Table des matières

Avant-propos

S'il est incontestable que l'intégrale de Lebesgue constitue aujourd'hui l'un des outils les plus performants pour de nombreuses questions théoriques en Analyse, il est tout aussi indéniable que l'intégrale de Riemann est l'outil incontournable dès lors que se pose la question fondamentale du calcul effectif des intégrales ou de leur approximation.

Le but de cet ouvrage est de présenter de manière claire et détaillée la construction de l'intégrale de Riemann ainsi que l'essentiel des théorèmes permettant son utilisation pratique. Nous avons essayé d'éviter tout formalisme inutile, et la rédaction de ce travail a d'abord été guidée par un souci pédagogique. Nous avons constamment recherché l'équilibre nécessaire entre les points de vue théorique et pratique, et avons veillé à ce que les concepts et les méthodes proposés soient illustrés de nombreux exemples.

Chacun des cinq premiers chapitres offre un grand choix d'exercices judicieusement sélectionnés en vue d'une bonne assimilation des concepts et d'une réelle maîtrise des techniques. Le chapitre six est lui entièrement consacré à des problèmes de révision destinés au travail d'approfondissement et de synthèse en vue des examens et des concours. Enfin, pour la commodité du lecteur, une annexe regroupe les rappels utiles pour un accès rapide et efficace au contenu de cet ouvrage.

Tous les exercices et problèmes proposés sont corrigés en détail et nous avons systématiquement privilégié la solution méthodique et raisonnable que peut découvrir l'étudiant lui-même, à une éventuelle solution “miraculeuse”. Pour cela, nous avons tenu le plus grand compte des nombreuses remarques et suggestions formulées par les étudiants lors des séances de travaux dirigés et de préparation aux concours pendant lesquelles un grand nombre de ces exercices et problèmes ont été assidûment et activement recherchés.

Cet ouvrage bénéficie d'une expérience de plusieurs années en théorie de l'intégration à l'Université d'Angers et, à l'instar de mes collègues universitaires et professeurs en classes préparatoires, je suis profondément convaincu que la maîtrise à la fois conceptuelle et technique de l'intégrale de Riemann est un atout essentiel pour l'accès aux nombreux champs d'applications de l'Analyse mathématique ainsi qu'à la préparation du terrain en vue d'autres théories, notamment celle de Lebesgue.

Le contenu de ce livre couvre le programme d'intégration des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques ainsi que celui correspondant aux niveaux L1 et L2 des Facultés de Sciences. Par la diversité des exercices et problèmes qu'il propose, cet ouvrage sera également utile aux candidats au CAPES et à l'agrégation interne.

Enfin, ce livre est pourvu d'un index détaillé permettant une approche adaptée aux besoins de chaque lecteur.

C'est avec un grand plaisir que j'adresse mes remerciements à monsieur Philippe Fauvernier des Édtions Hermann pour sa parfaite disponibilité, ainsi qu'au Professeur Ivan Lavallée pour ses précieux conseils.

Je dédie ce travail à Frédérique, Karim, Mourad et Nessim.

Chapitre 1

Intégrale de Riemann

Dans une lettre à Leibniz [1] datée du 12 février 1695, Jean Bernoulli [2] écrit : "J'ai été le premier à réfléchir à l'inverse de votre calcul différentiel que j'ai désigné aussi du nom de calcul intégral ". Mais c'est Riemann [3] qui, dans sa thèse de doctorat soutenue en 1854, élabore la théorie rigoureuse de ce qu'on appelle aujourd'hui l'intégrale de Riemann. Ses travaux généralisent de façon décisive ceux de Cauchy [4], auteur dans les années 1820 d'une première théorie essentiellement rigoureuse de l'intégration des fonctions continues. Les deux grands précurseurs de la théorie de l'intégration au XVIIIe sont incontestablement Newton [5]

1. LEIBNIZ Gottfried (1646 -1716). Mathématicien et philosophe allemand. Disciple de Descartes. Il inventa le calcul différentiel en 1676, en même temps que Newton.

2. BERNOULLI Jean (1667 -1748). Mathématicien et physicien suisse. Contribua avec son frère Jacques au développement du calcul infinitésimal. Il découvrit le calcul exponentiel et eut aussi la gloire de former l'illustre mathématicien et physicien suisse : Leonhard Euler.

3. RIEMANN Bernhard (1826 -1866). Mathématicien allemand. Il jeta les bases de la géométrie différentielle et ouvrit la voie aux géométries non-euclidiennes et à la théorie de la relativité générale. On lui doit d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann.

4. CAUCHY Augustin (1789 -1857). Mathématicien français. Il est à l'origine de l'analyse moderne : on lui doit notamment la théorie des équations différentielles et la théorie mécanique de l'élasticité.

5. NEWTON Isaac (1642 -1727). Physicien anglais. Un des plus grands scientifiques des temps modernes. Apporta des contributions majeures aussi bien en physique qu'en mathématiques. Il entama l'étude des fonctions dérivables et de leurs dérivées

qui développa sous le nom de *fluxion* une approche systématique de la réciproque de la dérivation, et Leibniz pour son approche géométrique fondée sur le calcul d'aire.

Notations : Dans tout ce chapitre, on se placera sur un intervalle compact (c'est-à-dire fermé et borné) $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point $(-\infty < a < b < +\infty)$. Pour la clarté de l'exposé, nous considèrerons essentiellement les fonctions à numérique, c'est-à-dire les fonctions à valeurs réelles. Nous expliquerons la démarche à suivre pour les fonctions à valeurs complexes, et plus généralement pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet quelconque.

1.1 Intégrale des fonctions en escalier

1.1.1 Espace vectoriel des fonctions en escalier

Définition 1.1.2 On appelle *subdivision* de l'intervalle compact $[a,b]$ toute suite finie et strictement croissante de points de $[a,b]$, dont le premier terme est a, et le dernier b.

Une subdivision de $[a,b]$ sera notée $\sigma := (a_0 = a, a_1, \cdots, a_n = b)$.
À chaque subdivision σ de $[a,b]$ nous associerons l'ensemble S constitué par les points de la suite σ.
Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, on dit que σ' est plus *fine* que σ si les ensembles S, S' respectivement associés à σ, σ', vérifient l'inclusion $S \subset S'$. En d'autres termes, la subdivision σ' est plus fine que σ si tous les éléments de σ appartiennent à σ'. On note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision σ'' dont l'ensemble associé est la réunion des ensembles associés à σ et σ'.

Définition 1.1.3 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ et des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

et rédigea un compte rendu sur les fondements du calcul infinitésimal. Newton a fondé l'analyse moderne. En géométrie, il classifia les cubiques et en donna des tracés corrects avec asymptotes, inflexions et points de rebroussement. En physique, ses contributions sont immenses, notamment en optique et en mécanique, avec la mise en place de sa théorie de l'attraction universelle.

de $\mathbb{R}$ tels que

$$(1.1) \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \;\; \forall x \in]a_{i-1}, a_i[, \;\; f(x) = \lambda_i.$$

On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à f.

Exemple 1.1.4 La fonction $x \mapsto E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x, est en escalier sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.5 Une fonction en escalier n'est en fait pas spécifiée aux points a_i de la subdivision σ considérée, et l'intégrale $I(f, \sigma)$ ne dépend donc pas de f en ces points.

1.1.6 Construction de l'intégrale d'une fonction en escalier

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème et définition 1.1.7 *Soient $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f. On note λ_i la valeur de f sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors le nombre réel $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (a_i - a_{i-1})$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f considérée. On l'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$, et on le note $\int_a^b f(x) \, dx$.*

Démonstration : Notons σ la subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et posons

$$I(f, \sigma) \; := \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (a_i - a_{i-1}).$$

Soit σ' la subdivision de $[a, b]$ obtenue en ajoutant un seul élément c à σ, distinct des éléments de σ. Il existe un entier $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $c \in]a_{j-1}, a_j[$. La fonction f est constante et égale à λ_j sur $]a_{j-1}, a_j[$ donc sur $]a_{j-1}, c[$ et sur $]c, a_j[$. La subdivision σ' est donc adaptée à f et on a

$$\lambda_j \, (a_j - a_{j-1}) \; = \; \lambda_j \, (c - a_{j-1}) + \lambda_j \, (a_j - c).$$

On en déduit que $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$.
Il en résulte par récurrence sur le nombre fini d'éléments de $[a, b]$ à adjoindre à σ, que $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$ si σ' est plus fine que σ.

Enfin, si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques adaptées à la fonction f, les deux nombres réels $I(f,\sigma)$ et $I(f,\sigma')$ sont l'un et l'autre égaux à $I(f,\sigma\cup\sigma')$. $\square$

Remarques 1.1.8 a) Une conséquence immédiate de la définition 1.1.3 est que si f est une fonction nulle en dehors d'un nombre fini de points de $[a,b]$, alors f est en escalier sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.
b) Si f et g sont deux fonctions en escalier égales sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b g(x)\,dx$.
c) Enfin, il découle clairement de la définition que l'intégrale d'une fonction en escalier réelle positive est positive.

Lemme 1.1.9 *Muni des lois usuelles, l'ensemble* $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *est un* $\mathbb{R}$-*sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *et l'application* $f\mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ *de* $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire.*

Démonstration : Soient α,β deux scalaires et f,g deux éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées respectivement à f et à g. Alors, la subdivision $\sigma\cup\sigma'$ est adaptée à la fois à f et à g, et $\alpha f+\beta g$ est constante sur chaque intervalle ouvert de $\sigma\cup\sigma'$, donc $\alpha f+\beta g$ est en escalier sur $[a,b]$.
En calculant l'intégrale de $\alpha f+\beta g$ au moyen de $\sigma\cup\sigma'$, on obtient aussitôt

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,dx \;=\; \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

D'où le lemme. $\square$

On munit $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

où le $\sup$ est nécessairement fini car f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Proposition 1.1.10 *1) La forme linéaire*

$$\begin{cases} \left(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \end{cases}$$

est continue.
2) Si $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$*, alors :* $f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$
3) Si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$*, alors* $|f| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$ *et*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration : 1) Pour tout $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a)\cdot\|f\|_\infty$$

ce qui montre que la forme linéaire considérée est continue en 0, donc continue en tout point de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.
2) Par linéarité, il suffit de montrer que $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0$, ce qui découle immédiatement du point c) des remarques 1.1.8.
3) Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction f telle que f soit constante et égale à λ_i sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors σ est également adaptée à $|f|$ et on a

$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i\,(a_i - a_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|\cdot|a_i - a_{i-1}|,$$

d'où le résultat annoncé. □

Proposition 1.1.11 *Soient* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier et* c *un élément de* $]a,b[$*. Alors la restriction de* f *à* $[a,c]$ *(resp.* $[c,b]$*) est une fonction en escalier sur* $[a,c]$ *(resp.* $[c,b]$*) et on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration : Il suffit, pour obtenir le résultat, de considérer une subdivision adaptée à f contenant le point c. □

1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Nous allons étendre la notion d'intégrale à une classe beaucoup plus générale que celle des fonctions en escalier ; et cette extension sera guidée par le souci de conserver, pour ces nouvelles fonctions, les propriétés acquises au paragraphe précédent pour l'intégrale des fonctions en escalier.

Définition 1.2.1 Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann* (ou *Riemann-intégrable*) sur $[a, b]$ si, quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une couple (g, h) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ vérifiant :

$$g \leq f \leq h \text{ sur } [a, b] \text{ et } \int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \leq \varepsilon.$$

Remarques 1.2.2 1) De cette définition il résulte que toute fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ est nécessairemnt bornée sur ce segment puisque les fonctions en escalier sont elles-mêmes bornées.
2) Il est facile de voir que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et μ sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

En effet, donnons-nous $\varepsilon > 0$. S'il existe g et h en escalier sur $[a, b]$ vérifiant $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \leq \varepsilon$, alors il suffit de prendre $\varphi = (g + h)/2$ et $\mu = (h - g)/2$.
Réciproquement, si φ et μ sont en escalier sur $[a, b]$ et vérifient $|f - \varphi| \leq \mu$ et $\int_a^b \mu(x)\, dx \leq \varepsilon$, il suffit de prendre $g = (\varphi - \mu)/2$ et $h = \varphi + \mu)/2$.

N.B. Comme il ne sera question dans ce chapitre d'aucune autre intégrale que celle de Riemann, nous dirons "intégrable" au lieu de "intégrable au sens de Riemann ".

À chaque fonction f définie sur $[a, b]$, associons les deux ensembles suivants :

$$\mathcal{E}_-(f) := \left\{ g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) ; \; g \leq f \text{ sur } [a, b] \right\}$$

et

$$\mathcal{E}_+(f) := \big\{h \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\,;\;\; f \le h \text{ sur } [a,b]\big\}.$$

Posons

$$A_-(f) := \left\{ \int_a^b g(x)\,dx\,;\;\; g \in \mathcal{E}_-(f) \right\}$$

et

$$A_+(f) := \left\{ \int_a^b h(x)\,dx\,;\;\; h \in \mathcal{E}_+(f) \right\}.$$

Quels que soient $u \in A_-(f)$ et $v \in A_+(f)$, on a évidemment $u \le v$. D'autre part, les ensembles $\mathcal{E}_-(f)$ et $\mathcal{E}_+(f)$ sont tous deux non vides si et seulement si la fonction f est bornée. Dans ce cas, l'ensemble $A_-(f)$ est majoré par tout élément de $A_+(f)$ et possède donc une borne supérieure finie, que nous notons $I_-(f)$; de même l'ensemble $A_+(f)$ est minoré par tout élément de $A_-(f)$ et possède donc une borne inférieure finie, que nous notons $I_+(f)$. On a alors

$$u \le I_-(f) \le I_+(f) \le v$$

pour tout $u \in A_-(f)$ et tout $v \in A_+(f)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné. Si f est intégrable, il existe des éléments

$$u := \int_a^b g(x)\,dx \in A_-(f) \quad \text{et} \quad v := \int_a^b h(x)\,dx \in A_+(f)$$

vérifiant $v - u < \varepsilon$; on a donc l'égalité $I_-(f) = I_+(f)$.
Réciproquement, si on a $I_-(f) = I_+(f)$, les propriétés des bornes supérieure et inférieure entraînent l'existence d'un élément $u \in A_-(f)$ et d'un élément $v \in A_+(f)$ vérifiant

$$u > I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad v < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $v - u < \varepsilon$, ce qui prouve que f est intégrable. On a donc établi le résultat suivant.

Théorème 1.2.3 *À chaque fonction numérique f définie et bornée sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, associons l'ensemble $\mathcal{E}_+(f)$ (resp.*

$\mathcal{E}_-(f)$) constitué par les fonctions numériques en escalier majorant (resp. minorant) f sur $[a,b]$; et posons

$$I_-(f) := \sup_{g \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_+(f) := \inf_{h \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(x)\,dx.$$

Alors, pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ il faut et il suffit que l'on ait $I_-(f) = I_+(f)$.

Remarque 1.2.4 Si f est en escalier, les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ ont en commun l'élément f. On a alors

$$I_-(f) = I_+(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La fonction f est donc intégrable, et son intégrale est égale au nombre $I_-(f) = I_+(f)$.

À chaque fonction intégrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, associons le nombre $I_-(f) = I_+(f)$. D'après la remarque précédente, la fonction ainsi définie constitue un prolongement de la fonction $I : f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ définie sur l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 1.2.5 L'intégrale d'une fonction intégrable f sur $[a,b]$ est le nombre réel $I_-(f) = I_+(f)$. On le note $\int_a^b f(x)\,dx$.

À partir de la définition, nous allons déduire très facilement une première propriété fondamentale de l'intégrale.

Proposition 1.2.6 *Si f est une fonction positive et intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, son intégrale est positive (éventuellement nulle).*

Démonstration : Puisque f est positive sur $[a,b]$, la fonction nulle appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_-(f)$, donc $0 \in A_-(f)$, et on a

$$I_-(f) := \sup A_-(f) \geq 0,$$

d'où le résultat annoncé. □

1.2.7 Principaux exemples de fonctions intégrables

Proposition 1.2.8 *Toute fonction f numérique monotone sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable.*

Démonstration : Pour fixer les idées, supposons f croissante et considérons une subdivision de $[a,b]$ de la forme $(a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh)$, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant quelconque, et le nombre réel h défini par $a+nh=b$, c'est-à-dire $h=(b-a)/n$. Nous définissons deux fonctions g,h en escalier sur $[a,b]$ en posant, pour tout x appartenant à $[a+kh, a+(k+1)h[\quad (k=0,1,\ldots,n-1)$:

$$g(x)=f(a+kh), \quad h(x)=f(a+(k+1)h) \ \text{ et } \ g(b)=h(b)=f(b).$$

On a alors

$$g(x) \ \le \ f(x) \le h(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [a,b],$$

et

$$\int_a^b g(x)\,dx \ = \ h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)\,; \quad \int_a^b h(x)\,dx \ = \ h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh),$$

d'où

$$\int_a^b [h(x)-g(x)]\,dx \ = \ h[f(a+nh)-f(a)] = \frac{b-a}{n}\,[f(b)-f(a)];$$

et pour chaque $\varepsilon>0$ donné, on peut choisir n assez grand de manière à avoir

$$\frac{b-a}{n}\,[f(b)-f(a)] \ < \ \varepsilon;$$

d'où le résultat désiré. □

Proposition 1.2.9 *Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable.*

Démonstration : L'intervalle $[a, b]$ étant compact, on sait, d'après le théorème de Heine[6] (voir théorème A.2.8 de l'annexe) que la fonction f est uniformément continue sur cet intervalle. Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|y - x| < \eta$, on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
Considérons alors une subdivision $(a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b)$ de $[a, b]$, de pas inférieur à η, c'est-à-dire telle que le plus grand des nombres $a_i - a_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soit au plus égal à η. On obtient deux fonctions g, h, en escalier sur $[a, b]$ en posant

$$g(a_i) = h(a_i) = f(a_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

et

$$g(x) = f(a_i) - \varepsilon, \quad h(x) = f(a_i) + \varepsilon$$

pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Or la subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ a été choisie de manière que l'on ait $|f(x) - f(a_i| < \varepsilon$ pour tout x élément de $[a_{i-1}, a_i]$. On a donc, pour tout $x \in [a, b]$:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et

$$\int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b 2\,\varepsilon\, dx \;=\; 2\,\varepsilon\,(b - a).$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$. $\square$

On remarque que dans cette démonstration nous avons seulement utilisé le fait que la fonction f pouvait être approchée, à moins de ε près, par des fonctions en escalier. Cette remarque conduit à une généralisation importante : celle de fonction réglée.

Définition 1.2.10 Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *réglée* si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b]\,, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

6. HEINE Edouard (1821 -1881). Mathématicien allemand. Célèbre par ses travaux sur les fonctions spéciales et l'analyse réelle.

En donnant à ε une suite de valeurs tendant vers zéro, on voit immédiatement que cette définition équivaut à la suivante.

Définition 1.2.11 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *réglée* s'il existe une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Remarque 1.2.12 On dispose d'une caractérisation très utile des fonctions réglées (voir [1] p. 424) : *pour qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit réglée, il faut et il suffit que f admette une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.*

Théorème 1.2.13 *Toute fonction réglée sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable.*

Démonstration : f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite (f_n) de fonctions en escalier. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}.$$

Notons u le fonction égale à $\frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}$ sur $[a,b]$, et posons $h = f_{n_0} + u$ et $g = f_{n_0} - u$. Les fonctions g et h sont en escalier sur $[a,b]$ et vérifient

$$g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad \int_a^b [h(x) - g(x)]\,dx = \varepsilon.$$

On en conclut que f est intégrable sur $[a,b]$. □

Définition 1.2.14 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite au point a_i et une limite finie à gauche au point a_{i+1}.

On vérifie sans difficulté (voir [1]) que toute fonction par morceaux est réglée. On en déduit aussitôt le résultat important suivant.

Corollaire 1.2.15 *Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle compact* $[a,b]$ *est intégrable.*

Définition 1.2.16 Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur cet intervalle. On dit que f est *localement intégrable* sur I si f est intégrable sur tout segment inclus dans I.

Exemple 1.2.17 Toute fonction continue sur I est localement intégrable ; toute fonction monotone sur I est localement intégrable.

Le résultat qui suit est d'une grande utilité en pratique.

Proposition 1.2.18 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable sur* $]a,b[$ *et bornée sur* $[a,b]$. *Alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$.

Démonstration : Soit $M > 0$ tel que $|f(x)| \le M$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel suffisamment petit pour que $\varepsilon < (b-a)/2$. On sait que f est intégrable sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, donc il existe deux fonctions en escalier φ et μ sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ telles que

$$\forall x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon],\ \ |f(x)-\varphi(x)| \le \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \mu(x)\,dx \le \varepsilon.$$

Considérons alors les fonctions définies sur $[a,b]$ par

$$\psi(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [a, a+\varepsilon] \cup]b-\varepsilon, b] \\ \varphi(x) & \text{si} \quad x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \end{cases}$$

et

$$\eta(x) := \begin{cases} M & \text{si} \quad x \in [a, a+\varepsilon] \cup]b-\varepsilon, b] \\ \mu(x) & \text{si} \quad x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]. \end{cases}$$

Les fonctions ψ et η sont en escalier et vérifient $|f-\psi| \le \eta$ sur $[a,b]$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \eta(x)\,dx &= \int_a^{a+\varepsilon} M\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \mu(x)\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} M\,dx \\ &\le M\,\varepsilon + \varepsilon + M\,\varepsilon = (2M+1)\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est intégrable sur $[a,b]$. □

Corollaire 1.2.19 *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée sur* $[a,b]$ *et continue sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$*, alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$.

Démonstration : Quels que soient α, β vérifiant $a < \alpha < \beta < b$, la fonction f est continue sur l'intervalle compact $[\alpha, \beta]$, donc intégrable sur cet intervalle. □

Les deux résultats précédents vont nous permettre d'obtenir un exemple de fonction intégrable qui n'est pas réglée.

Exemple 1.2.20 (Fonction intégrable non réglée) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est intégrable car elle est manifestement bornée et admet l'origine comme seule discontinuité. Cependant, cette fonction n'est pas réglée puisque les limites à droite et à gauche de zéro n'existent pas. En effet, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$a_n \;=\; \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$$

est à valeurs dans $]0,1[$ et converge vers 0. Comme $f(a_n) = (-1)^n$ pour tout n, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc f n'admet pas de limite à droite en 0. Donc f n'est pas réglée sur $[0,1]$.

Exemple 1.2.21 (Fonction non intégrable). Soit f la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Désignons par (g,h) un couple quelconque de fonctions en escalier sur $[a,b]$, vérifiant $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a,b]$; et soit σ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fois à g et à h. Chaque intervalle de σ contient à son intérieur des valeurs rationnelles et des valeurs irrationnelles. À l'intérieur de tout intervalle de σ on a donc $g(x) \leq 0$ et $h(x) \geq 1$, d'où

$$\int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \;\geq\; b - a.$$

La fonction f n'est donc pas intégrable.

Le résultat qui suit permet de ramener la démonstration de propriétés des fonctions intégrables quelconques à celles de propriétés de fonctions en escalier ou de fonctions continues.

Théorème 1.2.22 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \le \varepsilon.$$

Démonstration : Pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx \le \varepsilon.$$

Or, si φ n'est pas continue, on peut construire une fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_a^b |g(x) - \varphi(x)|\, dx \le \varepsilon.$$

En effet, désignons par $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ les points de discontinuité de φ et par M un majorant de $|\varphi(x)|$ sur $[a, b]$. En modifiant au besoin la valeur de φ aux seuls points a et b, on peut supposer φ continue en ces points ; et on peut alors choisir un nombre $h > 0$, inférieur au plus petit des quatre nombres :

$$\frac{\varepsilon}{2pM}, \quad \inf_{2 \le i \le p} (a_i - a_{i-1}), \quad a_1 - a, \quad b - a_p.$$

Les intervalles $J_i = [a_i - h/2, a_i + h/2]$ sont disjoints et contenus dans $[a, b]$; et on obtient la fonction continue g cherchée en remplaçant φ sur chacun des intervalles J_i par la fonction affine prenant les mêmes valeurs que φ aux extrémités de J_i : en effet g est affine par morceaux, elle vérifie $|g(x) - \varphi(x)| \le 2\,M$ sur la réunion J des p intervalles J_i, et $g(x) = \varphi(x)$ sur $[a, b] \setminus J$; d'où

$$\int_a^b |g(x) - \varphi(x)|\, dx \le 2pMh \le \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

1.2.23 Interprétation géométrique de l'intégrale

La théorie de l'intégration est issue de la nécessité pratique de calculer l'aire d'une surface. Archimède [7] savait déjà évaluer l'aire d'une surface délimitée par une parabole et une droite. Ses calculs furent repris et développés au neuvième siècle par les savants arabes. Près de neuf siècles plus tard, Newton calcula l'aire d'une courbe $y = f(x)$ en inversant les opérations de dérivation (aujourd'hui on dirait : en utilisant la notion de primitive). À l'inverse, Leibniz interpréta les aires comme des sommes de rectangles infinitésimaux.

Si f est une fonction positive en escalier sur $[a, b]$, l'ensemble plan D_f défini par

$$D_f \ := \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,; \ \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est une réunion de rectangles ; et l'intégrale de f sur $[a, b]$ est égale à la somme des aires de ces rectangles. On peut donc convenir de dire que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'aire de l'ensemble D_f. Lorsque nous aurons précisé la notion intuitive d'aire au moyen d'intégrales doubles (voir chapitre 5), nous verrons que cette égalité reste vraie lorsque f est une fonction positive intégrable quelconque sur $[a, b]$. Nous admettrons provisoirement ce résultat, ce qui revient à poser la définition suivante.

Définition 1.2.24 Soit D un domaine plan défini par des inégalités de la forme :

$$a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)$$

où f est une fonction positive intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. On appelle *l'aire* de D, le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$.

7. ARCHIMÈDE de Syracuse. Né vers 287 avant J.-C. et mort en 212 avant J.-C. Mathématicien, physicien et ingénieur grec, il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité. Ses contributions furent nombreuses, variées et profondes. Il a notamment calculé l'aire sous un arc de parabole à l'aide de la somme d'une série et a donné un encadrement de π d'une remarquable précision. Il a également obtenu des formules pour les volumes des surfaces de révolution ainsi qu'un système ingénieux pour l'expression de très grand nombres.

Le chapitre 5 sera consacré aux intégrales de Riemann multiples et nous pourrons en particulier y justifier la définition ci-dessus et l'étendre à des domaines plus généraux.