

Table des matières

Table des matières	i
Liste des exercices	v
Introduction	vii
Remerciements	xxv
1 Rappels d'algèbre et de géométrie	1
1.1 Préliminaires algébriques	1
Structures algébriques – Constructions usuelles – Suites exactes	
1.2 Algèbres associatives	10
Généralités sur les algèbres associatives – Constructions courantes d'algèbres associatives – Modules – Coalgèbres, comodules, algèbres de Hopf	
1.3 Espaces topologiques, variétés, formes, fibrés	22
Espaces topologiques – Variétés différentiables – Formes différentielles – Géométrie des groupes de Lie – Fibrés et connexions – Variétés quotients	
1.4 Algèbres normées	45
Espaces localement convexes – Algèbres de Banach – C^* -algèbres	
1.5 Catalogue d'exemples	60
Structures algébriques diverses autour de \mathbb{Z} – L'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel et quelques uns de ses quotients – Algèbres de fonctions – Algèbres d'opérateurs – Structures algébriques associées à un groupe – Catalogue d'espaces topologiques et de variétés	
2 Homologies et cohomologies	89
2.1 Définitions	89
Homologie de modules différentiels – Complexes différentiels – Algèbres différentielles – Algèbres différentielles graduées – Bicomplexes	
2.2 Propriétés générales	94
Suites exactes – Homotopies – Changement de coefficients – Complexe adjoint – Produit tensoriel de complexes différentiels – Augmentation d'un complexe – Le lemme <i>Tic-Tac-Toe</i>	
3 Homologies, cohomologies et topologie	103
3.1 Homologie simpliciale	103
Simplexes de \mathbb{R}^N – Complexe simplicial	
3.2 Homologie singulière	106
Complexe singulier – Propriétés de l'homologie singulière – Homologie relative – Homologie réduite – La suite de Mayer-Vietoris – Cohomologie singulière – Autres définitions de l'homologie des espaces topologiques	

3.3	Cohomologie de de Rham	119
	L'algèbre différentielle $\Omega^\bullet(M)$ – Le lemme de Poincaré – La suite de Mayer-Vietoris – Couplage à l'homologie singulière – La formule de Künneth et le polynôme de Poincaré	
3.4	Variété compacte, orientée et sans bord	125
	Les groupes d'homologie et de cohomologie de plus haut degré – Dualité de Poincaré – L'application de Hodge, la codifférentielle et le laplacien	
3.5	Cohomologies à support compact et à décroissance rapide	129
	Cohomologie à support compact – Courants de de Rham – Suite de Mayer-Vietoris à support compact – Cohomologie à décroissance rapide – Classe de Thom d'un fibré vectoriel réel orienté	
3.6	Cohomologie de Čech	133
	Le complexe de Čech – La cohomologie de Čech – Relation avec la cohomologie de de Rham – Cohomologie de Čech à valeurs dans des faisceaux – Application aux fibrés en droites complexes	
4	(Co)homologies des groupes et algèbres de Lie	145
4.1	(Co)homologies d'algèbres de Lie	145
	Homologie d'algèbres de Lie – Cohomologie d'algèbres de Lie – Homologie et cohomologie invariantes – Extensions d'algèbres de Lie – Déformation d'un crochet de Lie	
4.2	Algèbres de Lie réductives	151
	Définitions – Résultats sur les homologies et les cohomologies – Structures de $\mathcal{I}(\wedge^\bullet \mathfrak{g})$ et $\mathcal{I}(\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*)$	
4.3	(Co)homologies de groupes	154
	Définitions et premières propriétés – Les groupes de (co)homologie en bas degrés – Résultats structurels	
5	(Co)homologies des algèbres associatives	165
5.1	Calculs différentiels	165
	Calculs différentiels universels – L'algèbre $\mathfrak{T}^\bullet \mathbf{A}$ et le calcul différentiel universel unital – Calcul différentiel basé sur les dérivations	
5.2	Homologies de Hochschild	174
	Définition des complexes – La trace et l'invariance de Morita – Produit de battage – Relations avec d'autres homologies – Homologie de Hochschild d'une algèbre commutative – Homologie de Hochschild des algèbres non unites	
5.3	Cohomologie de Hochschild	185
	Définition des complexes – Exemples pour deux bimodules particuliers – Cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre – Déformation d'algèbres associatives – Cohomologie de Hochschild des algèbres topologiques	
5.4	Homologie cyclique	191
	Les complexes et leurs opérateurs – Propriétés structurelles – L'homologie cyclique des algèbres commutatives – Homologies périodique et négative – Cohomologie cyclique	
6	Cohomologies et actions de groupes	213
6.1	Opérations algébriques	213
	Opérations de Cartan – Connexions et courbures algébriques – L'algèbre des	

formes sur un fibré principal – Les opérations de \mathbf{A}_{Lie} sur $\mathfrak{T}^*\mathbf{A}$, $\Omega_{\mathcal{U}}^*(\mathbf{A})$ et $C^*(\mathbf{A}; \mathbf{A})$ – L'opération de \mathfrak{g} sur $\bigwedge^* \mathfrak{g}^*$

6.2 L'algèbre de Weil 219
 Construction de l'algèbre de Weil – Propriété universelle – Calcul des cohomologies associées à $\mathcal{W}(\mathfrak{g})^\bullet$ – Transgressions – Le morphisme de Weil

6.3 Fibrés et classes caractéristiques 225
 Fibré universel classifiant – Construction de fibrés classifiants – Classes caractéristiques – Classes caractéristiques et polynômes invariants – Le principe de décomposition et le caractère de Chern – La classe d'Euler

6.4 Cohomologie équivariante 242
 L'approche topologique – Le modèle de Weil – Le modèle de Cartan

7 *K*-théorie 247

7.1 *K*-théorie topologique 247
 Le groupe K^0 – *K*-groupes de degrés plus élevés – Étude de la *K*-théorie réduite – La périodicité de Bott – Relations avec la cohomologie ordinaire

7.2 Projections et unitaires dans les C^* -algèbres 266
 Équivalence d'unitaires – Équivalences de projections

7.3 *K*-théorie des C^* -algèbres 271
 Le groupe $K_0(\mathbf{A})$ – Le groupe $K_1(\mathbf{A})$ – *K*-groupes d'ordres supérieurs – *K*-théorie sur d'autres algèbres et caractère de Chern – *K*-homologie et *KK*-théorie

8 Approches formalistes 295

8.1 Notions sur les catégories 295
 Catégories – Foncteurs – La catégorie des complexes différentiels

8.2 Résolutions projectives et injectives 310
 Résolutions et foncteurs dérivés – Les foncteurs Tor et Ext

8.3 Homologies, catégories et foncteurs 319
 Homologies et foncteurs dérivés – Quelques applications en (co)homologie de groupes – Modules simpliciaux – Axiomatisation

9 Méthodes de calcul 349

9.1 Suites spectrales 350
 La notion de suites spectrales – Constructions standard de suites spectrales – Suite spectrale associée à une fibration – Autres exemples de suites spectrales

9.2 Quelques exemples de calculs de groupe de (co)homologie 374
 Utilisation de résolutions projectives – Utilisation de complexes plus grands – La cohomologie des espaces classifiants *BG* – Contraintes algébriques – Calcul de K_0 de l'algèbre de Fibonacci et des C^* -algèbres AF

10 Exercices 405

Énoncés des exercices 405
 Corrigés des exercices 462

A Groupes d'homotopie	547
B Résultats d'homologies et de cohomologies	555
B.1 Espaces topologiques	555
B.2 Groupes	558
B.3 Algèbres associatives	559
B.4 K -théorie	562
Bibliographie	565
Index des notations	579
Index	591

Liste des exercices

Les numéros de page portent sur l'énoncé et les numéros de page entre parenthèses portent sur la correction.

1. Suites exactes scindées	405 (462)
2. Le lemme du serpent	405 (462)
3. Le lemme des 5	406 (462)
4. $d^N = 0$	406 (463)
5. Le lemme du fer à cheval	408 (464)
6. Quelques suites exactes particulières	408 (466)
7. Cône d'un complexe	409 (466)
8. Homotopies et résolutions	409 (467)
9. δ -foncteurs homologiques	410 (468)
10. Modules simpliciaux normalisés	412 (470)
11. Homologie d'un graphe	412 (471)
12. Homologie réduite, cône et suspension	412 (471)
13. Cohomologie de de Rham de l'espace projectif réel	413 (472)
14. Calculs utilisant la suite de Mayer-Vietoris	413 (472)
15. Quelques calculs en cohomologie de Čech	414 (473)
16. CW -complexes, homologie cellulaire	414 (473)
17. Quelques calculs en homologie cellulaire	415 (475)
18. Surfaces de Riemann	415 (477)
19. La suite spectrale de Serre d'un fibré	417 (479)
20. Cohomologie de $U(n)$	420 (482)
21. La suite exacte longue de Gysin d'un fibré en sphères	421 (484)
22. Scission d'une suite exacte courte d'algèbres de Lie	423 (486)
23. Divers résultats sur les (co)homologies de groupes	423 (488)
24. Homologie du groupe \mathbb{Z}	424 (489)
25. Homologie du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	425 (489)
26. Résolution topologique libre de $\mathbb{Z}G$	425 (491)
27. Algèbres associatives séparables	426 (492)
28. Homologie de Hochschild et déterminant	427 (493)
29. Cycles et cohomologie cyclique	427 (493)
30. Homologies de l'algèbre tensorielle	428 (494)
31. Homologies de l'algèbre symétrique	429 (495)
32. L'algèbre des relations de commutation canoniques	429 (496)
33. Homologie invariante par une sous algèbre de Lie	430 (497)

34. Algèbres de Lie et espaces différentiels	431 (497)
35. Cohomologie invariante d'une algèbre de Lie	432 (498)
36. L'algèbre universelle enveloppante	433 (499)
37. L'algèbre de Kac-Moody	436 (504)
38. L'algèbre de Virasoro	436 (505)
39. Quelques formules sur les opérations de Cartan	437 (505)
40. Réinterprétation de la courbure algébrique	438 (506)
41. A propos du morphisme de Weil	438 (507)
42. Classes caractéristiques et classification des fibrés	439 (507)
43. Classe de Chern du fibré tautologique sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$	441 (510)
44. Connexions non commutatives, caractères de Chern	441 (511)
45. L'algèbre des endomorphismes d'un fibré vectoriel	444 (516)
46. La classe de Thom universelle	448 (520)
47. Les fibrés vectoriels sur \mathbb{S}^2	451 (524)
48. Quelques calculs en K -théorie	452 (526)
49. Le groupe K_1 et le déterminant	453 (526)
50. Le théorème de l'indice pour l'algèbre de Calkin	454 (527)
51. La K -théorie de l'algèbre de Toeplitz	455 (528)
52. L'algèbre du tore non commutatif	456 (530)
53. Calcul de K_0 de l'algèbre du tore non commutatif	457 (536)