

Table des matières

I Algèbre et Arithmétique	1
1 Ensembles et logique mathématique	3
1.1 Éléments de logique mathématique	3
1.2 Ensembles	6
1.3 Relation d'équivalence et ensemble quotient	17
1.4 Relation d'ordre	17
1.5 L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N}	18
1.6 Dénombrement et analyse combinatoire	26
1.7 Exercices	31
2 Groupe, anneau, corps.	35
2.1 Structure algébrique	35
2.2 Action d'un groupe, orbite et stabilisateur	41
2.3 Anneau	46
2.4 Corps	48
3 Les anneaux \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	49
3.1 L'anneau \mathbb{Z}	49
3.2 Division euclidienne, PPCM et PGCD	50
3.3 Théorème de Bézout	54
3.4 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	58
3.5 Equations de congruence	61
3.6 Indicatrice d'Euler	65
3.7 Exercices	69
4 Groupe des permutations	75
4.1 groupe symétrique d'un ensemble à n éléments	75
4.2 Orbites et cycles	75
4.3 Le groupe alterné	82
4.4 Exercices	87

5	Les p-sous groupes et groupes de Sylow	91
5.1	Premier théorème de Sylow	91
5.2	Second théorème de Sylow	93
5.3	Exercices	99
6	Espaces vectoriels et algèbre.	101
6.1	Définition	101
6.2	Espace vectoriel quotient	102
6.3	Base et dimension d'un espace vectoriel	102
6.4	Codimension	104
6.5	Rang, image et noyau d'une application linéaire	105
6.6	Somme directe d'espaces vectoriels	105
6.7	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel et projecteur	106
6.8	Lien entre espaces supplémentaires et espace quotient	107
6.9	Théorème du rang	108
6.10	Inverse d'une application linéaire	109
6.11	Dualité, base duale	110
6.12	Bidualité	112
6.13	Transposée d'une application linéaire	113
6.14	Orthogonalité	113
6.15	Algèbre	115
6.16	Exercice	116
7	Polynôme à une indéterminée et fractions rationnelles	117
7.1	Définition	117
7.2	Le degré d'un polynôme	118
7.3	Division euclidienne	119
7.4	Idéaux de $\mathbb{K}[X]$	120
7.5	PGCD et théorème de Bezout	121
7.6	Plus petit multiple commun : PPCM	124
7.7	Polynôme irréductible	125
7.8	Multiplicité d'une racine	127
7.9	Relation entre les racines et les coefficients	128
7.10	Formules de Newton	128
7.11	Discriminant d'un polynôme	130
7.12	Polynôme du troisième degré	137
7.13	Fractions rationnelles	138
7.14	Exercices	139

8	Matrices	141
8.1	Définition	141
8.2	Addition des matrices et multiplication par un scalaire	141
8.3	Produit de deux matrices	142
8.4	Matrice unité	142
8.5	Transposition	142
8.6	Endomorphisme associé à une matrice	143
8.7	Matrices équivalentes	144
8.8	Matrices semblables	144
8.9	Déterminants	144
8.10	Cofacteur	146
8.11	Caractérisation des déterminants	146
8.12	Inverse d'une matrice	150
8.13	Déterminant de Vandermonde	151
8.14	Application	152
8.15	Calcul des solutions d'un système compatible	153
8.16	Valeurs propres et vecteurs propres	154
8.17	Polynôme caractéristique	154
8.18	Endomorphisme diagonalisable	157
8.19	Polynôme minimal	160
8.20	Exemple	161
8.21	Exemple	162
8.22	Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent	165
8.23	Exemple	168
8.24	Une condition nécessaire et suffisante de trigonalisation	169
8.25	Exemple de trigonalisation	171
8.26	Décomposition de Dunford-Schwarz	171
8.27	Matrice hermitienne ou hermitique	174
8.28	Exemples	175
8.29	Matrice symétrique réelle	175
8.30	Matrice auto-adjointe	176
8.31	Matrice définie positive	176
8.32	Exemple	178
8.33	Exemples autour des matrices	178
8.34	Décomposition de Cholesky.	182
8.35	Matrice unitaire	184
8.36	Forme quadratique	187
8.37	Matrice d'une isométrie	189
8.38	Norme d'une matrice	193
8.39	Matrice non négative	198

8.40	Disque de Gerschgorin	208
8.41	Matrice de forme particulière	211
8.42	Exercices	212
II Fonctions de plusieurs variables		219
9	Fonctions de plusieurs variables	221
9.1	Continuité	221
9.2	Dérivées partielles	224
9.3	Différentielle	225
9.4	Dérivées d'ordre supérieur	227
9.5	Développement de Taylor-McLaurin à l'ordre deux	230
9.6	Fonction implicite	230
9.7	Théorème des accroissements finis	232
9.8	Extrêma locaux et absolus	233
9.9	Conditions suffisantes du second ordre pour un extremum global	234
9.10	Extrêma sous contraintes. Multiplicateurs de Lagrange	239
9.11	Extrêma sous contraintes en forme d'inégalités	243
9.12	Théorème de Kühn-Tucker	244
9.13	Critère de la hessienne bordée	247
9.14	Exercices	249
III Géométrie différentielle		251
10	Orientation d'un espace vectoriel euclidien	253
10.1	Espace affine	253
10.2	Orientation, produit mixte	255
10.3	Produit vectoriel	257
10.4	Exercices	261
11	Courbes dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	263
11.1	Etude globale des courbes paramétriques ou cartésiennes	263
11.2	Exemple	270
11.3	Courbes unicursales	272
11.4	Exemple	272
11.5	Trochoïde en paramétrisation complexe	274
11.6	Equations catésiennes , paramétriques et polaires des coniques	278

12 Théorie des courbes	283
12.1 Paramétrisation normale d'une courbe	283
12.2 Repère de Frenet en dimension deux	284
12.3 Repère de Frenet en dimension trois	287
12.4 Binormale, Normale, Tangente , Courbure et Torsion	289
12.5 Exemple	293
12.6 Enveloppe d'une famille de droites	294
12.7 Développée d'une courbe	296
12.8 Représentation de courbes en coordonnées polaires	299
12.9 Exercices	304
IV Équations différentielles	307
13 Équations différentielles linéaires	309
13.1 Présentation	309
13.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1	310
13.3 Méthode de la variation de la constante	313
14 Equations différentielles non-linéaires	315
14.1 Approximations successives pour $y' = f(x, y)$	315
14.2 La condition de Lipschitz	317
15 Exemples d'équations différentielles non linéaires remarquables	319
15.1 Fonction homogène, équation différentielle homogène	319
15.2 Equation de Bernoulli	322
15.3 Equations différentielles à variables séparables	322
15.4 Equations aux différentielles totales exactes	323
15.5 Facteur intégrant	326
16 Équations différentielles ordinaires	329
16.1 Déterminant de Wronski	329
16.2 Exemple : équations différentielles linéaires d'ordre deux.	332
16.3 Les théorèmes d'oscillation	343
17 Equation différentielles de Bessel	353
18 Principaux types d'équations de la physique mathématique	359
18.1 Equation des ondes ou équation du type hyperbolique	359
18.2 Equation de la chaleur, Equation de Fourier ou du type parabolique	359
18.3 Equation de Laplace ou du type elliptique	360
18.4 Méthode de Fourier	360

18.5	Résolution du problème de Dirichlet pour le cercle	362
19	Equation linéaire intégrale	365
19.1	Equation différentielle de Fredholm	365
19.2	Exemples	367
19.3	Méthode de résolution par approximation	370
19.4	Autres transformations	371
19.5	Exercices	373
V	Analyse numérique	377
20	Travaux pratiques sur Matlab	379
20.1	Matrices et vecteurs	379
20.2	Les fichiers script et les fonctions	386
20.3	Représentation graphique.	390
20.4	Calculs sur les polynômes	392
20.5	Les boucles for, if et while	392
21	Conditionnement de matrices	397
21.1	Conditionnement	397
21.2	Exemple Matlab	400
21.3	Exercices	402
22	Interpolation	405
22.1	Interpolation par un polynôme	405
22.2	Différences divisées	407
22.3	Exemple Matlab	412
22.4	Schéma de Neville-Aitken	412
22.5	Interpolation aux points équidistants	414
22.6	Interpolation aux points de Tchebycheff	415
22.7	Exemple Matlab	416
22.8	Interpolation des fonctions analytiques	416
22.9	Phénomène de Runge	419
22.10	Interpolation par fonction spline cubique	423
22.11	Exemple Matlab	427
22.12	Exercice	429
22.13	Intérpolation par une fraction rationnelle	431
22.14	Exemple Matlab	433

VI Courbes remarquables	437
Index	445
Bibliographie	453

Préface ¹

Cet ouvrage présente tous les outils mathématiques utiles à l'ingénieur, dans le langage des ingénieurs. L'éventail des chapitres abordés, la clarté de l'exposé (des notions élémentaires aux thèmes les plus pointus), la référence à la physique et la diversité des applications proposées en font un ouvrage de référence complet, indispensable tant à l'étudiant (à partir de la troisième année de Licence, le capes, les masters de mathématiques, l'agrégation de mathématiques et à l'ingénieur des écoles polytechniques) qu'au professionnel. Il aborde dix thèmes, répartis en trois tomes :

Tome1

1. l'analyse réelle.
2. l'analyse complexe.
3. Table des transformées de Laplace
4. Mathématiciens

Tome2

5. Algèbre
6. Fonctions de plusieurs variables
7. Géométrie
8. Equations différentielles
9. Analyse numérique
10. Courbes remarquables
11. Mathématiciens

Tome3

12. L'analyse fonctionnelle.
13. Les probabilités.
14. Les statistiques.

1. Travail réalisé sous WinEdt/MiKTeX \LaTeX et Scientific WorkPlace, Les courbes ont été tracées à l'aide de Graph easy et Paint.

15. Mathématiciens

C'est le fruit de plusieurs années années de travail pour les écoles d'ingénieurs. De nombreux exercices, problèmes et des qcm permettent de se familiariser avec les outils et techniques mathématiques introduits, ils sont présentés avec une solution, une aide progressive ou une indication. Les exemples d'application couvrent tous les domaines : les matrices, la théorie des champs, le calcul vectoriel, les quaternions, les fonctions de Bessel, les polynômes orthogonaux. Des fonctions de Green sont explicitement calculées dans le cadre des équations aux dérivées partielles de la conduction de la chaleur, les tables des transformées de Fourier, transformées de Fourier en sinus et en cosinus et transformée de Laplace accompagné d'un dictionnaire très complet, lois usuelles en probabilités, statistiques et tables statistiques. Tous les mathématiciens cités dans ce livre ont une biographie détaillée.

Je tiens à remercier tout particulièrement les professeurs : Dellacherie Claude directeur de recherche dans le laboratoire de mathématiques de l'université de Rouen et Goglu Roger professeur à l'institut national des sciences appliquées de Rouen pour avoir bien voulu lire le manuscrit et les conseils qu'ils m'ont prodigués, à Mr Fauvernier Philippe directeur des éditions Hermann pour ses encouragements, et à ma famille : Corinne , Clément et mes parents.

Première partie

Algèbre et Arithmétique

Chapitre 1

Ensembles et logique mathématique

1.1 Éléments de logique mathématique

Définition 1.1.1 *Les propositions sont des assemblages de symboles et de lettres formés en suivant certaines règles de syntaxe. Les symboles de base du calcul des propositions sont appelés connecteurs, ils servent essentiellement à créer de nouvelles propositions à partir de propositions déjà créées. Dans le calcul des propositions, les propositions de base que l'on appelle aussi les variables propositionnelles n'ont pas de contenu (n'ont pas de signification) a priori. On peut remplacer une variable propositionnelle par «il pleut», mais ce n'est pas le contenu météorologique qui intéresse le logicien, mais la façon dont les propositions de base sont combinées pour construire des raisonnements.*

Connecteurs les plus fréquents :

Définition 1.1.2 *La disjonction de deux propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} est la proposition notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ou « \mathcal{P} ou \mathcal{Q} » qui est vraie si l'une au moins des deux propositions est vraie, et fausse si les deux propositions sont fausses.*

Définition 1.1.3 *La négation d'une proposition \mathcal{P} , est la proposition notée $\neg\mathcal{P}$, ou «non \mathcal{P} » qui est vraie lorsque \mathcal{P} est fausse et fausse lorsque \mathcal{P} est vraie.*

À partir de ces deux connecteurs, on peut construire d'autres connecteurs :

Définition 1.1.4 La conjonction de deux propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} est la proposition suivante :

$$\neg((\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})).$$

C'est-à-dire non ((non \mathcal{P}) ou (non \mathcal{Q})) Celle-ci est notée :

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \text{ ou } \ll \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \gg$$

et n'est vraie que lorsque \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont vraies et fausse si l'une des deux propositions est fausse.

Définition 1.1.5 L'implication de \mathcal{Q} par \mathcal{P} est la proposition :

$$(\neg\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q},$$

notée $\ll \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \gg$ ou $\ll \mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q} \gg$, et qui est fausse seulement si \mathcal{P} est une proposition vraie et \mathcal{Q} fausse.

Définition 1.1.6 L'équivalence logique de \mathcal{P} et \mathcal{Q} est la proposition $((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}))$ ((\mathcal{P} implique \mathcal{Q}) et (\mathcal{Q} implique \mathcal{P})), notée $\ll \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \gg$ ou (\mathcal{P} est équivalent à \mathcal{Q}), et qui n'est vraie que si les deux propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} ont même valeur de vérité.

Définition 1.1.7 Le ou exclusif ou disjonction exclusive de \mathcal{P} et \mathcal{Q} est la proposition $\mathcal{P} \vee \vee \mathcal{Q}$ (parfois aussi notée : $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ ou encore : $\mathcal{P} | \mathcal{Q}$) qui correspond à $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$, c'est-à-dire en français : soit \mathcal{P} , soit \mathcal{Q} (mais pas les deux à la fois). Le ou exclusif de \mathcal{P} et \mathcal{Q} correspond à $\mathcal{P} \Leftrightarrow \neg\mathcal{Q}$ ou encore à $\neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$. Cette proposition n'est vraie que si \mathcal{P} et \mathcal{Q} ont des valeurs de vérités distinctes.

Une caractéristique du calcul propositionnel dit « classique » est que toutes les propositions envisageables peuvent s'exprimer à partir de deux connecteurs : par exemple \vee et \neg (ou et non). Mais d'autres choix sont possibles : ainsi, \Rightarrow (implication) et \perp (faux). On sait aussi que l'on peut aussi n'utiliser qu'un seul connecteur, le symbole de Sheffer¹ $\ll | \gg$, appelé « stroke » par son concepteur et appelé aujourd'hui Nand par les concepteurs de circuits ; on peut aussi n'utiliser que le connecteur Nor.

1. Sheffer (Henry Maurice Sheffer (1882-1964) est un logicien américain) a prouvé en 1913 que l'algèbre booléenne peut être définie à l'aide d'un seul opérateur binaire, NAND, ou son dual NOR. De même, le calcul des propositions peut être formulé au moyen d'un seul connecteur, la « barre de Sheffer », qui a la même table de vérité que le NAND logique. Charles Peirce (Charles Sanders Peirce (10 septembre 1839 - 19 avril 1914) est un sémiologue et philosophe américain) avait découvert ces faits en 1880 ; mais son texte n'a pas été publié avant 1933.

Le calcul des prédicats :

Il est également possible de construire à partir d'une proposition \mathcal{P} , d'autres propositions en remplaçant un objet mathématique indéterminé x dans la proposition partout où il intervient, par un autre objet mathématique a .

Par exemple, la proposition \mathcal{P} : « 8 est un nombre pair », peut être représentée sous la forme $\mathcal{P}(8)$, où \mathcal{P} est le prédicat « est un nombre pair », et 8 est son argument.

Ou par exemple, la proposition « Les droites D et D' sont parallèles » peut être représentée sous la forme $\mathcal{P}\{D, D'\}$ où \mathcal{P} est le prédicat « sont parallèles » et les droites D et D' sont les arguments.

Si \mathcal{P} est une proposition, x un objet indéterminé, et a un objet mathématique, l'assemblage obtenu en remplaçant x par a dans \mathcal{P} est encore une proposition notée : $(a|x)\mathcal{P}$

et s'appelle proposition obtenue par substitution de x à a dans \mathcal{P} .

Pour mettre en évidence un objet indéterminé x dans une proposition \mathcal{P} , on écrit la proposition sous la forme $\mathcal{P}(x)$; et on note $\mathcal{P}(a)$ la proposition $(a|x)\mathcal{P}$.

Soit \mathcal{P} une proposition, x un objet indéterminé, et a un objet mathématique donné. Si \mathcal{P} est vraie, alors $\mathcal{P}(a)$ est vraie.

Et tout cela se généralise au cas de plusieurs objets indéterminés.

Les quantificateurs :

Il existe encore un autre procédé logique, permettant de construire d'autres propositions à partir d'une proposition.

Soit une proposition \mathcal{P} et x un objet indéterminé. Nous pouvons considérer la proposition :

il existe un objet a , tel que $\mathcal{P}(a)$ soit vraie c'est-à-dire, il existe un objet a , tel que $\mathcal{P}(a)$ soit vraie « il existe un objet » signifie intuitivement « nous pouvons trouver au moins un objet ».

Symboliquement, nous écrivons :

$\exists a\mathcal{P}$ ou $\exists a \mathcal{P}(a)$, ce qui se lit : « il existe a tel que \mathcal{P} ». Ce signe \exists s'appelle le quantificateur existentiel.

Nous définissons, à partir de \exists le symbole \forall :

Soit \mathcal{P} une proposition et x un objet indéterminé, la proposition notée $\forall x\mathcal{P}$ est la proposition $\neg(\exists x\neg\mathcal{P})$ et se lit « pour tout x , \mathcal{P} » ou

« quel que soit x , on a \mathcal{P} vraie » \forall s'appelle le quantificateur universel.

Évidemment, la proposition $(\forall x\mathcal{P})$ est fausse si et seulement si $(\exists x\neg\mathcal{P})$ est vraie.

Propriétés :

1. Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions et x un objet indéterminé.

$$\neg(\exists x\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\forall x\neg\mathcal{P}).$$

$$(\forall x)(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\forall x)\mathcal{P} \wedge (\forall x)\mathcal{Q}).$$

$(\forall x)\mathcal{P} \vee (\forall x)\mathcal{Q} \Rightarrow (\forall x)(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ (L'implication réciproque est fausse en général).

$$(\exists x)(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\exists x)\mathcal{P} \vee (\exists x)\mathcal{Q}).$$

$(\exists x)(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Rightarrow ((\exists x)\mathcal{P} \wedge (\exists x)\mathcal{Q})$ (L'implication réciproque est fausse en général).

2. Soient \mathcal{P} une proposition et x et y des objets indéterminés.

$$(\forall x)(\forall y)\mathcal{P} \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\mathcal{P}.$$

$$(\exists x)(\exists y)\mathcal{P} \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\mathcal{P}.$$

$(\exists x)(\forall y)\mathcal{P} \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\mathcal{P}$ (L'implication réciproque est fausse en général).

La dernière implication dit que s'il existe un x , tel que pour tout y , on ait \mathcal{P} vraie, alors pour tout y , il existe bien un x (celui obtenu avant) tel que \mathcal{P} soit vraie.

Intuitivement, l'implication réciproque est fausse en général, parce que si pour chaque y , il existe un x tel que \mathcal{P} soit vraie, ce x pourrait dépendre de y et varier suivant y . Ce x pourrait donc ne pas être le même pour tout y tel que \mathcal{P} soit vraie.