# Table des matières

# Préface [1]

Cet ouvrage présente tous les outils mathématiques utiles à l'ingénieur, dans le langage des ingénieurs. L'éventail des chapitres abordés, la clarté de l'exposé (des notions élémentaires aux thèmes les plus pointus), la référence à la physique et la diversité des applications proposées en font un ouvrage de référence complet, indispensable tant à l'étudiant (à partir de la troisième année de Licence, le capes, les masters de mathématiques, l'agrégation de mathématiques et à l'ingénieur des écoles polytechniques) qu'au professionnel. Il aborde dix thèmes, répartis en trois tomes :

*Tome1*

1. l'analyse réelle.
2. l'analyse complexe.
3. Table des transformées de Laplace
4. Mathématiciens

   *Tome2*
5. Algèbre
6. Fonctions de plusieurs variables
7. Géométrie
8. Equations différentielles
9. Analyse numérique
10. Courbes remarquables
11. Mathématiciens

    *Tome3*
12. L'analyse fonctionnelle.
13. Les probabilités.
14. Les statistiques.

1. Travail réalisé sous WinEdt/MiKTex LaTeXet Scientific WorkPlace, Les courbes ont été tracées à l'aide de Graph easy et Paint.

15. Mathématiciens

C'est le fruit de plusiers années années de travail pour les écoles d'ingénieurs. De nombreux exercices, problèmes et des qcm permettent de se familiariser avec les outils et techniques mathématiques introduits, ils sont présentés avec une solution, une aide progressive ou une indication. Les exemples d'application couvrent tous les domaines : les matrices, la théorie des champs, le calcul vectoriel, les quaternions, les fonctions de Bessel, les polynômes orthogonaux. Des fonctions de Green sont explicitement calculées dans le cadre des équations aux dérivées partielles de la conduction de la chaleur, les tables des transformées de Fourier, transformées de Fourier en sinus et en cosinus et transformée de Laplace accampagnéé d'un dictionnaire trés complet, lois usuelles en probabilités, statistiques et tables statistiques.Tous les mathématiciens cités dans ce livre ont une biographie détaillée.

Je tiens à remercier tout particulièrement les professeurs : Dellacherie Claude directeur de recherche dans le laboratoire de mathématiques de l'université de Rouen et Goglu Roger professeur à l'institut national des sciences appliquées de Rouen pour avoir bien voulu lire le manuscrit et les conseils qu'ils m'ont prodigués, à Mr Fauvernier Philippe directeur des éditions Hermann pour ses encouragements, et à ma famille : Corinne , Clément et mes parents.

# Première partie

# Algèbre et Arithmétique

# Chapitre 1

# Ensembles et logique mathématique

## 1.1 Éléments de logique mathématique

**Définition 1.1.1** *Les propositions sont des assemblages de symboles et de lettres formés en suivant certaines règles de syntaxe. Les symboles de base du calcul des propositions sont appelés connecteurs, ils servent essentiellement à créer de nouvelles propositions à partir de propositions déjà créées. Dans le calcul des propositions, les propositions de base que l'on appelle aussi les variables propositionnelles n'ont pas de contenu (n'ont pas de signification) a priori. On peut remplacer une variable propositionnelle par ≪il pleut≫, mais ce n'est pas le contenu météorologique qui intéresse le logicien, mais la façon dont les propositions de base sont combinées pour construire des raisonnements.*

**Connecteurs les plus fréquents :**

**Définition 1.1.2** *La disjonction de deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ou ≪ $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ≫ qui est vraie si l'une au moins des deux propositions est vraie, et fausse si les deux propositions sont fausses.*

**Définition 1.1.3** *La négation d'une proposition $\mathcal{P}$, est la proposition notée $\neg\mathcal{P}$, ou ≪ non $\mathcal{P}$ ≫ qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.*

À partir de ces deux connecteurs, on peut construire d'autres connecteurs :

**Définition 1.1.4** *La conjonction de deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition suivante :*

$$\neg((\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})).$$

*C'est-à-dire non ( (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$) ) Celle-ci est notée :*

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \text{ ou } \ll \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \gg$$

*et n'est vraie que lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies et fausse si l'une des deux propositions est fausse.*

**Définition 1.1.5** *L'implication de $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{P}$ est la proposition :*

$$(\neg\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q},$$

*notée $\ll \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \gg$ ou $\ll$ $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ $\gg$, et qui est fausse seulement si $\mathcal{P}$ est une proposition vraie et $\mathcal{Q}$ fausse.*

**Définition 1.1.6** *L'équivalence logique de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition $((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}))$ ( (($\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$) )), notée « $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ » ou ($\mathcal{P}$ est équivalent à $\mathcal{Q}$), et qui n'est vraie que si les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont même valeur de vérité.*

**Définition 1.1.7** *Le ou exclusif ou disjonction exclusive de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition $\mathcal{P} \vee \vee \mathcal{Q}$ (parfois aussi notée : $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ ou encore : $\mathcal{P}|\mathcal{Q}$) qui correspond à $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$, c'est-à-dire en français : soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$ (mais pas les deux à la fois). Le ou exclusif de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ correspond à $\mathcal{P} \Leftrightarrow \neg\mathcal{Q}$ ou encore à $\neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$. Cette proposition n'est vraie que si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont des valeurs de vérités distinctes.*

Une caractéristique du calcul propositionnel dit « classique » est que toutes les propositions envisageables peuvent s'exprimer à partir de deux connecteurs : par exemple $\vee$ et $\neg$ (ou et non). Mais d'autres choix sont possibles : ainsi, $\Rightarrow$ (implication) et $\perp$ (faux). On sait aussi que l'on peut aussi n'utiliser qu'un seul connecteur, le symbole de Sheffer [1] $\ll \; | \gg$, appelé $\ll$ stroke $\gg$ par son concepteur et appelé aujourd'hui Nand par les concepteurs de circuits ; on peut aussi n'utiliser que le connecteur Nor.

1. *Sheffer (Henry Maurice Sheffer (1882-1964) est un logicien américain) a prouvé en 1913 que l'algèbre booléenne peut être définie à l'aide d'un seul opérateur binaire, NAND, ou son dual NOR. De même, le calcul des propositions peut être formulé au moyen d'un seul connecteur, la « barre de Sheffer », qui a la même table de vérité que le NAND logique. Charles Peirce (Charles Sanders Peirce (10 septembre 1839 - 19 avril 1914) est un sémiologue et philosophe américain) avait découvert ces faits en 1880 ; mais son texte n'a pas été publié avant 1933.*

**Le calcul des prédicats :**

Il est également possible de construire à partir d'une proposition $\mathcal{P}$, d'autres propositions en remplaçant un objet mathématique indéterminé $x$ dans la proposition partout où il intervient, par un autre objet mathématique $a$.

Par exemple, la proposition $\mathcal{P}$ : ≪ 8 est un nombre pair ≫, peut être représentée sous la forme $\mathcal{P}(8)$, où $\mathcal{P}$ est le prédicat ≪ est un nombre pair ≫, et 8 est son argument.

Ou par exemple, la proposition ≪ Les droites $D$ et $D'$ sont parallèles ≫ peut être représentée sous la forme $\mathcal{P}\{D, D'\}$ où $\mathcal{P}$ est le prédicat ≪ sont parallèles ≫ et les droites $D$ et $D'$ sont les arguments.

Si $\mathcal{P}$ est une proposition, $x$ un objet indéterminé, et $a$ un objet mathématique, l'assemblage obtenu en remplaçant $x$ par $a$ dans $\mathcal{P}$ est encore une proposition notée : $(a|x)\mathcal{P}$

et s'appelle proposition obtenue par substitution de $x$ à $a$ dans $\mathcal{P}$.

Pour mettre en évidence un objet indéterminé $x$ dans une proposition $\mathcal{P}$, on écrit la proposition sous la forme $\mathcal{P}(x)$ ; et on note $\mathcal{P}(a)$ la proposition $(a|x)\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}$ une proposition, $x$ un objet indéterminé, et $a$ un objet mathématique donné. Si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{P}(a)$ est vraie.

Et tout cela se généralise au cas de plusieurs objets indéterminés.

**Les quantificateurs :**

Il existe encore un autre procédé logique, permettant de construire d'autres propositions à partir d'une proposition.

Soit une proposition $\mathcal{P}$ et $x$ un objet indéterminé. Nous pouvons considérer la proposition :

il existe un objet $a$, tel que $\mathcal{P}(a)$ soit vraie c'est-à-dire, il existe un objet $a$, tel que $\mathcal{P}(a)$ soit vraie ≪ il existe un objet ≫ signifie intuitivement ≪ nous pouvons trouver au moins un objet ≫.

Symboliquement, nous écrivons :

$\exists a\mathcal{P}$ ou $\exists a\ \mathcal{P}(a)$, ce qui se lit : ≪ il existe $a$ tel que $\mathcal{P}$ ≫. Ce signe $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

Nous définissons, à partir de $\exists$ le symbole $\forall$ :

Soit $\mathcal{P}$ une proposition et $x$ un objet indéterminé, la proposition notée $\forall x\mathcal{P}$ est la proposition $\neg(\exists x\neg\mathcal{P})$ et se lit ≪ pour tout $x, \mathcal{P}$ ≫ ou

≪ quel que soit $x$, on a $\mathcal{P}$ vraie ≫ $\forall$ s'appelle le quantificateur universel.

Évidemment, la proposition $(\forall x\mathcal{P})$ est fausse si et seulement si $(\exists x\neg\ \mathcal{P})$ est vraie.

**Propriétés :**

1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions et $x$ un objet indéterminé.

   $\neg(\exists x\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\forall x\neg\mathcal{P})$.

$(\forall x)(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\forall x)\mathcal{P} \wedge (\forall x)\mathcal{Q})$.

$(\forall x)\mathcal{P} \vee (\forall x)\mathcal{Q} \;\Rightarrow\; (\forall x)(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ (L'implication réciproque est fausse en général).

$(\exists x)(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\exists x)\mathcal{P} \vee (\exists x)\mathcal{Q})$.

$(\exists x)(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \;\Rightarrow\; ((\exists x)\mathcal{P} \wedge (\exists x)\mathcal{Q})$ (L'implication réciproque est fausse en général).

2. Soient $\mathcal{P}$ une proposition et $x$ et $y$ des objets indéterminés.

   $(\forall x)(\forall y)\mathcal{P} \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\mathcal{P}$.

   $(\exists x)(\exists y)\mathcal{P} \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\mathcal{P}$.

   $(\exists x)(\forall y)\mathcal{P} \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\mathcal{P}$ (L'implication réciproque est fausse en général).

La dernière implication dit que s'il existe un $x$, tel que pour tout $y$, on ait $\mathcal{P}$ vraie, alors pour tout $y$, il existe bien un $x$ (celui obtenu avant) tel que $\mathcal{P}$ soit vraie.

Intuitivement, l'implication réciproque est fausse en général, parce que si pour chaque $y$, il existe un $x$ tel que$\mathcal{P}$ soit vraie, ce $x$ pourrait dépendre de $y$ et varier suivant $y$. Ce $x$ pourrait donc ne pas être le même pour tout $y$ tel que $\mathcal{P}$ soit vraie.