# Tables des Matières

# Avant propos

L'histoire des mathématiques montre que les mathématiciens avaient déjà trouvé de nombreuses notions sur les nombres, en particulier sur les nombres entiers, bien avant le $18^{\text{ème}}$ siècle.

L'arithmétique a passionné les mathématiciens, dont Lagrange, Fermat, etc. Des théories relatives aux carrés magiques, à la suite de Fibonacci, etc. ont été développées, au départ sans espérance d'applications pratiques. Cependant des applications ont ultérieurement été trouvées, par exemple en agriculture.

Alors que les progrès ont été assez rapides, notamment en arithmétique, on constate que les notations ont progressé beaucoup plus lentement comme le montre la liste de dates suivante.

L'arithmétique est la branche des mathématiques qui s'intéresse aux nombres entiers. Cela ne signifie pas qu'elle se limite à ce qu'on enseigne dans l'enseignement primaire et secondaire. Dès que l'on avance un peu dans cette discipline, on a besoin des techniques habituelles des mathématiques : le formalisme, le raisonnement par l'absurde, la récurrence, etc.

L'arithmétique ne dispense pas de l'utilisation du calcul « algébrique », c'est à dire de l'utilisation de lettres pour désigner des variables, de l'écriture d'équations, etc. Par manque de place tous les rappels relatifs au calcul algébrique ne sont pas faits. On rappelle cependant quelques identités remarquables.

Cette discipline est difficile : de nombreuses conjectures ont été énoncées. Pour certaines les démonstrations sont arrivées avec un retard de plusieurs années et pour d'autres nous attendons toujours les démonstrations. Il faut se contenter alors d'une vérification partielle avec un ordinateur.

Les applications sont assez peu nombreuses avec cependant quelques exceptions comme les codes correcteurs d'erreurs et le chiffrement, encore appelée cryptographie. Elle donne lieu, en contrepartie à des problèmes amusants.

On conçoit aisément qu'il y ait une liaison entre l'arithmétique et l'algèbre et cela pour la simple raison que les nombres entiers ne sont qu'un cas particulier des nombres réels. Mais on constate qu'il y parfois une interprétation géométrique de certains résultats obtenus en arithmétique.

En toute rigueur, il faudrait souvent faire appel aux notions de **corps** et **d'anneau**, notamment pour les entiers gaussiens. Cela a été évité autant que possible afin de ne pas donner une allure trop abstraite à ce livre, quitte à réduire un peu la rigueur mathématique.

Ce livre ne prétend surtout pas être un livre théorique, mais cherche seulement à rassembler divers théorèmes et à montrer des problèmes amusants que l'on peut rencontrer en arithmétique.

Pour faciliter la compréhension, les démonstrations sont faites en utilisant un vocabulaire aussi simple que possible et ne font appel aux notions modernes que lorsque cela est indispensable.

A la fin de ce livre figure une courte bibliographie. Une bibliographie complète aurait comporté de nombreuses pages inutiles pour la majorité des lecteurs. Il faut cependant signaler le site Internet de Serge MEHL qui est très intéressant ainsi que l'encyclopédie en ligne Wikipedia qui contient de très nombreuses informations concernant les mathématiques.

La seconde édition se différentie de la première, par quelques extensions, par l'adjonction de quelques exercices et aussi par un effort d'amélioration de la mise en page.

L'auteur recevra avec plaisir, toute critique constructive qui sera envoyée à l'adresse Internet suivante :

jean-pierre.lamoitier@gadz.org

# Bref panorama de l'évolution de l'arithmétique :

Quelques dates historiques :

| | |
|---|---|
| Vers 1900-1800 avant JC | numérotation sexagésimale chez les savants babyloniens |
| Vers 2$^{ème}$ siècle avant JC | première trace de numération positionnelle décimale chez les mathématiciens chinois. |
| 4$^{ème}$ à 5$^{ème}$ siècle après JC | Les premiers chiffres indiens vont servir de base à la numérotation décimale. |
| 629 | Le mathématicien indien Brahmagupta publie un document montrant qu'il manipule la notation décimale au moyen de 9 chiffres décimaux et du zéro. |
| 972-982 | Lors d'un voyage en Espagne, Gerbert d'AURILLAC (qui deviendra en 999 le pape Sylvestre II), s'initie aux chiffres arabes et les introduit en Europe occidentale. |
| 12 ème siècle | Introduction du chiffre zéro en Europe occidentale. |
| 1484 | Nicolas CHUQUET introduit les nombres négatifs. |
| 1489 | Johann WIDMANN introduit les signes + et - en remplacement des lettres $p$ et $m$ pour désigner l'addition et la soustraction. |
| 1557 | Robert RECORDE introduit le symbole $=$ pour marquer l'égalité. |
| 1591 | François VIETE introduit une notation littérale : voyelle pour les inconnues, et consonnes pour les constantes indéterminées. |
| 1608 | Le néerlandais Willebrord SNELLIUS propose d'utiliser la virgule pour séparer la partie entière de la partie décimale. |
| 1631 | Introduction des symboles d'inégalités $<$ et $>$. |
| 1632 | Fermat énonce de nombreuses conjectures et théorèmes. |
| 1633 | Utilisation de la croix $\times$ comme symbole de la multiplication. |

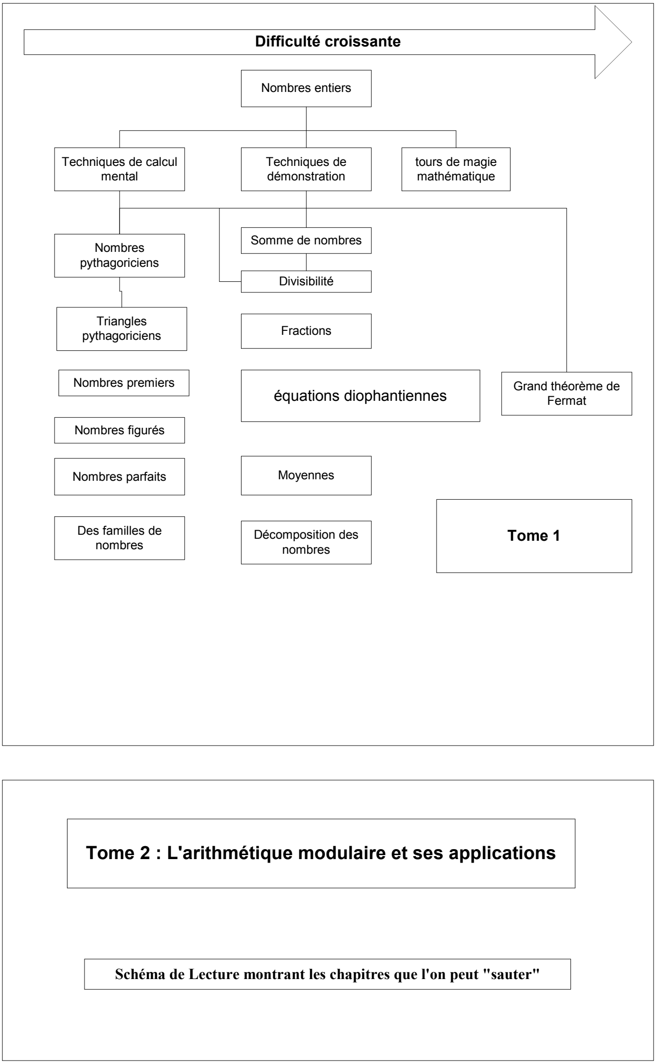
| | |
|---|---|
| 1795 | Adoption du système métrique. |
| 1831 | Gauss introduit les entiers complexes appelés entiers de Gauss. |
| 1994 | Andrew Wiles démontre le grand théorème de Fermat. |

# Mathématiciens ayant beaucoup étudié l'arithmétique

Le tableau suivant, bien que très incomplet, montre que les mathématiciens qui se sont intéressés à l'arithmétique sont très nombreux.

| | | |
|---|---|---|
| Pythagore | vers – 600 | Grec |
| Euclide | –350 --275 ? | Grec |
| Eratosthène | -276 – 194 ? | Grec |
| Nicomaque | vers –150 avant JC | |
| Héron d'Alexandrie | 1er siècle | Grec |
| Diophante d'Alexandrie | vers 300 | Grec |
| Brahmagupta | vers 598-670 | Indien |
| Claude Gaspard BACHET DE MEZIRIAC | 1581-1638 | Français |
| Marin MERSENNE | 1588-1648 | Français |
| Pierre de FERMAT | 1601-1665 | Français |
| John PELL | 1611-1685 | Anglais |
| Christian GOLDBACH | 1690-1764 | Russe |
| Leonhard EULER | 1707-1783 | Suisse |
| Edward WARING | 1734-1798 | Ecossais |
| Joseph Louis LAGRANGE | 1736-1813 | Français |
| John WILSON | 1741-1793 | Anglais |
| André Marie LEGENDRE | 1752-1834 | Français |
| Sophie GERMAIN | 1776-1831 | Française |
| Karl Friedrich GAUSS | 1777-1855 | Allemand |
| Augustin-Louis CAUCHY | 1789-1857 | Français |
| Auguste Ferdinand MÖBIUS | 1790-1868 | Allemand |
| Pierre Frédéric SARRUS | 1798-1861 | Français |
| Niels Henrik ABEL | 1802-1829 | Norvégien |
| Charles Gustav JACOBI | 1804-1851 | Allemand |
| Peter Gustav DIRICHLET | 1805-1859 | Allemand |
| Joseph LIOUVILLE | 1808-1882 | Français |
| Ernst KUMMER | 1810-1893 | Allemand |
| Evariste GALOIS | 1811-1832 | Français |
| Eugène-Charles CATALAN | 1814-1894 | Français et Belge |
| Pafnouty TCHEBYCHEV | 1821-1894 | Russe |
| Jean-Joseph Louis BERTRAND | 1822-1900 | Français |
| Ferdinand EISENSTEIN | 1823-1852 | Allemand |
| Edouard LUCAS | 1842-1891 | Français |
| François PROTH | 1852-1879 | Français |

| | | |
|---|---|---|
| Giuseppe PEANO | 1858-1932 | Italien |
| Kurt HENSEL | 1861-1941 | Allemand |
| Jacques HADAMARD | 1865-1963 | Français |
| Charles Jean de la VALLEE POUSSIN | 1866-1962 | Belge |
| Joseph WEDDERBURN | 1882-1948 | Ecossais ayant travaillé aux USA |
| Viggo BRUN | 1882-1978 | Norvégien |
| Maurice KRAITCHIK | 1882-1957 | Belge d'origine russe |
| Louis Joseph MORDELL | 1892-1972 | Anglais |
| Paul ERDÖS | 1913-1996 | Hongrois |
| Andrew WILES | 1953 | Anglais |
| Gerd FALTINGS | 1954- | Allemand |




Ce diagramme montre les différents chapitres avec une appréciation de leur difficulté.

# 1 Les nombres entiers

Les nombres entiers ont été très étudiés par les premiers mathématiciens, dont évidemment les grecs, mais aussi vers la fin du moyen age. Des propriétés très curieuses ont été trouvées. Quelques astuces facilitent le calcul mental. Pour ces raisons, nous consacrerons plusieurs chapitres à ce sujet.

## 1.1 Notations

Nous appelons $N$ l'ensemble des nombres entiers positifs.

Nous appelons $Z$ l'ensemble des « entiers relatifs » c'est à dire négatifs, nuls ou positifs.

$Z(i)$ désigne l'ensemble des entiers de Gauss. Il s'agit de nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entières. Dans le tome 2, un chapitre spécial leur est consacré.

Pour l'initiation, l'ensemble N des entiers naturels suffit. Cependant, pour s'attaquer à des problèmes plus complexes, il faut utiliser les nombres relatifs.

## 1.2 Les bases de numération

Dès l'école maternelle, on apprend aux enfants à compter en base 10, comme si d'autres formes de représentation des nombres n'étaient pas possibles. Or on peut parfaitement compter en base 2, 8, en base 12, 16 ou autre. La base de numération doit être un nombre entier positif $\geq 2$.

Les babyloniens utilisaient la base 60. Il en reste des traces avec des heures divisées en 60 minutes qui elles-mêmes sont divisées en 60 secondes. De même la mesure des angles dont le degré est divisé en 60 minutes. Enfin il reste des traces dans l'expression soixante-dix alors que le bon sens aurait voulu que l'on dise septante !

Les Mayas travaillaient avec la base 20. Elle a également été utilisée en Europe. Il en reste quelques traces, par exemple avec l'expression quatre-vingt au lieu d'octante.

La base 16, encore appelée base hexadécimale est maintenant très utilisée en informatique.

La base *12* a certainement une origine religieuse marquée par les douze apôtres, les *12* signes du zodiaque et explique certainement la division du jour en *24* heures : en moyenne *12* heures de jour et *12* heures de nuit. *12* a aussi de nombreux diviseurs : *2, 3, 4* et *6*; les chiffres *3* et *4* représentant certaines valeurs symboliques dans les religions et mythologies. Il en reste la vente des œufs ou des huîtres par douzaines.

La base huit, encore appelée base octale a été très utilisée en informatique.

Certaines tribus d'Amérique du Sud ont utilisé les bases 3 et 4.

Dans tout ce livre nous travaillerons en base 10, mais il ne faut pas oublier que la quasi totalité du contenu de ce livre reste bonne si on travaille dans une autre base. Les exceptions sont certaines techniques de calcul mental.

La fin de ce chapitre comporte un paragraphe portant sur les changements de base.

## 1.3 Les opérations de base

Les opérations de base sont évidemment : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Les additions et soustractions sont des opérations simples qui peuvent assez souvent se faire de tête, alors que les deux autres sont plus difficiles.

D'autres opérations ont été ajoutées par la suite :

- Élévation à la puissance
- Extraction de racines carrées, cubiques, etc.
- Factorielle, primorielle, super et hyperfactorielle, etc.

### 1.3.1 L'addition

L'addition est, de loin, l'opération la plus simple.

#### 1.3.1.1 Quelques propriétés de l'opération d'addition :

L'addition est **commutative** c'est à dire que $a + b = b + a$

Elle est **associative** : Pour effectuer 2 additions consécutives, l'ordre dans lequel on effectue les additions n'a pas d'importance. Cela s'écrit :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

#### 1.3.1.2 Table d'addition

La table d'addition ci-dessous permet d'additionner 2 entiers positifs inférieurs ou égaux à 13.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

*Figure 1 Table d'addition*

### 1.3.2 La soustraction

Cette opération apparaît comme l'opération inverse de l'addition puisque si

$$x = a + b \quad \text{on peut écrire} \quad a = x - b$$

La soustraction n'est pas commutative : $a - b$ ne donne pas le même résultat que $b - a$

#### 1.3.2.1 Un tour de magie arithmétique

Voici un petit tour de magie mathématique destiné à montrer ce qu'on peut faire. Le lecteur intéressé pourra lire le chapitre 3 qui est consacré à ce sujet.

André pense à un nombre entier de 3 chiffres, par exemple à *742*. Il permute les chiffres de gauche et de droite, ce qui donne, dans l'exemple *247*. Il calcule la différence entre les 2 nombres, ici *742 – 247 = 495*.

André communique le chiffre de gauche du résultat à Bernard et Bernard trouve les 2 autres chiffres, *9* et *5* dans l'exemple. Comment fait Bernard ?

**Explication** : le nombre d'André, composé de 3 chiffres *a, b* et *c* est tel que a représente les centaines, *b* représente les dizaines et *c* les unités. La valeur de ce nombre est donc :

$$x = 100a + 10b + c$$

Après permutation des chiffres de gauche et de droite, on obtient un nombre *y* qui vaut :

$$y = 100c + 10b + a$$

| |
|---|
| Le lecteur peut revoir en fin de ce chapitre un rappel relatif aux identités remarquables |

La différence $x - y$ s'écrit :

$$x - y = 100\,(a - c) + (c - a)$$

Pour ne pas entrer dans les nombres négatifs, nous supposons que $a>c$. Il s'en suit que $(c - a)$ est négatif et que nous devons écrire :

$$x - y = 100\,(a - c) - 10 + (10 + c - a)$$

Mais alors le chiffre des dizaines serait négatif. Il faut donc retirer une centaine pour que le chiffre des dizaines devienne 9, ce qui donne :

$$x - y = 100\,(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$$

On constate que le chiffre des dizaines est toujours ***9***.

Le chiffre des unités est égal à *9 – chiffre des centaines* car

$$9 - a + c + 1 = 10 + c - a$$

Quand André annonce le chiffre des centaines, par exemple *4*, Bernard peut répondre sans se tromper : les 2 autres chiffres sont *9* et 5 *(5 = 9 – 4)*.

### 1.3.3 La multiplication

L'opérateur de multiplication est habituellement noté x, mais parfois on utilise le point ou même aucun signe.

#### 1.3.3.1 Propriétés de l'opération de multiplication

La multiplication est **commutative** : $a \times b = b \times a$

Elle est également **associative** : $(a \times b) \times c = a \times ( b \times c)$

Elle est **distributive** par rapport à l'addition, c'est à dire que :

$$a\ (b+c) = ab + bc$$

Autrement dit, on peut soit d'abord effectuer l'addition $b + c$ puis on multiplie le résultat par $a$ ou alors on calcule les produits $ab$ et $ac$ et on additionne ensuite les 2 produits.

La multiplication a un **élément neutre** qui est noté 1 car :

$$a \times 1 = a$$

**Remarque** : Avec les nombres entiers, contrairement aux nombres réels, un élément n'est pas **inversible**, c'est à dire que si $a$ est premier, on ne peut pas trouver un entier $a'$ tel que :

$$a \times a' = 1$$

nous reviendrons sur ce sujet dans le Tome 2 car l'arithmétique modulaire donne une autre approche de l'inversibilité.

**Terminologie** : quand on multiplie un nombre par lui-même, on dit qu'on l'élève au carré ; si on multiplie un nombre 2 fois par lui-même, on dit qu'on l'élève au cube. Nous reviendrons sur cette terminologie

La table suivante est une table de multiplication de 13x13.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 |
| 10 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 |
| 11 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 |
| 12 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 | 132 | 144 | 156 |
| 13 | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 | 91 | 104 | 117 | 130 | 143 | 156 | 169 |

*Figure 2 : Table de multiplication*

Plusieurs méthodes ont été proposées pour réaliser cette opération en minimisant les risques d'erreur, parmi lesquelles, on peut citer :

- La multiplication égyptienne,
- La multiplication à la russe.
- La multiplication italienne,

### 1.3.3.2 La multiplication égyptienne

Les égyptiens utilisaient une méthode particulière pour effectuer les multiplications. Soient 2 nombres *A* et *B*, par exemple, *29* et *35*. On trace 2 colonnes :

Dans la colonne de gauche, on écrira la suite des divisions par *2* de *A* (en arrondissant à l'entier inférieur quand le nombre à diviser est impair), jusqu'à ce que l'on atteindre la valeur *1*.

Dans la colonne de droite, on écrit le résultat des multiplications successives de *B*, ce qui donne le résultat suivant :

Ensuite, on additionne dans la colonne de droite, les nombres dont leur homologue de gauche est impair.

| | |
|---|---|
| *29* | *35* |
| ~~*14*~~ | ~~*70*~~ |
| *7* | *140* |
| *3* | *280* |
| *1* | *560* |
| | *1015* |

A partir de cette méthode, on peut établir le programme suivant en Basic :

```
REM multiplication égyptienne
DIM t(100)
CLS
debut:
INPUT "Donner les nombres à multiplier"; a, b
IF a = 0 THEN STOP
s = 0
DO WHILE a > .9
  c = INT(a / 2)
  IF 2 * c <> a THEN s = s + b
  a = c
  b = 2 * b
  LOOP
PRINT "le produit est"; s
GOTO debut
```

Exemple d'exécution

```
Donner les nombres à multiplier? 27,35
le produit est 945
Donner les nombres à multiplier? 25,25
le produit est 625
Donner les nombres à multiplier? 12,12
le produit est 144
Donner les nombres à multiplier? 5,8
le produit est 40
Donner les nombres à multiplier? 15,15
le produit est 225
Donner les nombres à multiplier? 13,26
le produit est 338
Donner les nombres à multiplier? 0,2
```

#### 1.3.3.3 Multiplication à la russe

Cette multiplication ne fait appel qu'aux opérations de multiplication et de division par *2* et à l'addition.

**Exemple** : soit à calculer $A = 517 \times 46$

On peut multiplier par *2* le premier nombre et diviser par *2* le second, ce qui donne :

$$A = 1034 \times 23 = 1034 + 1034 \times 22$$
$$A = 1034 + 2068 \times 11$$
$$A = 1034 + 2068 + 2068 \times 10$$
$$A = 1034 + 2068 + 4136 \times 5$$
$$A = 1034 + 2068 + 4136 + 4136 \times 4$$
$$A = 1034 + 2068 + 4136 + 16544 = 23\,782$$

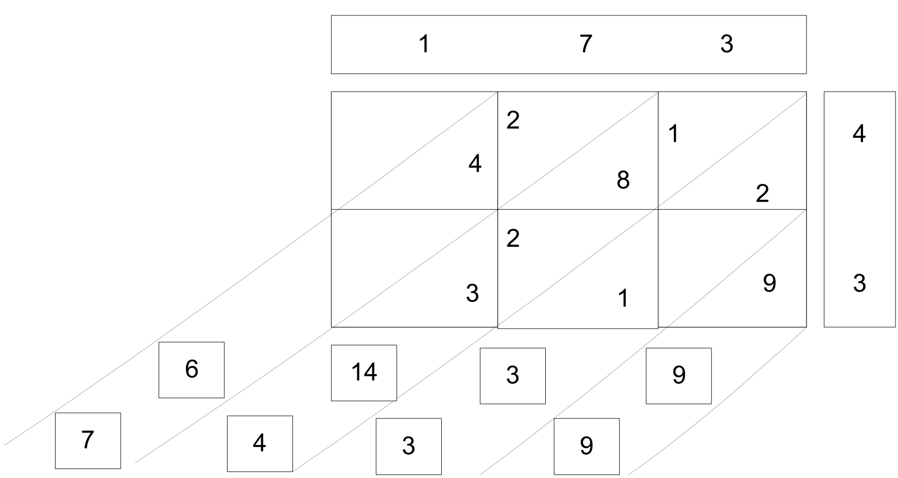
**Remarque** : La multiplication égyptienne et la multiplication à la russe décomposent la multiplication comme on le ferait si on travaillait en base *2*.

### 1.3.3.4 La multiplication italienne

Cette méthode, qui vient de l'orient, est apparue en Italie vers le 15 ème siècle. Elle repose sur l'utilisation d'un rectangle quadrillé et d'obliques comme nous allons le voir sur un exemple.

Soit à multiplier *173* par *43*. Nous commençons par dessiner 3 rectangles :

- un rectangle horizontal qui contiendra le multiplicande
- un rectangle vertical qui contiendra le multiplicateur
- un rectangle plus grand qui permettra les multiplications élémentaires



Ensuite, nous traçons les obliques qui permettront de séparer les chiffres de « poids différents ».

Puis nous faisons les multiplication de chiffre par chiffre, mais en séparant bien les résultats. Par exemple le produit des unités, ici $3 \times 3$, va dans la partie inférieure du rectangle inférieur de droite.

Le produit $4 \times 7 = 28$ va donner lieu au chiffre 8 écrit au bas du rectangle et le chiffre 2 (de « poids supérieur ») écrit dans le haut du rectangle.

Lorsque toutes les multiplications élémentaires sont effectuées, nous faisons l'addition des chiffres se trouvant dans la même séparation formée par les obliques et recopions les résultats dans les petits rectangles, En fait nous additionnons des chiffres de même poids. Si un rectangle comporte un nombre à 2 chiffres, cela signifie qu'il y a une « retenue » et nous apportons la correction comme avec une multiplication classique. Cela donne alors la ligne inférieure..

Dans la pratique, on peut cumuler les 2 dernières opérations.

Cette méthode réduit les risques d'erreur, dans la mesure où chaque opération est simple, mais elle est encombrante dès que les nombres deviennent un peu importants.

#### 1.3.3.5 Exercice :

Certains nombres de 2 chiffres ont une propriété particulière : leur produit ne change pas si on permute le chiffre des dizaines et celui des unités du multiplicande et du multiplicateur. Par exemple : $12 \times 42 = 21 \times 24$ . Trouver tous les couples de nombres qui ont cette propriété.

**La solution est simple** : Si nous appelons $a$ le chiffre des dizaines et $b$ celui des unités du multiplicande et $c$ *et* $d$ ceux du multiplicateur, la valeur de chaque nombre est

$10a + b$ et $10c + d$ et si on permute $10b + a$ et $10d + c$

Leur produit est $(10a + b)(10c + d)$ doit être égal à $(10b + a)(10d + c)$, ce qui donne :

$$100\,ac + 10\,ad + 10\,bc + bd = 100\,bd + 10\,bc + 10\,ad + ac$$

$$99\,ac = 99bd$$

La condition à satisfaire est donc $ac = bd$. Si nous éliminons les solutions triviales, par exemple celles ou les chiffres des unités et des dizaines sont égaux, nous obtenons les solutions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| *12 x42* | *14 x 82* | *24 x 84* |
| *12 x 63* | *23 x 64* | *36 x 84* |
| *12 x 84* | *23 x 96* | *39 x 62* |
| *13 x 62* | *24 x 63* | *46 x 96* |
| *13 x 93* | | |

Dans cette liste, nous nous sommes limités aux nombres tels que $a < b$, mais il est évident que les solutions symétriques existent.

## 1.3.4 La division

Nous appellerons division euclidienne la division entière avec reste.

### 1.3.4.1 Un peu de terminologie

Nous appelons **division euclidienne**, la division qui donne un quotient entier et un reste qui est inférieur au diviseur

Dans la division $a = bq + r$ où $r < b$

- $a$ est appelé le dividende,
- $b$ est appelé le diviseur,
- $q$ est le quotient et
- $r$ est le reste qui doit être inférieur au diviseur $b$. Ce reste est parfois appelé *résidu,* notamment à propos des *congruences* présentées dans le tome 2.

On dit que $p$ **divise** $n$ si la division euclidienne de $n$ par $p$ donne un reste nul.

**Notation** : on écrit $p \mid n$ pour dire que $p$ divise $n$ (avec un reste nul)

La division est **réflexive** : tout entier $a$ divise lui même.

**La division n'est pas commutative :** $a/b$ ne donne pas le même résultat que $b/a$

Exemple : *10 /2* donne pour résultat *5* alors que *2/10* donne *0,2*

**La division est transitive :** si $a$ divise $b$ **et si** $b$ divise $c$, alors $a$ divise $c$**.**

Elle est **antisymétrique :** si $a$ divise $b$ et si $b$ divise $a$ , alors $a = b$.

**La division avec un diviseur nul n'est pas possible** : elle donne en théorie un résultat infini, mais est en fait la cause d'un grand nombre d'erreurs.

L'exemple suivant montre comment on peut faire un raisonnement apparemment juste qui conduit à un résultat faux.

Nous allons montrer que le nombre $a$ est égal au nombre $b$. Supposons que $a>b$ , nous pouvons donc écrire :

$$a = b + c, \quad a, b \text{ et } c \text{ étant positifs}$$

Multiplions le tout par $(a-b)$, ce qui donne :

$$a(a-b) = (a-b)(b+c)$$

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \qquad \text{ôtons } ac \text{ de chaque côté}$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a(a-b-c) = b(a-b-c) \qquad \text{divisons tout par } (a-b-c)$$

$$a = b$$

Le résultat $a = b$ semble avoir été obtenu par un calcul sans faute à ceci près que nous avons divisé par $(a-b-c)$ qui vaut zéro ! La division était donc impossible.

**Théorème :** Dans une relation $a + b = c$ , si un entier $p$ divise 2 termes, alors il divise le 3 ème terme**.**

La démonstration est aisée : Par exemple si $n$ divise $a$ et $c$, nous pouvons écrire :

$$a = np \text{ et } b = nq \text{ donc } c = n(p+q)$$

Le nombre $c$ est donc divisible à la fois par $n$ et par $(p + q)$.

## 1.4 Le rôle des parenthèses

Si on écrit l'expression : $a\times b + a\times c$, dans quel ordre faut-il effectuer les calculer ?

Les règles habituelles sont les suivantes :

- On effectue d'abord les multiplications et divisions,
- On effectue ensuite les additions et soustractions.

Dans l'exemple précédent, cela signifie qu'il faut préalablement calculer les produits $ab$ et $cd$ puis effectuer l'addition.

Les parenthèses permettent d'imposer un ordre différent, par exemple :

> $a\times(b + a)\times c$ signifie qu'il faut d'abord additionner $b$ *à* $a$ et ensuite effectuer les multiplications.

## 1.5 La notion de parité

Un nombre est dit pair s'il est divisible par 2, c'est à dire si son chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8. Dans les autres cas, il est dit impair.

Cette parité est utile pour certains raisonnements : la parité est conservée ou changée dans certaines opérations :

| | |
|---|---|
| Addition : | Pair + Pair donne résultat pair |
| | Impair + Impair donne résultat pair |
| | Pair + Impair donne résultat impair |
| Multiplication : | Pair × Pair = Pair |
| | Pair × Impair = Pair |
| | Impair × Impair = Impair |

Le contrôle de parité permet parfois de détecter une erreur, mais de façon moins sure que la vieille "preuve par neuf".

## 1.6 La preuve par neuf

Cette preuve permettait souvent de détecter une erreur dans les multiplications et divisions lorsqu'elles étaient faites à la main. Le principe est le suivant :

Dans une multiplication, si le multiplicande ou le multiplicateur est divisible par 9, le résultat doit l'être également. Mais ici on va un peu plus loin :

On calcule les restes d'une éventuelle division par *9*, ce qui est très facile : il suffit d'additionner les chiffres du multiplicateur ou du multiplicande.

L'explication détaillée du fonctionnement de cette preuve est donnée dans le chapitre relatif aux congruences dans le tome 2.

**Attention** : si la preuve par *9* indique qu'il y a une erreur de calcul, elle a raison. Mais si elle ne détecte pas les erreurs causées par :

- la permutation de 2 ou plusieurs chiffres dans le résultat,

– un résultat différent d'un multiple de 9 du bon résultat.

Elle reste cependant très pratique quand on ne dispose pas de calculette.

## 1.7 L'élévation à la puissance

L'élévation à la puissance consiste à multiplier un nombre avec lui même, une ou plusieurs fois. Par exemple, pour élever *3* à la puissance *2*, on multiplie *3* par *3*, ce qui donne *9*. Pour élever *4* à la puissance *3*, on multiplie *4*, *2* fois avec lui même, ce qui donne : $4 \times 4 \times 4 = 64$.

On utilise la notation suivante : $4^3 = 64$

### 1.7.1 Propriétés :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

L'élévation à la puissance fait croître le résultat très rapidement. Pour cette raison, on parle de croissance exponentielle.

$$2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32 \quad 2^{10} = 1024$$

L'élévation à une puissance négative correspond à l'écriture d'une fraction, par exemple $a^{-b}$, $b$ étant $>0$ est égal à $1/a^b$.

La racine carrée se note également par la puissance ½ et la racine cubique par la puissance 1/3 :

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \qquad x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

L'élévation à une puissance non entière est également possible, mais sort du cadre de ce livre consacré à l'arithmétique.

## 1.8 Extraction de racine carrée

Cette opération est de loin, la plus compliquée. Elle correspond à l'inverse de l'élévation au carré. Elle est présentée dans la chapitre 2.

## 1.9 L'opération factorielle

L'une des caractéristiques des mathématiques est le fait que les mathématiciens n'hésitent pas à créer un opérateur lorsque cela leur semble utile. C'est le cas notamment de l'opérateur factorielle qui est noté par un point d'exclamation.

Cet opérateur ne porte que sur un seul opérande :

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

Cet opérateur est très utile, notamment pour les calculs en combinatoire. On constate que les factorielles croissent très vite :

$4\,! = 24 \quad 5\,! = 120 \quad 6\,! = 720 \quad 7\,! = 5\,040$

$8\,! = 40\,320 \quad 9\,! = 362\,880$

**Remarque** : la fonction factorielle se généralise en analyse sous le nom de « fonction gamma » notée Γ.

### 1.9.1 La primorielle

La primorielle ressemble à la factorielle à ceci près qu'on ne multiplie que les nombres premiers. On notera $p\#$ le produit des nombres premiers de $2$ à $p$ inclus (si $p$ est premier).

Exemples : $3\# = 6 \quad 5\# = 30 \quad 7\# = 210, \quad 11\# = 2310$, etc.

Les primorielles n'ont pas donné lieu à des développements intéressants surtout d'un point de vue pratique.

Les mathématiciens ont imaginé :

- des multifactorielles : on prend un nombre sur 2 ou sur 3, etc.
- double factorielle : 6 !! = 2 × 4 × 6
- des hyperfactorielles notées $H(n) = 1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \ \ldots \ n^n$
- des superfactorielles notée $\mathrm{sf(n)} = 1^n \times 2^{n-1} \times 3^{n-2} \times \quad (n-1)^2 \times n$
- des sous-factorielles notée $!n = n\,!\ \Sigma(-1)^k/k\,!$

Les sous-factorielles sont reliées à la fonction Gamma, mais l'intérêt des autres notions est discutable.

## 1.10 Relation d'ordre

Un nombre entier $a$ peut être plus petit, plus grand ou égal à un autre nombre $b$. Nous noterons :

$a < b$ pour dire que $a$ est plus petit que $b$

$a \leq b$ pour dire que $a$ est plus petit ou égal à $b$

$a = b$ signifie que $a$ est égal à $b$

$a > b$ indique que $a$ est plus grand que $b$

$a \geq b$ indique que $a$ est plus grand ou égal à $b$

Le symbole $\neq$ est l'opposé du symbole $=$. Il signifie différent.

Cette relation d'ordre est **transitive** c'est à dire que si :

$$a < b \text{ et } b < c, \text{ alors } a<c$$

## 1.11 La notion de moyenne

Habituellement, nous considérons que la moyenne de 2 nombres $a$ et $b$ est donnée par :

$$m = (a + b)/2$$

Cette moyenne est la **moyenne arithmétique**. Il existe 2 autres moyennes :

La moyenne géométrique est donnée par

$$m = \sqrt{(a + b)}$$

La moyenne harmonique $h$ est donnée par :

$$2/h = 1/a + 1/b$$

Il ne faut pas croire que les mathématiciens ont inventé ces notions pour le plaisir. Elles sont utiles. Par exemple, en électricité la résistance équivalente de 2 résistances montée en parallèle est égale à la moitié de la moyenne harmonique des 2 résistances.

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2$$

## 1.12 Les changements de base

**Rappel** : quand nous écrivons en base 10, par exemple, le nombre 2345, tout se passe comme si nous écrivions :

$$2\times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5$$

En base 8, nous disposerons uniquement des chiffres de 0 à 7. 10 ne représentera plus une dizaine, mais une « octaine »

Le nombre 2345 écrit en base 8 signifie

$$2\times 8^3 + 3 \times 8^2 + 4 \times 8 + 5 \ = 1253 \text{ en base 10}$$

Le passage d'une représentation en base 10 en représentation dans une autre base et inversement n'est pas une opération difficile, mais il faut faire attention : une petite erreur est vite arrivée !

Si nous voulons représenter un nombre en base 16, les 10 chiffres habituels ne suffisent pas et nous devons ajouter 6 chiffres supplémentaires. Par convention, nous représenterons par *A, B, C, D, E* et *F* les chiffres *10, 11, 12, 13, 14* et *15*

Le nombre *1A* signifie, en base *10 : 16 + 10 = 26*

Le nombre *7AF* signifie en base *10 : 15 + 160 + 7×256 = 1967*

**Procédé de changement de base :**

Plusieurs méthodes sont possibles. Nous présentons ici la méthode qui semble la plus naturelle.

**Passage de la base n à la base 10**. C'est le cas le plus simple :

Si le nombre en base *n* s'écrit $\overline{abcde}$ : il suffit de faire le calcul :

$$e + d\times n + c\times n^2 + b\times n^3 + a\times n^4$$

Ce calcul peut être réalisé plus rapidement sous la forme

$$(((an + b)n + c)n + d)n + e$$

Exemple : convertir *3 456 543* de la base 8 en base 10

((((((3×8 + 4)×8 + 5) ×8) +6)×8 + 5)×8 + 4)×8 + 3 = 941 411

**Passage de la base 10 à la base n :** le calcul est un peu plus compliqué.

Supposons que le nombre s'écrive $\overline{abcdef}$ en base 10. Nous allons opérer des divisions euclidiennes par $n$ pour et noter les différents restes.

La première division donne un reste qui sera le chiffre des unités. Nous diviserons le quotient obtenu par n et le reste sera le chiffre qui ira immédiatement à droite. Nous continuons de la sorte jusqu'à ce que la division ne soit plus possible. Alors le dernier quotient est le chiffre le plus à gauche.

Exemple 1 : reprenons le nombre précédent : *941 411*

$941\ 411 = 8 \times 117676 + 3$ — *3* sera le chiffre des unités

$117676 = 8\times14709 + 4$ — *4* sera le chiffre suivant

$14709 = 8\times1838 + 5$ — *5*

$1838 = 8\times229 + 6$

$229 = 8\times28 + 5$

$28 = 8\times3 + 4$ — *4* est retenu mais aussi le quotient *3* qui est sera le chiffre de poids le plus élevé.

Nous retrouvons donc notre nombre *3456543*

Exemple 2 : soit à convertir le même nombre *941411* en base 16. Le processus est le même à ceci près qu'il faudra utiliser les lettres *A, B, C, D, E* et *F* comme des chiffres représentant respectivement les chiffres *10, 11, 12, 13, 14* et *15* de la base *16*.

Nous obtenons :

$941411 = 16\times58838 + 3$ — *3* sera le chiffre des unités

$58838 = 16\times3677 + 6$ — *6* sera le chiffre immédiatement à gauche

$3677 = 16\times229 + 13$ — *13* donnera le chiffre *D*

$229 = 16\times14 + 5$ — *5* sera le chiffre suivant à gauche et le quotient *14* donne le chiffre *E* tout à gauche.

Le nombre en base *16* est donc *E5D63*

D'un strict point de vue théorique, les calculs se font de la même manière quelle que soit la base utilisée. Dans la pratique quand on est habitué à travailler en base *10*, les calculs dans une autre base sont pénibles.

## 1.13 Exercices

**Exercice 1** : Dans un document, on trouve l'écriture suivante : $9 \times 8 = 48$. Comment expliquer un tel résultat ?

**Réponse** : Si le résultat est juste, il s'explique par le fait que les auteurs travaillent dans une autre base. Soit b cette base. Nous devons avoir :

$$4b + 8 = 72 \text{ ce qui donne } b = 16$$

L'auteur a donc calculé en base 16.

**Exercice** 2 : trouver la base dans laquelle est écrit le nombre 999 sachant que sa valeur en base 10 est 2457.

**Réponse :** Soit b la base. Nous pouvons écrire :

$$9(b^2 + b + 1) = 2457 \text{ soit } \quad b^2 + b + 1 = 273 \quad b(b+1)= 272 = 16 \times 17$$

999 est donc écrit en base 16.

## 1.14 Rappels : Les identités et inégalités remarquables

Les identités qualifiées de remarquables sont d'une très grande utilité pour le calcul algébrique qui est évidemment utilisé en arithmétique. Voici les principales identités :

**Identités du second degré :**

$$(a + b)2 = a2 + 2ab + b2$$

$$(a - b)2 = a2 - 2ab + b2$$

$$a2 – b2 = (a + b)(a – b)$$

**Identités du 3 ème degré :**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\ ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3\ ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**Identités de degré n :**

$$a^n - b^n = (a – b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ \dots \quad + b^{n-1})$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} + ..... + b^n$$

développement avec les « coefficients du binôme »

$$(a - b)^n = a^3 + na^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} + ..... + (-1)^n b^n$$

**Identité de Diophante, ou de Legendre (ou de Fibonacci)[1] :**

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

**Identité de Brahmagupta**

$$(a^2 - nb^2)(c^2 - nd^2) = (ac + nbd)^2 - n(ad + bc)^2$$

**L'inégalité de Young**

La forme simplifiée de cette inégalité est :

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad a \text{ et } b \text{ étant des nombres réels}$$

**Démonstration** : on peut supposer que a < b, ce qui conduit à poser b = a + h

Multiplions tout par 2. Nous pouvons écrire :

$$2a(a + h) \le a^2 + (a + h)^2 = 2a^2 + 2ah + h^2$$

Il y a égalité seulement lorsque $a = b$

La forme générale de l'inégalité d'Young est :

$$\boldsymbol{ab} \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Cette inégalité est utilisée pour diverses démonstrations.

---

[1] Il semble que Diophante d'Alexandrie soit le premier à l'avoir trouvée.