Annexes		
A	Exercices	35
10 Torsion des barres		
I	Torsion d'une barre cylindrique circulaire	39
1	Définitions et schéma de principe	39
2	Forces et moments agissant sur une section droite.	41
3	Symétries, champ de déplacement et déformations	42
a	Rotation des sections droites	42
b	Déplacements et déformations	43
4	Tenseur des contraintes	46
a	Expression de $\bar{\sigma}$ et cisaillement	46
b	Forces et moments ; relation entre M et k	47
5	Conclusion	49
II	Torsion pure d'une barre cylindrique de section quelconque	49
1	Données géométriques et mécaniques ; méthode de calcul	49
2	Champ de déplacement et fonction de torsion ϕ	50
3	Tenseur des déformations et tenseur des contraintes	52
4	Propriétés de la fonction de torsion ϕ	54
a	Harmonicité de ϕ	54
b	Conditions aux limites sur ϕ	54
5	Force et moment résultants sur les faces de la barre	55
a	Force résultante sur les faces S_{\pm}	55
b	Moment résultant sur les faces S_{\pm}	56
6	Fonction de contrainte $\psi(x_1, x_2)$	57
a	Définition de ψ	57
b	Equation satisfaite par ψ	58
c	Conditions aux limites imposées à ψ	58
d	Forces de cisaillement et fonction de contrainte ψ	61
e	Moment de torsion M et fonction de contrainte ψ	61
7	Fonction de contrainte modifiée ; utilisation de la théorie des fonctions d'une variable complexe	62
III	Applications	63
1	Torsion des tubes cylindriques minces	63
2	Torsion d'une barre de section droite elliptique	66
3	Torsion d'une barre de section droite rectangulaire	69
a	Fonction de contrainte $\psi(x_1, x_2)$	69
b	Tenseurs des contraintes et des déformations	70
c	Champ de déplacement	70
d	Moment et taux de torsion	71
Annexes		
A	Rotation des sections droites.	72
B	Fonctions de torsion et de contrainte : section droite rectangulaire	76
I	Définition d'une nouvelle fonction $g(x_1, x_2)$	76
II	Calcul de $\partial\xi/\partial x_1$ et $\partial\xi/\partial x_2$	78

III	Calcul des fonctions ξ, ψ et ϕ	79
C	Exercices	81
11	Flexion des barres	87
I	Flexion pure	88
1	Schéma de principe et définition	88
a	Forces extérieures	90
b	Forces et moments dans une section droite	90
c	Définition de la flexion pure d'une barre	94
2	Comportement des sections droites lors de la flexion	94
3	Comportement des déformations	97
4	Comportement des contraintes	99
5	Tenseurs des contraintes et des déformations	99
6	Moment résultant et relation d'Euler-Bernoulli	101
a	Force résultante et axe de la barre	101
b	Moment résultant	102
c	Relation d'Euler-Bernoulli	103
7	Champ de déplacement en flexion pure	104
a	Aspect qualitatif	104
b	Calcul du champ de déplacement	104
c	Flexion faible	106
d	Géométrie des sections droites	108
8	Flexion pure d'une barre asymétrique	110
a	Choix des axes ; axes et plans principaux	110
b	Contraintes et déformations	111
c	Champ de déplacement, axe fléchi, plan de flexion	113
d	Rotation des sections droites	116
e	Conclusion générale	117
II	Flexion faible des barres chargées	117
1	Force et moment résultants dans une section droite	118
a	Charges réparties en surface	118
b	Charges discrètes	121
2	Equations du fléchissement des barres chargées	122
a	Forme de l'axe de la barre fléchie	122
b	Calcul de l'effort tranchant	126
c	Conditions aux limites	127
3	Applications	128
a	Barre en porte à faux ou « cantilever »	128
b	Flexion d'une barre sous l'effet de son poids	130
III	Énergie élastique et flexion	131
1	Energie élastique d'une barre en flexion pure	132
2	Energie élastique d'une barre chargée et contraintes	133
IV	Flexion des barres et principe des travaux virtuels	134
1	Rappel du P.T.V.	134
2	Flexion faible d'une barre chargée transversalement	135
a	Champ de déplacement et rotation des sections droites	135

b	Evaluations des différents travaux virtuels	138
c	Les équations d'équilibre et du fléchissement	140
V	Flexion faible avec traction ou compression d'une barre chargée	140
1	Nouvelles équations d'équilibre	141
2	Nouvelles équations du fléchissement	142
3	Les nouvelles équations et le P.T.V.	143
VI	Stabilité de l'équilibre et flambage d'une barre en flexion faible	144
1	Généralités	144
2	Forme de l'axe fléchi et force critique	146
VII	Flexion forte des barres	149
1	Modèle simple	149
a	Définition du vecteur « vitesse » de rotation $\vec{\Omega}$	150
b	Relation entre $\vec{\Omega}$ et \vec{M}	151
c	Equations d'équilibre	153
2	Flexion forte d'une barre symétrique	154
a	Flexion sans torsion d'une barre symétrique	154
b	Equation du fléchissement	154
c	Flexion forte d'un barre en porte-à-faux	156
d	Flambage d'une barre en flexion forte	158

Annexes

A	Champ de déplacement en flexion pure	161
B	Rayon de courbure d'une courbe plane	164
C	Moments d'une surface et axes principaux	166
D	Exercices	168

12 Plaques minces :

A - Traction, compression

I	Données, hypothèses et équations de base	175
II	Tenseur des contraintes moyen	177
1	Annulation de σ_{zz} et conséquences	177
2	Éléments moyennés : $\bar{\sigma}_{ij}$	179
a	Bilan d'impulsion moyen	179
b	Annulation des contraintes moyennes $\bar{\sigma}_{\alpha z}$	180
3	Les équations des contraintes moyennes $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$	181
III	Équation de Navier pour le champ de déplacement moyen	182
IV	Méthode de la fonction de contrainte	184
V	Application : plaque mince avec cavité	185
1	Données du problème	185
2	Conditions aux limites	186
a	Conditions aux limites sur les côtés du carré	186
b	Conditions aux limites sur le cercle intérieur	187
3	Solutions de l'équation bi-harmonique	188
4	Tenseur des contraintes moyen ; vérifications	189
5	Phénomène de concentration de contrainte	190

Annexes

A	Contraintes planes et fonction de contrainte en coordonnées polaires	192
---	--------------------------------------------------------------------------------	-----

B	Solutions périodiques de l'équation bi-harmonique	194
C	Exercices	197
13 Plaques minces :		
B - Flexion faible 201		
I	Flexion pure des plaques minces rectangulaires	202
1	Définition	203
2	Forces et moments dans les sections droites planes	206
3	Contraintes et déformations en flexion pure	207
4	Vérifications et relation moments-courbures	209
5	Champ de déplacement et surface neutre	211
a	Expression de \vec{u}	211
b	Equation de la surface neutre ; flexion faible	212
c	Déplacement et surface neutre	213
d	Retour sur les limitations des calculs	214
6	Expression générale du moment en flexion pure	214
a	Expressions de M_t et M_{nt} en fonction de ρ_x et ρ_y	215
b	Expressions de M_t et M_{nt} en fonction de ρ_n , ρ_t et ρ_{nt}	217
II	Flexion pure des plaques de forme quelconque	218
1	Définition générale de la flexion pure	219
2	Expression générales de $\bar{\epsilon}$ et $\bar{\sigma}$	220
3	Moments et surface neutre en flexion pure	223
4	Cas particulier d'une plaque circulaire, avec $M_x = M_y$	224
5	Condition d'existence d'une surface neutre	225
6	Evidence expérimentale d'une plaque en flexion pure	227
a	Montage avec une plaque circulaire	227
b	Montage avec une plaque rectangulaire	228
III	Flexion faible des plaques minces chargées	231
1	Forces et moments locaux dans les sections droites	231
2	Relations exactes entre forces et moments locaux	235
3	Equation approchée du fléchissement des plaques chargées	237
4	Conditions aux limites sur la fonction ζ	239
a	Plaque rectangulaire encastree	239
b	Plaque rectangulaire posée sur un support	240
c	Plaque rectangulaire à bord libre	241
IV	Flexion des plaques et principe des travaux virtuels	244
1	Mise en équation	244
2	Equation du fléchissement et conditions aux limites	249
a	Plaque encastree	251
b	Plaque posée sur un support	253
c	Plaque à bord libre	255
3	Flexion de la plaque circulaire chargée du § I.3.a.	257
Annexes		
A	Plan tangent, courbures et torsion en un point d'une surface	262
I	Plan tangent	262
II	Courbures, rayons de courbure, torsion en un point	264

B	Contraintes planes et flexion	268
C	Contraintes planes et flexion : généralisation	273
D	Calcul du terme : $I = \iint \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \delta \bar{\epsilon}^* d\Omega$, au second membre du P.T.V.	280
E	Exercices	284
Réponses aux exercices		287
	Chapitre 9	287
	Chapitre 10	291
	Chapitre 11	299
	Chapitre 12	311
	Chapitre 13	319
Index		330

Traction et cisaillement

Dans tous les chapitres de cette seconde partie, ce seront toujours des propriétés d'équilibre de solides isotropes, dans leur domaine d'élasticité linéaire, qui seront étudiées. Nous ne le rappellerons pas à chaque fois.

Nous traitons en premier des contraintes, déformations et déplacements dans des solides en équilibre sous l'effet de forces de traction ou de compression, d'une part, ou de forces de cisaillement, d'autre part. Nous commençons au § I par préciser de façon générale les conditions d'équilibre d'un solide déformable car nous en ferons grand usage dans ce chapitre comme dans les suivants. Nous n'abordons la traction qu'au § II où le phénomène est étudié sur un échantillon en forme de cylindre dont les deux faces sont le siège de forces de traction. C'est ici que sont définis, en fonction des coefficients de Lamé λ et μ introduits au chapitre précédent, d'une part, le module de Young E qui relie linéairement l'allongement dans le sens de la traction à la force de traction et, d'autre part, le coefficient de Poisson ν qui permet de comparer les variations relatives des dimensions de la barre dans la direction de la traction et dans la direction perpendiculaire. La compression, phénomène symétrique de la traction, est expliquée rapidement au § III. Il apparaîtra que les effets de la traction ou de la compression, sont clairement des modifications des longueurs au sein du solide, sans variations d'ordre angulaire. Par contre, le cisaillement abordé au § IV modifie les angles que font des directions tracées à l'intérieur du solide ; son étude s'effectue sur un échantillon, en forme de parallélépipède rectangle, dont quatre des six faces sont le siège de forces situées dans leurs plans ; nous démontrerons, comme nous l'avons annoncé dès le chap.1 d'introduction, que les angles droits que font les côtés du parallélépipède sont modifiés et que leurs déformations sont proportionnelles à la contrainte de cisaillement. A la fin de cette double étude de la traction-compression et du cisaillement, nous aurons vu la signification physique des deux coefficients E et ν qui sont utilisés quasi exclusivement en résistance des matériaux ; cette remarque explique pourquoi nous consacrons tout le § V à écrire à l'aide de E et ν les équations de Lamé, de Hooke, leur généralisation aux transformations non isothermes et l'équation de Navier. Le § VI termine ce chapitre par une application de tout ce qui précède au comportement élastique d'un cylindre creux dont les parois interne et externe sont soumises à des forces de pression ; ce sera l'occasion de mettre en évidence deux résultats très importants tant du point de vue pratique que théorique ; le premier est connu sous le nom de « principe » de Saint-Venant et fait référence à la manière de remplacer le système des forces extérieures qui sont appliquées à la surface du solide par un système équivalent conduisant à des calculs plus simples ; le second concerne un fort accroissement, assez inattendu, de la valeur des contraintes en certaines régions du solide, effet connu sous le nom de « concentration de contrainte ».

Mots-clés : *traction, barre, axe, module de Young, coefficient de Poisson, compression, cisaillement, Navier, Hooke, adiabatique, « principe » de Saint Venant,*

concentration de contrainte.

I. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES MILIEUX DÉFORMABLES

Considérons un objet quelconque indéformable ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit en équilibre mécanique s'énonce simplement : il faut et il suffit que la résultante des forces extérieures agissant sur l'objet ainsi que la résultante de leurs moments soient toutes les deux nulles. Pour un objet déformable cet énoncé doit être abandonné. Pour s'en persuader, il suffit de raisonner avec un fil de caoutchouc aux extrémités duquel sont exercées, à partir d'un instant t_0 , deux forces de traction égales en module et de sens opposés. Nous savons bien que le fil va s'allonger et que, pendant tout le temps de son allongement où il ne se trouve pas en équilibre, la somme des forces de traction est bien nulle ainsi que le moment résultant. En fait nous avons déjà réglé cette difficulté au chap. 5 § II.2, quand nous avons énoncé le Postulat Fondamental de la Dynamique des Milieux Continus ; nous avons dit que, pour tout domaine \mathcal{D} à l'intérieur d'un milieu continu \mathcal{M} , la résultante des forces extérieures \vec{F}_{ext} et le moment résultant \vec{M}_{ext} étaient reliés à l'impulsion \vec{P} et au moment cinétique \vec{L} du domaine \mathcal{D} par les deux équations :

$$\vec{F}_{ext} = \frac{D\vec{P}}{Dt} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{ext} = \frac{D\vec{L}}{Dt}$$

Il est clair qu'à l'équilibre, par définition, aucune grandeur physique au sein de \mathcal{M} ne peut varier avec le temps ; en conséquence, quel que soit le domaine \mathcal{D} à l'intérieur d'un milieu continu en équilibre, la résultante des forces agissant sur \mathcal{D} ainsi que la résultante de leurs moments sont nulles.

Nous verrons que cette double condition nous sera très utile pour calculer les forces et les moments qui agissent sur des surfaces à l'intérieur même d'un milieu déformable \mathcal{M} quand sont connus les forces et les moments extérieurs agissant sur les surfaces qui limitent \mathcal{M} .

II. TRACTION PURE

1. Schéma de principe et conditions aux limites

Le phénomène de traction s'analyse simplement à l'aide d'une barre cylindrique dont la section par un plan perpendiculaire à sa direction longitudinale, appelée *section droite*, présente un contour a priori quelconque. Commençons par introduire un système d'axes cartésiens adapté à la géométrie de l'échantillon et par définir *l'axe de la barre*.

a. Définitions d'ordre géométrique

Choix des axes. Partons d'un système d'axes cartésiens $(o, x_1x_2x_3)$ dont on sait simplement que ox_3 est choisi parallèle aux génératrices de la surface cylindrique formant la surface latérale Σ_ℓ de la barre ; plaçons-nous dans une section droite quelconque de cote x_3 , de surface S , et calculons les deux intégrales :

$$x_{G1} = \frac{1}{S} \int_S x_2 dS \quad \text{et} \quad x_{G2} = \frac{1}{S} \int_S x_1 dS \quad (\text{II.1})$$

Le couple (x_{G1}, x_{G2}) peut être considéré comme les coordonnées suivant ox_1 et ox_2 du centre de gravité G_{x_3} de la section droite à laquelle nous aurions attribué fictivement une masse par unité de surface constante. Le point G_{x_3} est tout simplement le *centre* de la section droite de cote x_3 . Du fait que toutes les sections droites de la barre cylindrique sont identiques, leurs centres sont alignés sur un axe parallèle à ox_3 , appelé par définition : *axe de la barre*. Profitons de cette propriété pour effectuer un changement d'axe qui revient à confondre l'axe ox_3 avec l'axe de la barre que nous appelons l'axe oz , l'origine o étant située, par exemple, à mi-longueur de la barre. Désormais, nous travaillons avec le système d'axes cartésiens (o, xyz) où les axes ox et oy sont situés, sans plus de précision,

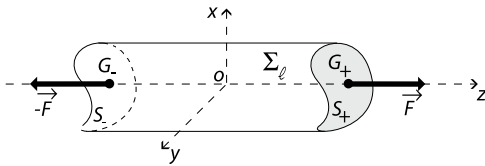


FIGURE 9.1 :

Barre cylindrique en traction. Son axe a été choisi comme axe oz et comme ligne d'action des forces résultantes $+F$ et $-F$.

dans le plan perpendiculaire à oz , comme représenté sur la fig.9.1. Il est alors clair que, dans ce système d'axes, les coordonnées suivant ox et oy du centre de toute section droite sont nulles, ce qui se traduit, en transposant les éqs.(II.1), par :

$$0 = \frac{1}{S} \int_S x dS \quad \text{et} \quad 0 = \frac{1}{S} \int_S y dS \quad (\text{II.2})$$

Ces deux résultats nous seront utiles quand nous discuterons des moments des forces de traction.

Faces positives et négatives. Terminons-en avec ces propriétés géométriques de la barre en précisant que les deux sections droites situées à ses deux extrémités, dans les plans de cote $z = \pm L/2$, sont appelées les faces de la barre. La face de cote $z = L/2$ possède une normale sortant de la barre qui est orientée dans le même sens que l'axe oz ; pour cette raison, elle est qualifiée de *face positive* et notée S_+ ; par contre, la face de cote $z = -L/2$, dont la normale sortant de la barre est orientée en sens contraire de l'axe oz est une *face négative* .

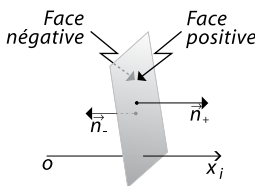


FIGURE 9.2 :

Faces positive et négative d'une surface perpendiculaire à l'axe ox_i , avec leurs normales \vec{n}_+ et \vec{n}_- .

On aura compris que, de façon générale et comme représenté sur la fig.9.2, toute surface plane perpendiculaire à l'un quelconque, ox_i , des trois axes de coordonnées possède une face positive et une face négative ; la face positive est celle dont le vecteur normal unitaire \vec{n}_+ est orienté dans le même sens que l'axe ox_i , la face négative est l'autre, dont la normale unitaire \vec{n}_- est orientée en sens contraire de l'axe ox_i . Ces définitions et

propriétés admises, passons en revue les forces extérieures en jeu en traction pure et les contraintes existant à la surface de la barre.

b. Définition de la traction pure¹

Définition. Pour qu'une barre cylindrique soit en traction pure, il est nécessaire que les forces extérieures qui lui sont appliquées possèdent les caractéristiques suivantes que l'on retrouve sur la fig.9.1 :

- (i) aucune force ne s'exerce sur sa surface latérale Σ_ℓ ;
- (ii) seules les deux faces extrêmes S_+ et S_- sont le siège de forces uniformément réparties, orientées parallèlement à l'axe oz de la barre, de résultantes respectivement égales à \vec{F} , de même sens que oz , sur S_+ et à $-\vec{F}$, de sens opposé à celui de oz , sur S_- (il n'y a donc pas de forces de pesanteur qui puissent intervenir).

Etude de l'équilibre. Vérifions que ce système de forces est compatible avec l'équilibre de la barre, ce qui nous obligera à préciser les points d'application des forces résultantes $\pm\vec{F}$ et complètera la définition de la traction pure. Tout d'abord, comme les forces sont uniformément réparties, S étant l'aire des sections droites, désignons par :

$$\sigma = \frac{F}{S} > 0 \quad (\text{II.3})$$

la force par unité de surface qui règne sur la face S_+ (celle qui règne sur S_- est évidemment égale à l'opposée : $-\sigma$). Il est clair que la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur la barre est nulle, ce qui n'est que la première partie des conditions de son équilibre ; la seconde partie concerne les moments. Précisément, montrons que le moment \vec{M}_+ des forces qui s'exercent sur la face S_+ , calculé par rapport au centre G_+ de S_+ , est nul ; en effet, par définition :

$$\vec{M}_+ = \int_S (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \wedge \sigma\vec{e}_z dS = \sigma \left(-\vec{e}_y \int_S x dS + \vec{e}_z \int_S y dS \right)$$

Compte tenu des éqs.(II.2), les deux dernières intégrales de surface sont nulles et $\vec{M}_+ = 0$. Nous en concluons que le point d'application de la résultante \vec{F} est exactement le centre de la face S_+ , comme représenté sur la fig.9.1. Nous démontrerions de la même manière que le moment \vec{M}_- des forces qui s'exercent sur la face S_- , calculé par rapport à son centre G_- , est nul et que le point d'application de la résultante $-\vec{F}$ est le centre G_- de la face S_- . Nous avons donc démontré que : $\vec{M}_+ = \vec{M}_- = 0$ et que la ligne d'action des forces de traction \vec{F} et $-\vec{F}$ sur les faces S_+ et S_- est l'axe de la barre. Terminons-en avec les questions de moment en remarquant que, la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur la barre étant nulle, le calcul du moment résultant total peut s'effectuer par rapport à n'importe quel point² ; il suffit de choisir par exemple le centre G_+ de la

1. Le qualificatif de « pure » signifie que le phénomène de traction intervient seul, sans être mélangé à d'autres types de déformations, comme le cisaillement, la flexion ou la torsion (étudiées dans les chapitres suivants) et en l'absence de toute force en volume.

2. Rappelons qu'étant donné un système de forces dont la résultante est égale à \vec{F} , les moments \vec{M}_{o_1} et \vec{M}_{o_2} de ces forces, calculés par rapport à deux points o_1 et o_2 distincts, sont reliés par :

face S_+ pour constater immédiatement que le moment de \vec{F}_- par rapport à G_+ est nul et que le moment résultant de toutes les forces qui s'exercent sur la barre l'est également. Finalement, les forces extérieures qui définissent la traction pure de la barre satisfont à toutes les conditions requises pour qu'elle soit en équilibre.

Notons au passage un résultat utile ultérieurement : si les forces de traction ne sont pas uniformément réparties sur les faces S_+ et S_- , les centres de ces dernières ne sont plus les points d'application des résultantes³ et la barre n'est plus en équilibre car le moment total n'est plus nul ; elle évoluera vers un état d'équilibre qui ne peut être celui de la traction pure.

c. Tenseur des contraintes en surface

Les valeurs des forces extérieures appliquées à la barre en traction pure étant connues, il est aisé d'en déduire les conditions aux limites que doit satisfaire le tenseur des contraintes sur la surface de la barre. Commençons par la surface latérale Σ_ℓ exempte de toute force ; par conséquent, en tout point de Σ_ℓ , le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ est tel que : $\bar{\sigma} \vec{n} = 0$, où le vecteur \vec{n} est la normale unitaire sortant du barreau en ce point. Comme le vecteur \vec{n} est perpendiculaire à l'axe du barreau, il ne possède que deux composantes non nulles, n_x et n_y , et la condition sur $\bar{\sigma}$ s'explique en :

$$\bar{\sigma} \vec{n} = \sum_i (\sigma_{ix} n_x + \sigma_{iy} n_y) \vec{e}_i = 0 \quad \text{en tout point de } \Sigma_\ell.$$

ce qui implique : $\sigma_{ix} n_x + \sigma_{iy} n_y = 0 \quad \forall \vec{n} \quad \text{et} \quad i = x, y, z$

Ces relations ne sont satisfaites qu'à condition que :

$$\sigma_{ix} = \sigma_{iy} = 0 \quad \text{en tout point de } \Sigma_\ell, \quad \text{avec} \quad i = x, y, z \quad (\text{II.4})$$

Passons aux valeurs des contraintes sur les deux faces S_+ et S_- de la barre, de normales unitaires respectives : \vec{e}_z et $-\vec{e}_z$; comme, sur ces faces, les forces par unité de surface sont uniformes et valent respectivement $(F/S) \vec{e}_z$ et $(-F/S) \vec{e}_z$, le tenseur des contraintes est tel que :

$$\bar{\sigma}(x, y, z = \pm \frac{L}{2}) (\pm \vec{e}_z) = \pm \frac{F}{S} \vec{e}_z = \pm \sigma \vec{e}_z$$

ce qui entraîne :

$$\sigma_{zz} = \sigma, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \text{en tout point de } S_+ \text{ et } S_- \quad (\text{II.5})$$

Les éqs.(II.4) et (II.5) fixent les conditions aux limites auxquelles les éléments du tenseur des contraintes sont astreints à la surface de la barre.

$$\vec{M}_{O_2} = \vec{M}_{O_1} + \overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2} \wedge \vec{F}$$

Dans le cas particulier où $\vec{F} = 0$, le moment des forces ne dépend donc plus du point par rapport auquel il est calculé.

3. Compte tenu des éq.(II.2), il n'est pas possible que :

$$\int_S \sigma_t x dS = \int_S \sigma_t y dS = 0$$

quand $\sigma (> 0$ pour que la barre soit bien en traction) dépend de x et de y .

2. Tenseur des contraintes en traction pure

Nous déterminons maintenant le tenseur des contraintes à l'intérieur de la barre en traction. Nous utilisons pour cela une technique de coupe, dont nous ferons fréquemment usage tant dans ce chapitre que dans les suivants, qui sert à visualiser et calculer les forces qui s'exercent sur des surfaces situées à l'intérieur même du solide étudié.

Coupons donc, par la pensée, la barre par un plan perpendiculaire à son axe, de cote z ; nous créons ainsi deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 possédant en commun la section droite $S(z)$, comme représenté sur la fig.9.3.a. Pour faciliter la représentation, dessinons les deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , comme sur la fig.9.3.b, en les écartant l'un de l'autre; \mathcal{D}_1

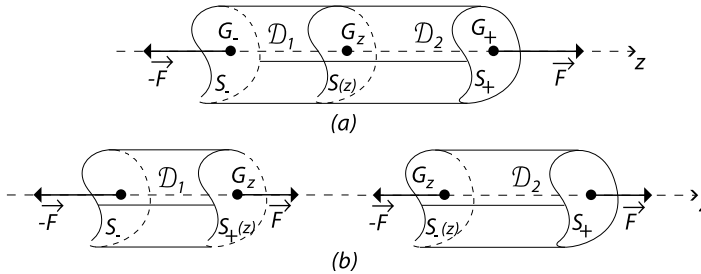


FIGURE 9.3 :

Les forces agissant sur les faces d'une section droite d'une barre en traction sont égales à $\pm \vec{F}$ et le centre G_z de la section est leur point d'application.

est ainsi en partie limité par la face $S_+(z)$ de $S(z)$ et \mathcal{D}_2 par la face $S_-(z)$. La barre étant en équilibre, nous avons expliqué que chacun de ses domaines l'était aussi, en particulier \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . La résultante des forces agissant sur \mathcal{D}_1 doit donc être nulle; comme aucune force n'agit sur la surface latérale de \mathcal{D}_1 et que celles s'exerçant sur sa face S_- ont pour résultante $-\vec{F}$, sa face $S_+(z)$ doit être le siège de forces dont la résultante vaut \vec{F} . De plus, pour que le moment total des forces agissant sur \mathcal{D}_1 soit nul, le point d'application de cette résultante doit être le centre G_z de la section droite $S(z)$, ce qui implique, comme nous l'avons expliqué à la fin du § b, que la répartition des forces sur $S_+(z)$ soit, comme sur S_+ , uniforme et égale à σ par unité de surface. Nous avons donc démontré un premier résultat selon lequel en tout point de la barre :

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \sigma \quad \text{et} \quad \sigma_{xz}(x, y, z) = \sigma_{yz}(x, y, z) = 0 \quad (\text{II.6})$$

Nous établissons de la même manière que les forces qui s'exercent sur la face $S_-(z)$ de \mathcal{D}_2 sont également uniformément réparties, avec une force par unité de surface égale à $-\sigma$, et possèdent une résultante égale à $-\vec{F}$, dont le point d'application est le centre G_z de la section droite.

Ce que nous venons d'expliquer sur les forces qui s'exercent sur les faces $S_{\pm}(z)$ montre simplement que la force résultante avec laquelle le domaine \mathcal{D}_2 agit sur \mathcal{D}_1 à travers la section droite $S(z)$ est égale à la force extérieure \vec{F} agissant sur la face S_+ de la barre et qu'inversement la force résultante avec laquelle \mathcal{D}_1 agit sur \mathcal{D}_2 est égale à la force résultante $-\vec{F}$ agissant sur la face S_- .

Premier résultat. La barre en traction ne fait que transmettre, à travers toutes ses sections droites, les forces extérieures qui sont appliquées à ses faces extrêmes.

Il reste encore à calculer les autres éléments du tenseur des contraintes à l'intérieur de la barre. A cet effet, remarquons que nous pouvons décomposer la barre en rondelles, comme représenté sur la fig.9.4.a ; celle située entre les sections droites de cote $z - dz/2$

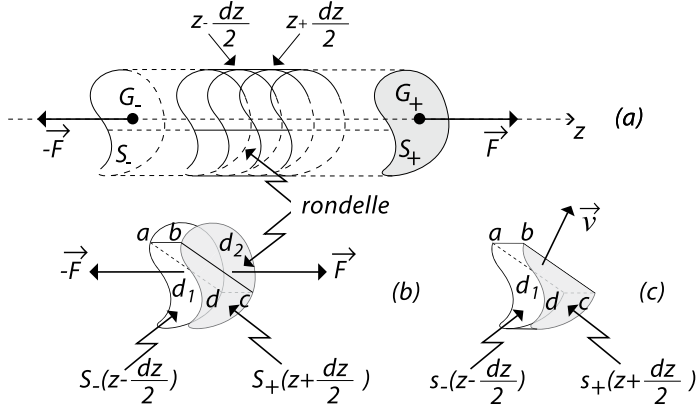


FIGURE 9.4 :

(a) Barre découpée en rondelles. (b) Séparation d'une rondelle en deux domaines d_1 et d_2 . (c) Domaine d_1 .

et $z + dz/2$ voit ses faces $S_-(z - dz/2)$ et $S_+(z + dz/2)$ soumises à des forces réparties uniformément et de résultantes respectivement égales à $-\vec{F}$ et \vec{F} . Par conséquent toutes les rondelles sont soumises rigoureusement aux mêmes systèmes de forces, engendrant dans chacune d'elles les mêmes contraintes et les mêmes déformations. Utilisons à nouveau la méthode de coupe en coupant la rondelle centrée à la cote z par un plan parallèle à l'axe de la barre ; nous créons ainsi deux domaines d_1 et d_2 dessinés sur la fig.9.4.b et séparés par la surface rectangulaire $(abcd)$. Raisonnons sur le petit domaine d_1 représenté sur la fig.9.4.c dont : (i) ses deux surfaces $s_\pm(z \pm dz/2)$ sont le siège de forces uniformément réparties qui s'équilibrent ; (ii) sa portion de la surface latérale Σ_ℓ est exempte de toute action extérieure ; (iii) sa petite surface rectangulaire $(abcd)$ doit être aussi exempte de force pour que d_1 soit en équilibre. Rien ne contredit l'idée selon laquelle la force par unité de surface en tout point de ce rectangle est nulle et nous l'adoptons, en nous réservant de la justifier complètement in fine. Par conséquent, en tout point du rectangle $(abcd)$: $\vec{\sigma} \vec{\nu} = 0$, où le vecteur $\vec{\nu}$ est sa normale unitaire ; ce vecteur est orthogonal à l'axe de la barre et ne possède que deux composantes non nulles : ν_x et ν_y , si bien que, en tenant compte des résultats partiels (II .6) :

$$\sigma_{xx} \nu_x + \sigma_{xy} \nu_y = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{yx} \nu_x + \sigma_{yy} \nu_y = 0$$

Ces résultats s'appliquent quels que soient la rondelle considérée et le plan de coupe parallèle à l'axe de la barre ayant servi à construire le domaine d_1 ; donc, quelles que soient les coordonnées (x, y, z) et quelles que soient les composantes ν_x et ν_y du vecteur $\vec{\nu}$. Ils entraînent automatiquement qu'en tout point de la barre :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = 0 \tag{II .7}$$

Avec les résultats (II.6) et (II.7), tous les éléments du tenseur des contraintes sont maintenant connus et tels que :

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{iz} \delta_{jz}$$

Second résultat. L'expression de $\bar{\bar{\sigma}}$ est la plus simple qui puisse se rencontrer :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{F}{S} \quad (\text{II.8})$$

Ce tenseur des contraintes est intuitivement très satisfaisant et nous aurions pu le proposer bien plus tôt, en le justifiant beaucoup plus rapidement de la manière suivante. Nous avons démontré au chap.8 deux résultats : (i) le tenseur des contraintes d'un milieu élastique linéaire en équilibre doit être solution de l'équation de bilan d'impulsion, réduite à $\text{div} \bar{\bar{\sigma}} = \bar{0}$ en l'absence de force en volume, et doit également satisfaire aux équations de Beltrami-Michell ; (ii) la solution qui satisfait aux conditions aux limites à la surface du milieu, est unique⁴. Il est trivial de vérifier que le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ écrit à l'éq.(II.8), qui ne possède comme élément non nul que l'élément constant : $\sigma_{zz} = \sigma$, obéit exactement à toutes les équations et conditions requises ; c'est donc le tenseur des contraintes qui règne dans une barre en traction pure.

3. Déformations en traction pure

Maintenant que nous connaissons le tenseur des contraintes au sein de la barre en traction, nous accédons immédiatement au tenseur des déformations grâce à la loi de Hooke (cf.chap.8, éq.(II-23)) que nous rappelons :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2\mu} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} \quad (\text{II.9})$$

Souvenons-nous qu'un élément diagonal $\epsilon_{ii}(\vec{r})$ représente la variation relative de longueur d'un segment matériel infiniment petit, centré à l'extrémité du vecteur \vec{r} et parallèle à l'axe ox_i ; tandis qu'un élément non diagonal $\epsilon_{ij}(\vec{r})$ est égal à la variation par rapport à $\pi/2$ de l'angle que font deux segments matériel infiniment petits, initialement issus de l'extrémité du vecteur \vec{r} , orthogonaux entre eux et respectivement parallèles aux axes ox_i et ox_j . Dans le cas de la traction, le tenseur des contraintes est uniforme et il en est de même du tenseur des déformations ; ceci entraîne que ϵ_{zz} est en fait égal à la variation relative de toute la longueur, L , de la barre, pendant que ϵ_{xx} et ϵ_{yy} sont les variations relatives de ses longueurs transverses, ℓ_x et ℓ_y , respectivement parallèles aux axes ox et oy . En introduisant l'expression (II.8) de $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la relation de Hooke (II.9), nous trouvons que :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \frac{F}{S} \quad (\text{II.10})$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\Delta \ell_x}{\ell_x} = \frac{\Delta \ell_y}{\ell_y} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \frac{F}{S} \quad (\text{II.11})$$

4. L'unicité n'est pas démontrée quand le coefficient de Poisson est < 0 .

et tous les éléments non diagonaux sont nuls : $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$.

Comme attendu, lorsque l'on tire sur une barre, elle s'allonge tandis que ses dimensions transverses sont modifiées. De plus, comme les éléments non diagonaux de $\bar{\epsilon}$ sont tous nuls, deux lignes respectivement parallèles à deux axes de coordonnées restent orthogonales entre elles.

Les schémas de la fig.9.5 résument tous ces résultats dans le cas d'une barre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle

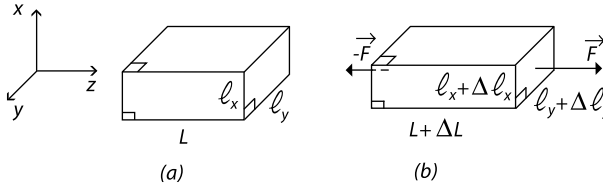


FIGURE 9.5 :

Parallélépipède rectangle : (a) avant traction et (b) après traction ; les angles droits sont conservés et les longueurs des côtés sont modifiées : $\Delta L/L = \sigma/E$, $\Delta l_y/l_y = \Delta l_z/l_z = -\nu \sigma/E$.

Les expressions (II.10) ou (II.11) de $\Delta L/L$ ou de $\Delta l_x/l_x = \Delta l_y/l_y$ montrent que les allongements relatifs sont proportionnels à ce qui en est la cause : la contrainte longitudinale $F/S = \sigma$; mais les coefficients de proportionnalité exprimés en fonction des coefficients de Lamé, λ et μ , présentent des expressions compliquées. Cette remarque amène à définir des coefficients plus adaptés et c'est ce qui est fait maintenant avec la définition des deux coefficients élastiques les plus utilisés : le module de Young et le coefficient de Poisson.

a. Module de Young E

Pour traduire le plus simplement possible la relation linéaire (II.10), il suffit évidemment d'écrire :

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{avec :} \quad E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad (\text{II.12})$$

Définition. Le coefficient de proportionnalité, E (comme Elasticité), entre la force par unité de surface et l'allongement relatif s'appelle le **module de Young**.

Signe de E . Nous savons bien que la traction allonge la barre et nous n'imaginons pas que le signe de E puisse être autre que > 0 ; c'est ce qui se démontre en exprimant E à l'aide du module de compression isotherme : $K = \lambda + 2\mu/3$, défini au chap.8 § II.3, et du module de cisaillement μ :

$$E = \frac{9\mu K}{\mu + 3K} \quad \implies \quad \boxed{E > 0} \quad (\text{II.13})$$

car nous avons démontré au chap.8 § II.4, en utilisant le second principe de la thermodynamique, que K et μ sont tous deux > 0 .

Matériaux	E(GPa)	ν	Matériaux	E(GPa)	ν
Al	71	0,34	bois	11-13	
Zn	78	0,21	verre	50-80	0,17-0,27
Cu	100	0,33	béton(comp.)	10-30	0,1-0,2
Ti	105	0,34	granite, marbre	25-100	0,2-0,3
Ni	210	0,31	Plexiglass	2,9	0,4
Be	300	0,5	Nylon	2,1-3,4	0,4
W	340-380	0,2	Polyéthylène	0,7-1,4	0,4
Acier	150-220	0,27-0,35	caoutchouc	0,001-0,004	0,45-0,50

TAB. 9.1: Valeurs du module de Young E et du coefficient de Poisson ν de divers matériaux à température ambiante.

Un peu d'histoire : Thomas YOUNG 1773 - 1829

Tant est grande et diverse l'activité de Young que ses biographies mentionnent rarement qu'il est à l'origine du module d'élasticité qui porte son nom. Dès sa jeunesse, il semble tout connaître : le grec, le latin, l'hébreu, le français, l'italien, le persan, l'arabe, sans oublier l'anglais sa langue maternelle, la médecine - il l'étudie à Londres, Edimbourg et Göttingen et obtient son diplôme en 1795 -, la botanique, la musique dont il joue de plusieurs instruments. Il fera des découvertes sur la vision (l'accommodation par la déformation du cristallin et la perception des couleurs par trois nerfs de la rétine) et sur les hiéroglyphes égyptiens (les signes dans les cartouches représentent des noms propres). Mais ses recherches en physique sur les interférences lumineuses à travers les « trous de Young » est son apport le plus précieux ; sa théorie s'est transmise jusqu'à nos jours pratiquement sans changement. Il aura enseigné la philosophie naturelle et la physique, exercé la médecine et effectué des recherches en physiologie, été secrétaire de la Royal Society de 1802 à sa mort, été élu en 1818 secrétaire du Board of Longitudes. Young peut sûrement être qualifié de savant universel.

Ordres de grandeur. E possède les mêmes dimensions que les coefficients de Lamé ou qu'une contrainte ; il se mesure en N/m^2 ou en Pa. Pour fixer les idées, le tableau 9.1 donne, pour différents matériaux, un échantillon des valeurs de E et du coefficient de Poisson ν que nous définissons au § suivant. A titre d'exemple, calculons l'allongement en traction de deux matériaux de natures très différentes. Commençons avec une barre en acier, de longueur $L = 1$ m, de section droite $S = 1$ cm^2 , sur laquelle s'exercent des forces de traction $F = 10^4$ N ; son module de Young $E = 200$ GPa. L'unique contrainte longitudinale vaut : $\sigma_{zz} = \sigma = F/S = 10^8$ Nm^{-2} et la déformation longitudinale est égale à : $\epsilon_{zz} = \sigma/E = 0,5 \cdot 10^{-3}$. L'allongement de la barre atteint ainsi : $\Delta L = \epsilon_{zz} L = 0,5$ mm. Poursuivons ce même type de calcul avec un élastique de 10 cm de longueur et de 2 mm^2 de section, dont le module de Young ne vaut que $2 \cdot 10^6$ Pa et sur lequel nous tirons avec une force de 1 N. Nous trouvons que la contrainte $\sigma_{zz} = 0,5 \cdot 10^6$ Nm^{-2} , la déformation $\epsilon_{zz} = \sigma_{zz}/E = 0,25$ et que l'allongement de l'élastique $\Delta L = \epsilon_{zz} L = 2,5$ cm.

b. Coefficient de Poisson ν

Examinons maintenant les variations relatives des dimensions de la barre dans les directions transverses par rapport à la direction de traction. Comme $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, ces

variations relatives sont égales dans les deux directions transverses indépendantes, ox et oy ; elles sont donc identiques pour toutes les dimensions transverses⁵ de cette barre supposée faite d'un matériau isotrope et homogène.

Il est intéressant de comparer la variation relative de la dimension de la barre dans le sens de la traction avec la variation relative d'une de ses dimensions transverses. Pour cela il suffit donc de calculer le rapport :

$$\nu = -\frac{\Delta\ell_x/\ell_x}{\Delta L/L} = -\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \quad \text{ou} \quad \nu = -\frac{\Delta\ell_y/\ell_y}{\Delta L/L} = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \quad (\text{II.14})$$

Signes et expressions de ν . Dans la définition (II.14), le signe moins a été introduit avec l'idée communément admise que, quand nous tirons sur le barreau, les longueurs transverses diminuent et avec l'espoir de définir un coefficient de Poisson toujours positif. Or il n'en est rien ! Pour s'en convaincre partons de l'éq.(II.17), démontrée juste ci-dessous, entre ν , K et μ , et isolons K sous la forme :

$$K = \frac{2}{3}\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\nu}{1-2\nu} > 0 \quad (\text{II.15})$$

car nous savons que le second principe de la thermodynamique impose à K et μ d'être ≥ 0 ; cette condition, $(1+\nu)/(1-2\nu) \geq 0$ oblige donc le coefficient de Poisson à se situer dans l'intervalle $[-1, 1/2]$:

$$\boxed{-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}} \quad (\text{II.16})$$

Définition. ν se nomme : **coefficient de Poisson**. Il est évidemment sans dimension.

Compte tenu des éqs.(II.10), (II.11) et (II.12), ν s'exprime en fonction du couple des coefficients de Lamé ou du couple (K, μ) ou encore du couple (K, E) sous les formes équivalentes :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = \frac{3K - E}{6K} \quad (\text{II.17})$$

Nous voyons bien qu'il est possible de construire plusieurs couples de coefficients élastiques indépendants, mais ce sont les couples (λ, μ) et (E, ν) qui sont les plus utilisés.

5. Considérons un segment matériel transverse quelconque, repéré par le vecteur \vec{a} , de composantes transverses a_x et a_y telles que $a^2 = a_x^2 + a_y^2$. Lors d'une traction au cours de laquelle a, a_x, a_y varient respectivement de $\Delta a, \Delta a_x, \Delta a_y$:

$$a \Delta a = a_x \Delta a_x + a_y \Delta a_y = a_x^2 \frac{\Delta a_x}{a_x} + a_y^2 \frac{\Delta a_y}{a_y} = a^2 \epsilon_{xx} = a^2 \epsilon_{yy}$$

puisque $\Delta a_x/a_x = \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \Delta a_y/a_y$; nous obtenons bien : $\Delta a/a = \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$.

Un peu d'histoire : Siméon, Denis POISSON 1781 - 1840

Se référer aux travaux de Poisson est toujours d'actualité, car ses recherches ont porté sur les mathématiques appliquées à la physique, la mécanique et les probabilités. Son nom est resté attaché à : « l'intégrale de Poisson », « l'équation de Poisson » en théorie du potentiel, « le crochet de Poisson » pour les équations aux dérivées partielles, « le coefficient de Poisson » en élasticité, « la constante de Poisson » en électricité, « la distribution de Poisson » en probabilités.

Très jeune, Poisson a attiré l'attention sur ses aptitudes en mathématiques ; à 17 ans, il entre à l'École Polytechnique où il se lie d'amitié avec ses professeurs Lagrange et Laplace. Nommé professeur dans cette école à 21 ans, il entrera ensuite au Bureau des longitudes en 1808 et deviendra en 1809 professeur à la Faculté des Sciences de Paris qui venait d'être créée. Trois ans avant sa mort, il sera élevé au rang de pair de France.

Ainsi, la thermodynamique autorise l'existence de coefficient de Poisson négatif ; ce qui signifie que, dans une expérience de traction d'un barreau, non seulement sa longueur dans le sens de la traction augmente mais ses dimensions transverses croissent aussi. Pendant longtemps la possibilité d'un tel phénomène a été oubliée, au point que, dans de nombreux ouvrages, l'intervalle des variations de ν se trouve faussement limité à $[0, 1/2]$. Or depuis 1985, des mesures de coefficient de Poisson dans des matériaux polymérisés ont donné des valeurs négatives, en plein accord avec la théorie thermodynamique⁶. Cependant, en dehors de ces exceptions, le coefficient de Poisson est positif et sa mesure oscille, d'après le tableau 9.1, entre 0,1 pour le béton et presque 0,5 pour le caoutchouc, en passant par des valeurs voisines de 0,3 pour de nombreux métaux et alliages.

Terminons ces considérations générales sur ν en remarquant, sur l'éq.(II-15), que, quand ν tend vers sa limite supérieure 1/2, le module de compression K devient très supérieur au module de cisaillement μ . Autrement dit, dans des déformations plus complexes que la traction pure, mettant en jeu à la fois des effets de dilatation volumique caractérisés par K et des phénomènes de cisaillement caractérisés par μ , les premiers dominent les seconds lorsque ν devient voisin de sa limite supérieure 1/2.

c. Tenseur des déformations en traction pure

Pour la barre en traction pure de la fig.9.1, il est maintenant trivial d'exprimer les éléments du tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ en fonction du module de Young et du coefficient de Poisson. Nous trouvons sans difficulté le résultat très simple :

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} -\nu \sigma/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \sigma/E & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/E \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{F}{S} \quad (\text{II-18})$$

Ce qui se traduit sur les variations de longueur par :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\Delta \ell_y}{\ell_y} = \frac{\Delta \ell_z}{\ell_z} = -\frac{\nu \sigma}{E}$$

6. Voir par exemple : B.D. Caddock and K.E. Evans, Phys. Rev. D 22 1877 (1989). Au niveau microscopique, ce sont évidemment les interactions moléculaires qui sont à l'origine d'un tel phénomène ; du fait de ces interactions, sans aucun doute complexes, un accroissement de la distance intermoléculaire dans une certaine direction engendre un accroissement des distances intermoléculaires dans des directions orthogonales.

Nous récupérons ainsi les éqs.(II .10) et (II .11), non plus écrites à l'aide de λ et μ , mais avec E et ν .

Il ne faut pas oublier les conditions d'utilisation du tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$: ses éléments sont très inférieurs à 1. Comme le coefficient de Poisson est compris entre -1 et 1/2, il faut donc qu'en traction pure, les forces par unité de surface σ soient toujours faibles devant le module de Young du matériau auquel elles sont appliquées :

$$\sigma \ll E \iff \text{faibles déformations}$$

d. **Module de compression K et variation de volume d'une barre en traction**

Nous pouvons facilement retrouver, dans ces questions de traction pure, que le module de compression K est bien le coefficient adapté pour caractériser les variations de volume lors des déformations. En effet, la variation de volume d'un barreau homogène en traction pure vaut :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta l_y}{l_y} = tr \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma \quad \text{avec } \sigma > 0$$

Mais d'après les éqs.(II -17) :

$$\frac{1}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \geq 0 \implies \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\sigma}{3K} \geq 0$$

$\Delta\Omega/\Omega$ est donc toujours ≥ 0 ; ce qui prouve que même avec une diminution des dimensions transversales, la variation de longueur dans le sens de la traction domine au point de toujours faire varier positivement le volume de l'échantillon.

Ainsi $1/3 K$ est le coefficient de proportionnalité entre la variation relative de volume et la force de traction par unité de surface σ . Le facteur $1/3$ provient de la manière dont le barreau est déformé : il n'est tiré que dans la seule direction de l'axe oz ; avec un échantillon parallélépipédique, si nous imaginons pouvoir exercer des forces de traction sur ses six faces, avec partout la même force par unité de surface, nous trouverions évidemment que : $\Delta\Omega/\Omega = \sigma/K$. Dans ces expériences de traction, K joue plutôt le rôle d'un module de dilatation que de compression. Mais il suffit, comme nous le faisons dans le très bref § III suivant, de passer à l'étude de la compression pure pour retrouver le sens habituel de K .

4. **Champ de déplacement**

Le champ de déplacement \vec{u} est très facilement calculable à partir du résultat (II .18) sur $\bar{\bar{\epsilon}}$; en repérant les déplacements par rapport à celui de l'origine des coordonnées, nous obtenons :

$$u_x = -\frac{\nu\sigma}{E} x \quad , \quad u_y = -\frac{\nu\sigma}{E} y \quad , \quad u_z = \frac{\sigma}{E} z$$

Quand le déplacement est petit, c'est-à-dire lorsque :

$$u_x, u_y \ll l_y, l_z \quad \text{et} \quad u_z \ll L$$

alors σ/E est toujours $\ll 1$ et les déformations sont toujours petites. Inversement, si les déformations sont faibles, il en est de même des déplacements. Autrement dit, en traction (ou compression) pure, déformations et déplacements sont petits simultanément :

$$\sigma \ll E \iff \text{petits déplacements} \iff \text{faibles déformations}$$

Il est important de noter que nous ne retrouverons pas ce résultat dans les autres phénomènes d'élasticité élémentaires que sont la torsion et la flexion.

III. COMPRESSION PURE

1. Principe

Le passage de la traction pure à la compression pure d'une barre cylindrique s'effectue en changeant simplement les sens des forces exercées sur les faces S_+ et S_- , comme indiqué sur la fig.9.6. La force par unité de surface agissant sur S_+ ou S_- joue le

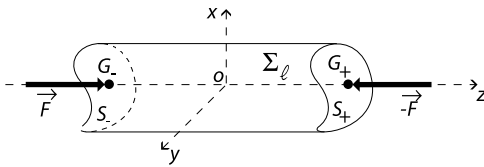


FIGURE 9.6 :

Barre cylindrique en compression. La ligne d'action des forces résultantes $+\vec{F}$ et $-\vec{F}$ est l'axe oz de la barre.

rôle d'une pression et pour cette raison, nous la notons : $p = F/S > 0$.

L'expression du tenseur des contraintes à l'intérieur de la barre en compression pure s'obtient en transposant de façon triviale les raisonnements faits pour la traction ; nous obtenons :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{iz} \delta_{jz}$$

De même, pour le tenseur des déformations, seuls les éléments diagonaux sont non nuls :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\nu p}{E}, \quad \epsilon_{zz} = -\frac{p}{E} \quad \text{et} \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (\text{III.1})$$

A titre de curiosité, notons que dans les matériaux à coefficient de Poisson négatif, toutes les arêtes d'un échantillon parallélépipédique voient leurs longueurs diminuer.

2. Application

Appliquons ces idées à l'étude des déformations et contraintes dans un échantillon à coefficient de Poisson $\nu > 0$, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de côtés L, ℓ_x, ℓ_y et dont les six faces sont soumises à des forces de compression, comme représenté sur la fig.9.7.b. Ces forces sont engendrées de la manière suivante. Il faut imaginer que le parallélépipède est initialement introduit dans un cylindre creux dont la cavité possède une section droite en forme de rectangle (cf.fig.9.7.a) ; les dimensions de ce rectangle sont exactement égales à ℓ_x et ℓ_y , si bien que les surfaces latérales $\Sigma_{x\pm}$ et $\Sigma_{y\pm}$ de l'échantillon, respectivement perpendiculaires aux axes ox et oy , sont

exactement et complètement au contact des parois internes du cylindre creux. On applique alors sur les deux faces S_- et S_+ , orthogonales à l'axe oz , des forces de compression uniformément réparties et de résultantes $\pm \vec{F}$; ces forces sont identiques à celles que nous venons de décrire au § III.1 qui précède et $p = F/S > 0$ est la force par unité de surface (p se comporte comme une pression). Il est clair que ces forces de compression vont engendrer une diminution, ΔL , de la distance initiale L entre les faces S_{\pm} . Nous supposons que les parois du cylindre creux sont suffisamment rigides - autrement dit,

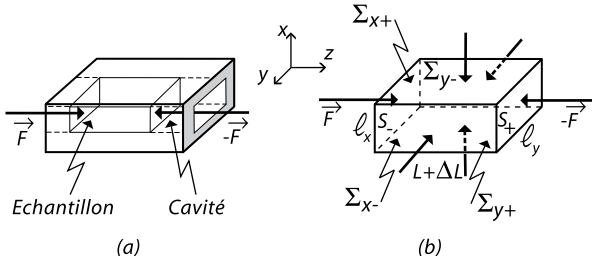


FIGURE 9.7 :

- (a) Cylindre creux contenant un parallélépipède rectangle exactement inséré dans sa cavité.
- (b) parallélépipède rectangle dont les six faces sont soumises à des forces de compression.

quasiment indéformables - pour empêcher toute expansion transversale du parallélépipède et tout déplacement des surfaces $\Sigma_{x\pm}$ et $\Sigma_{y\pm}$. Ceci ne peut se produire qu'au prix de forces de réaction compressives exercées par les parois internes du cylindre creux sur les surfaces latérales du parallélépipède ; rien ne s'oppose à ce que ces forces de compression soient uniformément réparties sur les surfaces $\Sigma_{x\pm}$ et $\Sigma_{y\pm}$ et à ce que les tenseurs des contraintes et des déformations soient uniformes au sein du parallélépipède.

A partir de ces données, nous déduisons que la valeur de l'élément σ_{zz} est dans tout le parallélépipède égale à celle, $-p$, qu'il prend sur les faces S_{\pm} :

$$\sigma_{zz} = -p$$

Par ailleurs, les longueurs l_x et l_y d'une part, les angles droits que font entre elles les arêtes respectivement parallèles aux axes ox et oy d'autre part, ne sont pas modifiés par les forces de compression ; ceci entraîne que tous les éléments du tenseur des déformations sont nuls à l'exception de ϵ_{zz} qui est égal à l'allongement relatif $\Delta L/L$ des arêtes parallèles à l'axe oz :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\Delta L}{L} \delta_{iz} \delta_{jz} \tag{III.2}$$

Pour calculer tous les éléments de $\bar{\sigma}$ encore indéterminés, nous disposons de l'équation de Lamé : $\bar{\sigma} = \lambda (tr \bar{\epsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\epsilon}$. En y introduisant les résultats (III.2), nous obtenons immédiatement :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \lambda \frac{\Delta L}{L}, \quad \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta L}{L}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \tag{III.3}$$

Comme nous savons déjà que $\sigma_{zz} = -p$, nous en déduisons les valeurs des grandeurs inconnues non nulles en fonction de l'unique donnée p dont nous disposons :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\Delta L}{L} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu} \quad \text{et} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} \quad (\text{III.4})$$

Si l'on préfère utiliser le couple de coefficients (E, ν) à la place des constantes élastiques de Lamé, il faut inverser les deux éqs.(II.12) et (II.17) :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{III.5})$$

En reportant ces expressions dans les résultats (III.4), nous trouvons :

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{p}{E} \quad \text{et} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} p \quad (\text{III.6})$$

Pour terminer, comparons les forces de compression qu'il faut appliquer pour raccourcir de la même valeur une barre dont les surfaces latérales sont, dans une première situation, libres comme au § III.1 et, dans une seconde situation, emprisonnées comme dans le cas que nous venons de traiter. Désignons par p_1 et p_2 , les valeurs des forces de compression par unité de surface produisant la même variation ΔL dans les deux cas. Nous savons, d'après les éqs.(III.1) et (III.6), que dans ces deux situations les allongements relatifs du barreau valent respectivement :

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{p_1}{E} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta L}{L} = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)p_2}{(1 - \nu)E}$$

Pour que les allongements soient identiques dans les deux situations, il faut donc que :

$$p_2 = p_1 \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = p_1 f(\nu)$$

Dans l'intervalle : $0 < \nu < 1/2$, où le coefficient de Poisson est positif, la fonction $f(\nu)$ est monotone croissante à partir de 1, pour $\nu = 0$, jusqu'à l'infini, pour $\nu = 1/2$. Ainsi, la valeur de p_2 est toujours supérieure à celle de p_1 (sauf pour $\nu = 0$ où il y a égalité). Ce résultat est attendu, car, pour diminuer la longueur d'un barreau, il est naturel que les forces de compression soient plus grandes quand les faces latérales du barreau sont emprisonnées que lorsqu'elles sont libres. De plus, dès que ν atteint des valeurs voisines de sa limite supérieure $1/2$, p_2 devient très supérieur à p_1 . Pour une valeur standard de ν voisine de 0,3 qui se rencontre dans de nombreux métaux, $p_2 \simeq 1,3 p_1$ et les forces de compression ne sont pas très différentes dans les deux situations considérées.

IV. CISAILLEMENT PUR

Nous venons de voir que le phénomène de traction pure d'une barre se produit quand des forces extérieures sont appliquées orthogonalement à deux de ses faces opposées. Il est logique de s'intéresser au comportement d'une barre dont les faces sont le siège de forces qui sont situées dans leur plan et que l'on appelle des forces de cisaillement. Nous allons mettre en évidence le phénomène de cisaillement pur en raisonnant sur un domaine à l'intérieur d'une barre soumise simultanément à des forces de traction et à des forces de compression.