

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Analyse fonctionnelle</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Topologie générale</b>	<b>3</b>
1.1	Topologie sur un ensemble . . . . .	3
1.2	Topologie induite et topologie engendrée . . . . .	4
1.3	Valeur d'adhérence, fermeture ou adhérence d'un ensemble . . . . .	5
1.4	Suite et espace topologique . . . . .	5
1.5	Base dénombrable de voisinage . . . . .	6
1.6	Application continue . . . . .	7
1.7	Homéomorphisme . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Espace métrique</b>	<b>11</b>
2.1	Notion générale . . . . .	11
2.2	Suite dans un espace métrique . . . . .	12
2.3	Application continue dans espace métrique . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Espace métrique connexe</b>	<b>15</b>
3.1	Notion générale . . . . .	15
3.2	Image d'un connexe par une application continue . . . . .	16
3.3	La connéxité dans le produit d'espaces . . . . .	17
3.4	La connéxité par arc . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Espace métrique compact</b>	<b>19</b>
4.1	Notion générale . . . . .	19
4.2	Suite dans un espace métrique compact . . . . .	20
4.3	Application continue et compacité . . . . .	21
4.4	Espace produit d'espaces compacts . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Espace métrique complet</b>	<b>23</b>
5.1	Suite de Cauchy dans un espace métrique . . . . .	23
5.2	Propriétés . . . . .	23
5.3	Théorème de Baire . . . . .	25

<b>6</b>	<b>Espace vectoriel normé</b>	<b>27</b>
6.1	Notion générale . . . . .	27
6.2	Quelques espaces normés usuels . . . . .	28
6.3	Normes équivalentes . . . . .	28
6.4	Espace de Banach et applications linéaires . . . . .	30
6.5	Séries dans les espaces de Banach . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Espace de Hilbert</b>	<b>39</b>
7.1	Notion générale : Cas réel . . . . .	39
7.2	Notion générale : Cas complexe . . . . .	41
7.3	L'orthogonalité . . . . .	43
7.4	Projection orthogonale . . . . .	46
7.5	Deux théorèmes autour des espaces de Hilbert . . . . .	49
7.6	Bases hilbertiennes . . . . .	52
7.7	Convergence faible et convergence forte . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Espaces <math>L^p</math></b>	<b>57</b>
8.1	Ensembles . . . . .	57
8.2	Tribu . . . . .	57
8.3	Mesure positive sur une tribu . . . . .	59
8.4	Espaces $L^p$ . . . . .	62
8.5	Espace $L^2$ et séries de Fourier . . . . .	65
<b>9</b>	<b>Polynômes orthogonaux</b>	<b>67</b>
9.1	Polynômes de Legendre . . . . .	67
9.2	Polynômes d'Hermite . . . . .	69
9.3	Polynômes de Laguerre . . . . .	70
<b>10</b>	<b>Distributions</b>	<b>71</b>
10.1	Notion de Fonctionnelle . . . . .	71
10.2	Distributions . . . . .	72
10.3	Distribution à support borné . . . . .	73
10.4	Convergence dans $\mathcal{D}'$ . . . . .	74
10.5	Valeur principale de Cauchy et partie finie . . . . .	76
10.6	Quelques équations aux dérivées partielles au sens des distributions : . . . . .	78
10.7	Transformation de Fourier d'une distribution . . . . .	79
10.8	Distributions tempérées et transformée de Fourier . . . . .	79
<b>II</b>	<b>Probabilité</b>	<b>83</b>
<b>11</b>	<b>Événement et variable aléatoire</b>	<b>85</b>
11.1	Notion générale . . . . .	85
11.2	Mesure de probabilité . . . . .	86
11.3	Fréquence . . . . .	86
11.4	Suite d'événements . . . . .	87
11.5	Exemple . . . . .	88

---

11.6 Règles de calcul . . . . .	88
11.7 Mesure de probabilité uniforme sur une partie de $\mathbb{R}$ . . . . .	89
<b>12 Probabilité conditionnelle</b> . . . . .	<b>91</b>
12.1 Définition et notation . . . . .	91
12.2 Exemple . . . . .	91
12.3 Probabilités Totales . . . . .	92
<b>13 Variable aléatoire</b> . . . . .	<b>93</b>
13.1 notation et définition . . . . .	93
13.2 Exemple . . . . .	93
13.3 Fonction de répartition d'une v.a.r . . . . .	94
13.4 Densité d'une variable aléatoire . . . . .	95
<b>14 Variable aléatoire discrète</b> . . . . .	<b>97</b>
14.1 Définition et notation . . . . .	97
14.2 La loi conjointe . . . . .	97
14.3 Loi marginale . . . . .	97
14.4 Lois conditionnelles et loi conjointe pour une variable aléatoire continue. . . . .	98
<b>15 Famille de distributions continues</b> . . . . .	<b>99</b>
15.1 La loi normale . . . . .	99
15.2 Loi log-normale . . . . .	102
15.3 Loi t de Student . . . . .	102
15.4 Loi du khi-deux . . . . .	104
15.5 F-distribution ou de Fisher-Snédecor . . . . .	105
15.6 Loi exponentielle . . . . .	106
15.7 Loi de Weibull . . . . .	106
15.8 Loi gamma . . . . .	107
15.9 Loi bêta . . . . .	108
15.10 Loi de Cauchy . . . . .	110
15.11 Loi uniforme . . . . .	110
15.12 Lois de Pareto . . . . .	110
<b>16 Famille de distributions discrètes</b> . . . . .	<b>113</b>
16.1 Loi Binomiale . . . . .	113
16.2 Loi de Poisson . . . . .	114
16.3 Loi Hypergéométrique . . . . .	114
<b>17 Convergence des variables aléatoires</b> . . . . .	<b>115</b>
17.1 Définition et notation . . . . .	115
17.2 Moments et variance . . . . .	115
17.3 Covariance et coefficient de corrélation linéaire . . . . .	120
17.4 Lois conditionnelles . . . . .	121
17.5 Espérance conditionnelle . . . . .	122
17.6 Variance conditionnelle . . . . .	123
17.7 Fonction caractéristique . . . . .	124

17.8	Quelques fonctions caractéristiques usuelles : . . . . .	124
17.9	Théorème de la limite centrale . . . . .	125
17.10	Exemple sur le théorème limite centrale . . . . .	126
17.11	Vecteur gaussien . . . . .	127
<b>18</b>	<b>Simulation de lois non uniformes</b>	<b>129</b>
18.1	Méthode de la fonction de répartition . . . . .	129
18.2	Méthode de rejet . . . . .	130
18.3	Méthode de Monte-Carlo et chaînes de Markov . . . . .	131
<b>19</b>	<b>Chaîne de Markov</b>	<b>133</b>
19.1	Ergodicité . . . . .	133
19.2	Accessibilité et irréductibilité . . . . .	134
19.3	Périodicité . . . . .	136
19.4	Transience et récurrence . . . . .	137
<b>20</b>	<b>Algorithme de Hastings-Metropolis</b>	<b>143</b>
20.1	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	143
20.2	Implémentation . . . . .	146
<b>III</b>	<b>Statistique</b>	<b>159</b>
<b>21</b>	<b>L'estimation</b>	<b>161</b>
21.1	Définition . . . . .	161
21.2	Estimateur sans biais et asymptotiquement sans biais . . . . .	162
21.3	Risque quadratique . . . . .	162
21.4	Comparaison d'estimateurs . . . . .	163
21.5	Estimateur de variance uniformément minimum sans biais . . . . .	163
21.6	La statistique $\bar{X}$ . . . . .	164
21.7	La statistique $S^2$ . . . . .	164
21.8	La statistique $T_{n-1}$ . . . . .	164
21.9	Estimation de la moyenne d'une variable de Laplace-Gauss . . . . .	165
21.10	Estimation de la variance d'une variable de Laplace-Gauss . . . . .	165
<b>22</b>	<b>L'exhaustivité</b>	<b>167</b>
22.1	Définition . . . . .	167
22.2	Exemples . . . . .	167
22.3	Théorème de Rao-Blackwell . . . . .	168
22.4	Statistique complète . . . . .	168
22.5	Information de Fisher . . . . .	169
22.6	Exemple . . . . .	169
22.7	La condition de Darmais . . . . .	169
22.8	Inégalité de Frechet-Darmois-Cramer-Rao . . . . .	170
22.9	Exemple . . . . .	170
22.10	La distance ou variation de Hellinger entre deux lois . . . . .	170
22.11	Information de Kullback de p sur Q par rapport à une probabilité $\nu$ : . . . . .	171

---

22.12	La méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	171
<b>23</b>	<b>Inférence bayésienne</b>	<b>173</b>
23.1	Estimation ponctuelle bayésienne . . . . .	175
23.2	Estimateurs Bayésiens . . . . .	177
23.3	Exemple . . . . .	177
23.4	Estimateur de Pitman . . . . .	178
<b>24</b>	<b>les tests en statistique</b>	<b>179</b>
24.1	Définition et exemple . . . . .	179
24.2	Notions générales sur les tests . . . . .	180
24.3	La méthode de Neyman et Pearson . . . . .	181
24.4	Application . . . . .	182
24.5	Test du $\chi^2$ . . . . .	182
24.6	Un exemple d'utilisation du Khi-deux . . . . .	183
24.7	Conclusion . . . . .	186
24.8	Le test d'ajustement de Kolmogorov . . . . .	186
24.9	Test des variances de Fisher-Snedecor : . . . . .	190
24.10	Analyse de la variance à un facteur . . . . .	190
24.11	Test de Wilcoxon . . . . .	192
24.12	Test de Shapiro-Wilk . . . . .	193
<b>25</b>	<b>Regression et modèle linéaire</b>	<b>195</b>
25.1	Ajustement linéaire en dimension deux . . . . .	195
25.2	Exemple . . . . .	196
25.3	Regression linéaire en dimension p . . . . .	196
<b>IV</b>	<b>Annexe : Tables statistiques</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Table statistique de la distribution normale</b>	<b>209</b>
<b>B</b>	<b>Table statistique de la distribution binomiale <math>p = \frac{1}{2}</math></b>	<b>211</b>
<b>C</b>	<b>Table statistique du <math>\chi^2</math></b>	<b>213</b>
<b>D</b>	<b>Table statistique de Shapiro</b>	<b>217</b>
D.1	Table des coefficients de Shapiro . . . . .	217
D.2	Table de Shapiro de W . . . . .	221
<b>E</b>	<b>Table statistique de la loi de Student</b>	<b>223</b>
<b>F</b>	<b>Table statistique de la loi de Fischer</b>	<b>225</b>

<b>V</b>	<b>Mathématiciens du tome I</b>	<b>231</b>
<b>VI</b>	<b>Mathématiciens du tome II</b>	<b>267</b>
	<b>Index</b>	<b>299</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>305</b>

# Table des figures

13.1 Loi binomiale . . . . .	95
15.1 Loi normale . . . . .	101
25.1 Données . . . . .	197
25.2 Regression linéaire . . . . .	198





# Préface <sup>1</sup>

Cet ouvrage présente tous les outils mathématiques utiles à l'étudiant ingénieur, dans le langage des ingénieurs. L'éventail des chapitres abordés, la clarté de l'exposé (des notions élémentaires aux thèmes les plus pointus), la diversité des applications proposées en font un ouvrage de référence complet, indispensable tant à l'étudiant en licence et masters des universités et grandes écoles) qu'au professionnel. Il aborde trois thèmes :

## **Mathématiques pour l'ingénieur**

1. **Analyse fonctionnelle**
2. **Probabilité**
3. **Statistique**
4. **Tables statistiques**

C'est le fruit de plusieurs années de travail pour les écoles d'ingénieur. De nombreux exercices, problèmes et des qcm permettent de se familiariser avec les outils et techniques mathématiques introduits, ils sont présentés avec une solution, une aide progressive ou une indication. Les lois usuelles en probabilités, statistiques et tables statistiques. Ce tome complètera le tome I 'Analyse' et le tome II 'Algèbre, géométrie'.

Je tiens à remercier tout particulièrement Mr Dellacherie Claude directeur de recherche dans le laboratoire de mathématiques de l'université de Rouen pour avoir bien voulu lire et corriger cet ouvrage et Mr Goglu Roger et les conseils qu'ils m'ont prodigués, à Mr Fauvernier Philippe directeur des éditions Hermann pour ses encouragements, et à ma famille.

---

1. Travail réalisé sous WinEdt/MiKTeX L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Scientific WorkPlace et le logiciel R Les courbes ont été tracées à l'aide de Graph easy et Paint.



**Première partie**

**Analyse fonctionnelle**



# Chapitre 1

## Topologie générale

### 1.1 Topologie sur un ensemble

On désigne par  $E$  un ensemble et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  et  $\mathcal{O}$  une partie de  $\mathcal{P}(E)$ .

**Définition 1.1.1** On dit que  $(E, \mathcal{O})$  est un espace topologique si  $\mathcal{O}$  vérifie :

- $E, \emptyset \in \mathcal{O}$ .
- Une intersection finie d'éléments de  $\mathcal{O}$  est encore un élément de  $\mathcal{O}$ .
- Une réunion quelconque d'éléments de  $\mathcal{O}$  est encore un élément de  $\mathcal{O}$ .

Un élément de  $\mathcal{O}$  est appelé un sous ensemble ouvert de  $E$ , le plus souvent on utilise le mot ouvert au lieu de sous ensemble ouvert). Se donner  $\mathcal{O}$  sur  $E$  vérifiant les trois axiomes précédents revient à se donner une topologie sur  $E$ .

**Définition 1.1.2** On appelle topologie discrète sur un ensemble  $E$  la topologie sur  $E$  pour laquelle tout sous ensemble de  $E$  est ouvert. (En particulier tout point de  $E$  définit un sous ensemble ouvert de  $E$ ). Cette topologie c'est  $\mathcal{P}(E)$ .

**Définition 1.1.3** On appelle topologie grossière sur un ensemble  $E$  la topologie  $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$ .

**Définition 1.1.4** Soit un espace topologique  $(E, \mathcal{O})$ , soit  $V$  un ensemble de  $\mathcal{P}(E)$  et  $x \in E$ , on dira que  $V$  est un voisinage de  $x$  si il existe un ouvert  $U$  de  $E$  tel que  $x$  soit élément de  $U$  et  $U$  inclus dans  $V$ .

On notera  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble de tous les voisinages de  $x$ . Ainsi si  $O \in \mathcal{O}$  et si  $x \in O$  alors  $O \in \mathcal{V}(x)$ . On dira que  $O$  est voisin de ses points.

**Définition 1.1.5** Soient  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{P}$  deux topologies sur  $E$ . On dira que  $\mathcal{O}$  est plus fine que  $\mathcal{P}$  si  $\mathcal{P}$  est incluse dans  $\mathcal{O}$ , autrement dit  $\mathcal{O}$  renferme plus d'ouverts que  $\mathcal{P}$ .

La relation "être plus fin" est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies sur  $E$ .

## 1.2 Topologie induite et topologie engendrée

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

**Proposition 1.2.1** *L'ensemble  $\{A \cap O, O \in \mathcal{O}\}$ , ( $\mathcal{O}$  une topologie sur  $E$ ) définit une topologie sur  $A$  que l'on appelle topologie induite de  $(E, \mathcal{O})$  sur  $A$ .*

**Preuve 1.2.1** *Il suffit de vérifier les trois axiomes définissant une topologie. ■*

**Proposition 1.2.2** *Si  $A$  est un ouvert alors les ouverts de la topologie induite de celle de  $E$  sur  $A$  et les ouverts de  $E$  coïncident.*

**Définition 1.2.1** *Soit  $\mathcal{P}$  une partie de  $\mathcal{P}(E)$ . La topologie la moins contenant  $\mathcal{P}$  est appelée topologie engendrée par la famille  $\mathcal{P}$ .*

Intérieur d'un ensemble de  $E$  :

Soit  $U$  une partie de  $E$ . On appelle intérieur de  $U$  le plus grand ouvert de  $\mathcal{O}$  contenu dans  $U$ . On le note :

$$\overset{\circ}{U} = \text{int}(U).$$

**Proposition 1.2.3** *Si  $A$ ,  $B$  et  $U$  sont deux ensembles de  $E$  alors :*

$$1. A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

$$2. A \overset{\circ}{\cup} B = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}.$$

$$3. \overset{\circ}{\overset{\circ}{U}} = \overset{\circ}{U}.$$

Sous ensemble fermé de  $E$  :

Le complémentaire d'un sous ensemble ouvert de  $E$  sera appelé sous ensemble fermé on utilise le mot fermé tout simplement.

**Proposition 1.2.4** -  $E, \emptyset$  sont fermés.

- Une réunion de fermés est fermée.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.

**Preuve 1.2.2** *La première assertion est triviale. Les deux autres proviennent des deux faits suivants :*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, A^c \text{ désigne le complémentaire de } A$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

■

### 1.3 Valeur d'adhérence, fermeture ou adhérence d'un ensemble

**Définition 1.3.1** Soit  $U$  un ensemble de  $E$  on appelle adhérence de  $U$  et on note ceci  $\overline{U}$  le plus petit fermé de  $E$  contenant  $U$ .

**Définition 1.3.2** On appelle frontière de  $U$  la différence :

$$\overline{U} \setminus U.$$

Et on note ceci :  $Fr(U)$ .

**Définition 1.3.3** On dira qu'un élément  $x$  de  $E$  est valeur d'adhérence ou adhérent à l'ensemble  $U$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap U \neq \emptyset.$$

**Proposition 1.3.1** L'adhérence d'un ensemble  $U$  est égale à l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de cet ensemble.

**Proposition 1.3.2** Tout élément d'un ensemble donné est valeur d'adhérence de cet ensemble.

**Définition 1.3.4** On dit que l'ensemble  $U$  de  $E$  est dense dans  $E$  si :

$$\overline{U} = E.$$

Ceci est équivalent de dire si :

$$\overline{U^c} = \emptyset.$$

.

**Exemple 1.3.1**  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  (Voir tome I, "Analyse").

### 1.4 Suite et espace topologique

Soit dans ce paragraphe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$ .

**Définition 1.4.1** On appelle valeur d'adhérence de la suite  $x_n$  toute point adhérent à l'ensemble :

$$\{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Tout point de la suite  $x_n$  est un point adhérent.

**Définition 1.4.2** On appelle point d'accumulation de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute valeur d'adhérence de cette suite qui n'est pas un élément de la suite.

**Définition 1.4.3** On dira que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers le point  $x$  de  $E$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N(V) \in \mathbb{N}; \{x_n, n \in \mathbb{N}, n \geq N(V)\} \subset V. \quad (1.1)$$

Le point  $x$  sera appelé la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  et on écrira :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Il est bien entendu que  $x$  est valeur d'adhérence et point d'accumulation unique de la suite.

**Définition 1.4.4** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. La suite définie par :

$$(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

est appelée sous-suite ou suite extraite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On a bien évidemment :

$$\{x_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

ce qui justifie le nom de sous suite.

## 1.5 Base dénombrable de voisinage

**Proposition 1.5.1** Soit  $F$  un fermé de  $(E, \mathcal{O})$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'élément de  $F$  qui converge vers un élément  $x$  de  $E$  alors  $x$  est élément de  $F$ .

**Preuve 1.5.1** Par définition d'une suite convergente, tout voisinage  $V$  de  $x$  rencontre  $F$  en un point  $x_n$  ( $n$  est choisi comme il faut). D'après la définition d'un point adhérent à un ensemble,  $x$  est donc point adhérent à  $F$ . Mais comme  $F$  est fermé, l'ensemble des points adhérents à  $F$  est confondu avec  $F$ . ■

**Définition 1.5.1** On dit qu'un espace topologique  $(E, \mathcal{O})$  possède une base dénombrable de voisinage si pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\exists (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}(x) / \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n \in \mathbb{N}, V_n \subset V, \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, V_{i+1} \subset V_i.$$

**Théorème 1.5.1** Soit  $(E, \mathcal{O})$  un espace topologique, possédant une base dénombrable de voisinage et soit  $U$  un sous ensemble de  $E$  alors on a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- $x$  est une valeur d'adhérence de  $U$ .
- Il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $U$  convergeant vers  $x$



**Preuve 1.5.2** La première assertion implique la deuxième en effet :

$x$  est une valeur d'adhérence de  $U$ , alors tout voisinage  $V$  de  $x$  rencontre  $U$ . En particulier comme  $(E, \mathcal{O})$  est à base dénombrable de voisinage, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe un voisinage de  $x$  ;  $V_n$  qui rencontre  $U$ , choisissons alors pour  $n$  donné  $x_n$  dans  $V_n \cap U$ , on construit ainsi une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il reste à montrer que cette suite converge, il suffit de remarquer que si  $V$  est un élément de  $\mathcal{V}(x)$  alors il existe  $n_0$  tel que  $V_{n_0} \subset V$  et donc  $\{x_n, n > n_0, n \in \mathbb{N}\} \subset V$  ce qui prouve la convergence d'après la relation 1.1.

La deuxième assertion implique la première en effet :

Il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $U$  convergeant vers  $x$  alors pour tout  $V$  élément de  $\mathcal{V}(x)$ ,  $V \cap U$  est non vide ceci veut dire que  $x$  est valeur d'adhérence. ■

**Théorème 1.5.2** Soit  $(E, \mathcal{O})$  un espace topologique, possédant une base dénombrable de voisinage et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . alors on a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- $F$  est fermé.
- Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in F.$$

**Preuve 1.5.3** La première assertion implique la deuxième en effet :

$F$  est fermé alors tout point de  $x$  est un point adhérent à  $F$  du théorème précédent il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x \in F$ .

La deuxième assertion implique la première en effet :

Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in F.$$

Prenons  $x$  de l'adhérence de  $F$  pour conclure. ■

## 1.6 Application continue

Soient  $(E, \mathcal{O})$  et  $(F, \mathcal{P})$  deux espaces topologiques.

**Définition 1.6.1** On dira qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est continue en  $x$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x).$$

**Définition 1.6.2** On dira qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est continue sur  $E$  si pour tout  $O$  de  $\mathcal{P}$ ,  $f^{-1}(O)$  est élément de  $\mathcal{O}$ .

**Proposition 1.6.1** Soit  $f : E \rightarrow F$ , alors les trois assertions suivantes sont continues :

- 1-  $f$  est continue sur  $E$ .
- 2-  $\forall V$  fermé de  $F$ ,  $f^{-1}(V)$  est un fermé de  $E$ .
- 3-  $\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}(f(x)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$ .

**Preuve 1.6.1**  $1 \Rightarrow 2$ : On applique la règle (Voir le chapitre 'Ensemble' du tome II 'Algèbre, géométrie et analyse') :

$$\forall A \text{ un ensemble, } f(A^c) = (f(A))^c.$$

L'implication s'en déduit.

$2 \Rightarrow 3$ : Soit  $x$  un point tel que  $y = f(x)$ . Soit  $V$  un élément de  $\mathcal{V}(f(x))$ . Comme  $V$  est un voisinage de  $f(x)$ , il contient un ouvert  $O$  de  $F$  contenant  $y$ .  $f^{-1}(O)$  est donc, puisque  $f$  est continue, un ouvert de  $E$  contenant  $x$  mais ce dernier est contenu dans  $f^{-1}(V)$  donc  $f^{-1}(V)$  est bien un voisinage de  $x$ .

$3 \Rightarrow 1$ : Soit  $O$  un ouvert de  $F$ . Montrons que  $f^{-1}(O)$  est un ouvert de  $E$ . Soit  $x$  un élément de  $f^{-1}(O)$ , comme  $O$  est un ouvert, on peut trouver un élément  $V$  de  $\mathcal{V}(f(x))$  tel que  $V$  soit inclus dans  $O$ , ainsi  $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$ , inclus dans  $f^{-1}(O)$  ce qui finit la démonstration. ■

**Proposition 1.6.2** Soient  $f : E \rightarrow F, x \in E$ . Si  $f$  est continue en  $x$  alors  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ .

**Preuve 1.6.2** Supposons que  $f$  soit continue en  $x$  alors pour tout voisinage  $V$  de  $f(x)$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $x$  et soit  $V$  un voisinage de  $f(x)$ . Par définition de la convergence de la suite, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n > N$  alors  $x_n \in f^{-1}(V)$ . Donc, si  $n > N$  alors  $f(x_n)$  est élément de  $V$ . Ce qui prouve :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ . ■

La réciproque de cette propriété exige un espace à base dénombrable de voisinage.  
C'est le propos du théorème suivant :

**Théorème 1.6.1** Si  $(E, \mathcal{O})$  est un espace topologique à base dénombrable de voisinage, si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergeant vers  $x$  et si  $f$  est dénie comme ci-dessus, alors on a l'équivalence des deux assertions :

- $f$  continue en  $x$ .
- Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ .

**Preuve 1.6.3** Supposons que  $f$  ne soit pas continue en  $x$ . Ceci implique qu'il existe un voisinage  $V$  de  $f(x)$  tel que  $f^{-1}(V)$  n'est pas un voisinage de  $x$ . Donc  $U = \{y \in E, f(y) \in V\}$  ne contient pas d'ouvert contenant  $x$ . Autrement dit, prenant un système fondamentale de voisinage au point  $x$  :  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver un élément  $x_n$  de  $V_n$  tel que  $x_n \in V_n \setminus U$ . La suite  $x_n$  ainsi construite converge vers  $x$  mais la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne rencontre, par construction, jamais  $V$ . Donc ne converge pas vers  $f(x)$ . ■

**Définition 1.6.3** Soit  $f : E \rightarrow F$ . On dira que  $f$  est une application ouverte si l'image par  $f$  de tout ouvert de  $E$  est un ouvert de  $F$ .

**Proposition 1.6.3** Si  $f$  définie comme ci-dessus est en plus bijective alors on a l'équivalence :

- $f$  est une application ouverte.
- $f$  est continue comme application de  $F$  dans  $E$ .

**Proposition 1.6.4** Soient  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  toutes deux continues alors  $g \circ f$  est continue.

## 1.7 Homéomorphisme

Soient  $(E, \mathcal{O})$  et  $(F, \mathcal{P})$  deux espaces topologiques.

**Définition 1.7.1** On dira que  $f : E \rightarrow F$  est un homéomorphisme si :

- $f$  est bijective.
- $f$  et  $f^{-1}$  sont continues.

**Définition 1.7.2** Deux espaces sont homéomorphes si l'on peut définir un homéomorphisme entre ces deux espaces.

Cette notion permet le transfert d'un bon nombre de propriétés du premier espace vers le second et vis et versa. Comme nous le verrons plus loin : la compacité, la connexité.

La propriété "être homéomorphe à" est une relation d'équivalence.

**Proposition 1.7.1**  $f : E \rightarrow F$  est un homéomorphisme si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- $f$  bijective.
- $f$  continue
- $f$  ouverte.