Table des matières

Introduction

> « *Une idée très compliquée est plus légitime qu'une simple, car les choses sont aussi compliquées qu'on le voudra [...] Mais une idée très compliquée est très rare ; antipathique à l'esprit, et au langage.[...] Le sens de l'utile a donc fait la bonne réputation du simple.* »
>
> Paul Valéry, *Tel quel*

La première vertu d'une équation n'est pas d'être soluble mais d'avoir une solution, et de préférence une seule. La position d'un point matériel en mécanique, les populations de deux espèces interagissant en biologie, le courant circulant dans un circuit électrique, les concentrations des produits d'une réaction chimique sont autant d'inconnues dont l'évolution est modélisée par des équations différentielles. Garantir que ces modèles sont déterministes, c'est d'abord s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution. C'est aussi bien souvent renoncer à calculer cette solution, du moins de manière exacte.

Les équations logistique, de la poursuite, de la chute, celles d'un oscillateur harmonique amorti ou d'un vecteur tournant sont parmi les équations résolues dans les deux premières parties de ce livre. Il s'agit soit d'équations différentielles d'ordre un dont la résolution se ramène à un calcul de primitives, soit d'équations différentielles linéaires résolues en diagonalisant ou trigonalisant une matrice. Le lecteur trouvera dans les recueils [1, 7] de nombreux autres exemples de résolutions explicites. Mais loin s'en faut bien sûr qu'on sache toujours calculer une intégrale ni réduire une matrice.

Que faire d'une équation différentielle si ce n'est la résoudre ? Étudier les conditions d'existence et d'unicité des solutions, leur régularité et leur durée de vie. C'est l'objet de la première partie (LE PROBLÈME DE CAUCHY).

Dans la deuxième partie consacrée aux ÉQUATIONS LINÉAIRES, le principe de superposition permet de préciser la structure de l'ensemble des solutions, et la formule de variation de la constante d'étudier la manière dont cette solution dépend du second membre de l'équation.

La troisième partie (STABILITÉ) s'intéresse au comportement asymptotique des solutions. S'y dégage le rôle crucial joué d'un côté par les points d'équilibre : une solution initialement voisine sera-t-elle attirée par ce point, en restera-t-elle voisine ou s'éloignera-t-elle ? De l'autre côté par les équations linéaires : le plus souvent, la linéarisation d'une équation au voisinage d'un point d'équilibre suffira à déterminer sa stabilité. La modélisation ou la géométrie d'un problème peuvent aussi suggérer une autre approche : construire une quantité conservée (une énergie, un moment cinétique, une distance, etc) ou plus généralement une fonction de Liapounov.

Nombre de modèles dépendent de paramètres : une masse en mécanique, une résistance en électricité, un taux de natalité en dynamique des populations, un coefficient stœchiométrique en chimie, etc. Une variation de ces paramètres peut changer tant le nombre que la stabilité des points d'équilibre : ces bifurcations sont étudiées à la fin de la troisième partie. Dans la quatrième partie, nous examinons la SENSIBILITÉ des solutions aux paramètres ou aux conditions initiales. Dans quelle mesure une solution exacte d'une équation approchée est-elle une solution approchée d'une équation exacte ? Cette question débouche sur le calcul de perturbation et sur les algorithmes de résolution numérique d'une équation différentielle.

Dans la dernière partie (SOLUTIONS PÉRIODIQUES), nous nous intéressons aux phénomènes oscillatoires. Après avoir étudié les équations linéaires à coefficients périodiques (théorie de Floquet et résonance paramétrique), nous abordons la stabilité orbitale : de même qu'un point d'équilibre, un cycle peut être attractif, stable ou instable. Nous concluons sur des aspects topologiques liés aux ensembles limites : le principe d'invariance de Lasalle et le théorème de Poincaré-Bendixson, prémisse aux systèmes dynamiques.

Pour traiter de ces questions, l'exposé s'appuie principalement sur le bagage d'un étudiant en mathématiques après deux années de licence. Les théorèmes sont démontrés et illustrés par de nombreux exemples, figures et exercices corrigés. Nous avons rappelé ou précisé en annexe des éléments d'algèbre linéaire et de calcul différentiel nécessaires. Le lecteur trouvera aussi en fin d'ouvrage une bibliographie renvoyant notamment à quelques exposés théoriques classiques tels que [8, 12] et à d'autres plus orientés vers l'analyse numérique [5, 4, 3] ou la modélisation [15].

Nous voulons remercier *Volkan Güloğlu* qui réalisa si patiemment tant de figures illustrant cet ouvrage, *Marie-Christine Pérouème* et *Philippe Bonnet* pour leurs conseils, leurs critiques et leurs commentaires ainsi que *Pascaline Wadi* pour son soutien.

Première partie

Le problème de Cauchy

Chapitre 1

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

1.1 Espace des phases et courbe intégrale

Définition – *Soient une application* $f: \ U \to \mathbb{R}^n, \ (t,x) \mapsto f(t,x)$ *définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point et une fonction* $x: \ I \to \mathbb{R}^n, \ t \mapsto x(t)$. *On dit que* x *est une solution, sur* I, *de l'équation différentielle* $x' = f(t,x)$ *si :*

(*i*) $\forall t \in I, \ (t, x(t)) \in U$;

(*ii*) x *est dérivable sur* I *et* $\forall t \in I, \ x'(t) = f(t, x(t))$.

L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$, qui est l'ensemble d'arrivée de la fonction f et de toute solution x, est appelé l'*espace des phases*. La *courbe intégrale* d'une solution x (figure 1.1) est le graphe $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la fonction x.

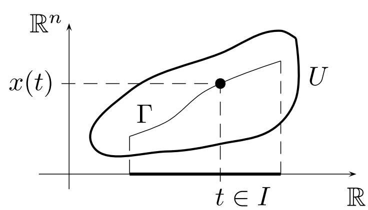

Fig. 1.1 – Courbe intégrale

Suivant le contexte, une même équation différentielle sera notée

$$x' = f(t,x) \iff \dot{x} = f(t,x) \iff \frac{dx}{dt} = f(t,x).$$

Remarque – Dans un modèle, si la variable $t \in \mathbb{R}$ mesure le temps, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état d'un système (physique, biologique, économique, etc) à la date t. Cet état est repéré par n coordonnées réelles :

$$x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

L'équation différentielle $x' = f(t,x)$ est une équation d'évolution. Formellement, elle décrit la manière dont l'état du système évolue, de $x(t)$ à $x(t+dt)$, quand le temps s'écoule de la date t à la date $t+dt$ infinitésimalement proche :

$$x'(t) = f(t,x(t)) \iff x(t+dt) = x(t) + f(t,x(t)) \cdot dt + o(dt).$$

La restriction $x|_J : \ J \to \mathbb{R}^n, \ t \mapsto x(t)$ d'une solution $x : \ I \to \mathbb{R}^n$ à un intervalle $J \subset I$ est encore une solution. C'est d'hypothèses sur la fonction f que découleront les propriétés d'une solution ; ainsi de son existence et de son unicité (chapitre 3), ainsi aussi de sa régularité.

Proposition – *Soit x une solution, sur I, de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors x est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$:*

$$f \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^n) \Rightarrow x \in \mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbb{R}^n).$$

$\triangleright$ Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. À l'ordre $k = 0$: en tant que solution, x est dérivable, donc continue sur l'intervalle I. Et $x' : \ t \mapsto x'(t) = f(t,x(t))$ est continue car composée de fonctions continues. D'où $x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$. Supposons vérifiée la propriété à l'ordre k. Si $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U,\mathbb{R}^n)$ alors $f \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^n)$, d'où $x \in \mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbb{R}^n)$. Mais alors x' est de classe C^{k+1} car composée des fonctions f et x, de classe C^{k+1}. $\square$

1.2 Orbite et portrait de phase

En projetant sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n$ la courbe intégrale Γ d'une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$, on obtient l'*orbite* $\gamma = x(I) \subset \mathbb{R}^n$ de cette solution.

Exemple – Soit $\omega > 0$. La fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos \omega t, \sin \omega t)$ est une solution sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x_1' = -\omega x_2 \\ x_2' = +\omega x_1 \end{cases}, \qquad \text{où} \quad f(t, x_1, x_2) = (-\omega x_2, +\omega x_1). \tag{1.1}$$

Le paramètre ω a la dimension de l'inverse d'un temps ; c'est une pulsation. La figure 1.2 donne plusieurs représentations graphiques de la solution x :

– la *courbe intégrale*, au centre, est le graphe de x (c'est une hélice), dans l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de coordonnées (t, x_1, x_2) ;

– les *courbes horaires*, de part et d'autre, sont les projections de la courbe intégrale sur les plans (t, x_1) et (t, x_2), elles représentent graphiquement chaque coordonnée en fonction du temps (ce sont les sinusoïdes $t \mapsto x_1(t) = \cos \omega t$ et $t \mapsto x_2(t) = \sin \omega t$) ;

– l'*orbite*, en-dessous, est la projection sur l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ de la courbe intégrale (c'est le cercle de rayon 1 et de centre l'origine $(0, 0)$).

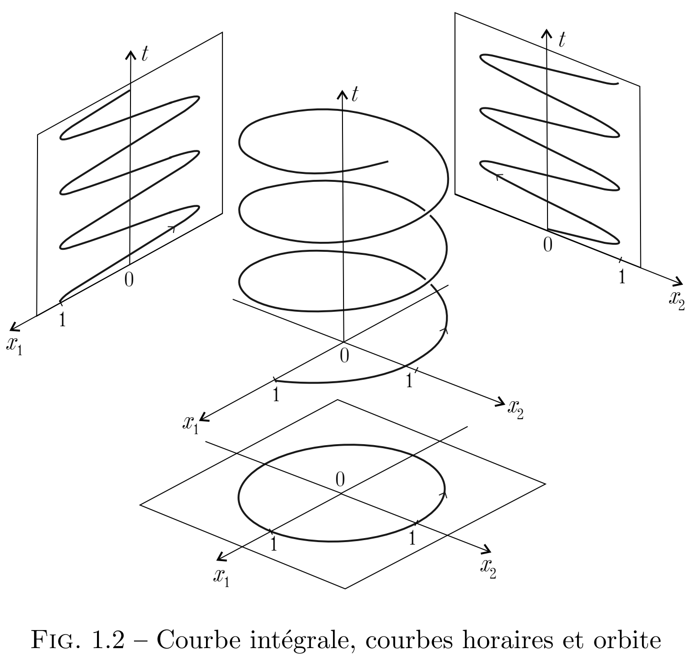

Fig. 1.2 – Courbe intégrale, courbes horaires et orbite

À noter que cette solution n'est pas unique : pour tout $a \geq 0$ et pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(a\cos(\omega t - \varphi), a\sin(\omega t - \varphi)\big)$$

est aussi une solution, dont l'orbite est le cercle de rayon a centré sur l'origine. Sur la figure 1.3 sont représentées quelques-unes de ces orbites. Une telle figure, représentant dans l'espace des phases les orbites de solutions d'une équation différentielle, est appelée un *portrait de phase.*

1.3 Équations différentielles autonomes

Cinématiquement, si $x:\ I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$, alors son orbite $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée par le temps t. Si t parcourt l'intervalle I, alors le point $x(t)$ parcourt l'orbite γ, à la vitesse $x'(t)$. Son vecteur-vitesse $x'(t) = f(t, x(t))$, s'il est non nul, est donc tangent à la courbe γ.

La fonction $f:\ U \to \mathbb{R}^n,\ (t,x) \mapsto f(t,x)$ est un champ de vecteurs. À chaque instant $t \in \mathbb{R}$ et en chaque point x de l'espace des phases $\mathbb{R}^n$ tels que $(t,x) \in U$, elle définit un vecteur $f(t,x) \in \mathbb{R}^n$. Ce vecteur varie *a priori* d'un point x à l'autre mais aussi d'un instant t à l'autre.

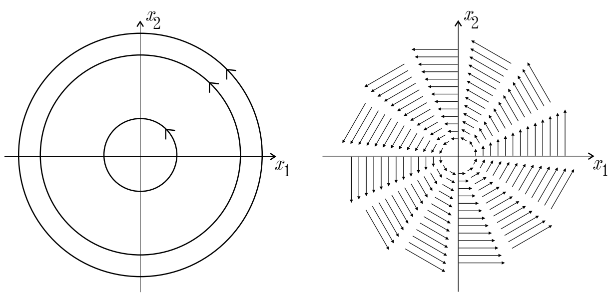

FIG. 1.3 – Portrait de phase (à gauche) et champ de vecteurs (à droite)

Si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps, alors l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ est dite *autonome.* Le champ des vecteurs $f(t,x)$ sera alors éventuellement noté $f(x)$. En chaque point x d'une orbite γ, le vecteur $f(x)$, s'il est non nul, est tangent à cette orbite. La figure 1.3 compare un portrait de phase et le champ de vecteurs de l'équation différentielle autonome (1.1).

1.4 Équations scalaires

Une *équation scalaire d'ordre* n est une équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}),$$

où $f : U \to \mathbb{R}$ est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Le qualificatif "scalaire" provient de ce que l'inconnue de cette équation est une fonction $x : t \mapsto x(t)$ à valeurs scalaires : $x(t) \in \mathbb{R}$.

On reconnaît en une équation scalaire d'ordre $n = 1$ une équation différentielle dont l'espace des phases $\mathbb{R}$ est de dimension $n = 1$. Plus généralement, *une équation scalaire d'ordre* $n \in \mathbb{N}^*$ *équivaut à une équation différentielle* $X' = g(t, X)$ *dans l'espace des phases* $\mathbb{R}^n$*, d'inconnue* $X = (x, x', \cdots, x^{(n-1)})$.

▷ On introduit, outre l'inconnue x, $n-1$ inconnues intermédiaires $x_1, \cdots, x_{n-1}$:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x' \\ \vdots \\ x_{n-1} = x^{(n-1)} \\ x'_{n-1} = f(t, x, x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad X' = g(t, X),$$

où $X(t) = (x(t), x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t)) \in \mathbb{R}^n$
et $g : U \to \mathbb{R}^n,\ (t, x, x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, x_2, \cdots, f(t, x, x_1, \cdots, x_{n-1}))$. □

Remarque – La proposition du §1.1 permet d'étudier la régularité d'une solution x :

$$f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) \Rightarrow g \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n) \Rightarrow X \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}^n) \Rightarrow x \in \mathcal{C}^{k+n}(I, \mathbb{R}).$$

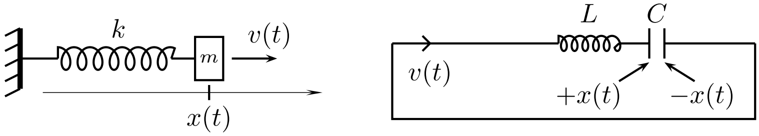

Fig. 1.4 – Deux oscillateurs harmoniques

Exemple – L'équation scalaire d'ordre 2

$$mx'' = -kx \iff x'' = -\omega^2 x$$

est appelée l'équation de l'*oscillateur harmonique*. Elle modélise en mécanique une masse m de position $x(t)$ soumise à la force de rappel d'un ressort de raideur k ; en électricité le montage en série d'une capacité C dont les armatures portent les charges $\pm x(t)$ et d'une inductance L (figure 1.4). Le paramètre $\omega > 0$ vaut dans le premier cas $\sqrt{k/m}$, dans le second $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Une variable intermédiaire v suffit à réécrire l'équation de l'oscillateur harmonique comme une équation différentielle :

$$x'' = -\omega^2 x \iff \begin{cases} x' = v \\ v' = -\omega^2 x \end{cases} \iff (x', v') = g(x, v), \tag{1.2}$$

où $g(x, v) = (v, -\omega^2 x)$. Si $x(t)$ mesure la position de la masse, la nouvelle inconnue $v(t)$ en mesure la vitesse ; si $x(t)$ mesure la charge du condensateur, alors $v(t)$ mesure le courant parcourant l'inductance L. Le couple des coordonnées (x, v) repère, dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$, l'état de l'oscillateur harmonique. Une solution de cette équation différentielle est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t - \varphi) \\ v(t) = -\omega a \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}.$$

Elle décrit une oscillation de pulsation ω (imposée par l'équation différentielle), d'amplitude a et de déphasage φ (arbitraires). La figure 1.5 représente le champ de vecteurs g et un portrait de phase de l'équation (1.2) (les orbites sont les ellipses d'équation $x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = a^2$).

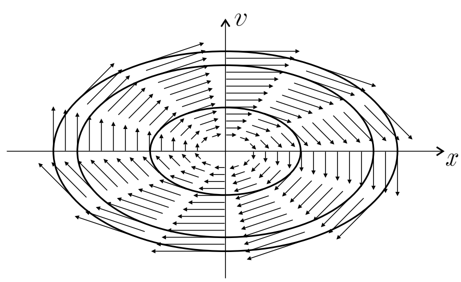

FIG. 1.5 – Champ de vecteurs et portrait de phase de l'oscillateur harmonique

Au lieu de la vitesse $v = x'$, introduisons la variable $y = -\frac{1}{\omega}x'$:

$$x'' = -\omega^2 x \iff \begin{cases} x' = -\omega y \\ y' = +\omega x \end{cases} .$$

On recouvre alors l'équation différentielle (1.1). Dans ces coordonnées (x, y), les champ de vecteurs et portrait de phase de l'oscillateur harmonique sont ceux représentés par la figure 1.3.