

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	9	Bibliographie, index	155
De quoi s'agit-il ?	13	Contraintes	150
Notations	18	Co-notations	148
Alexandrins	19	Lysistrata	146
Rationnel mon \mathbb{Q}	20	Fonctoriel	144
Charades	22	Anagrammes	143
W ou la belle absente	23	Zeugmatique	142
Ceci n'est pas une preuve	24	De notre prison...	141
Homothéties	25	Quarante-deux	139
Devoir maison	27	Les désarrois du fond	138
Vulgaire	29	Permutations	136
Limite pédant	30	Bourbachique	133
Démonstration digressive	34	Description	130
— Est-ce bien réel ?	46	De l'autre côté du miroir	125
Le rêve de Théétète	49	Quintine (ou cinquine)	123
Écrit à l'imparfait	51	Et crie : oh ! parfait !	122
Exo-tique	52	Électronique	120
Irrégularité de $\sqrt{2}$	54	Towards a Stringy Proof	117
Mécréant	55	Lettre officielle	116
Je me souviens de $\sqrt{11}$	56	Où radical-3 disparaît	114
Irrationalité de $\sqrt{2}$ (source)	62	Notation polonaise inverse	113
Pages Jaunes	63	Page Blanche	112
Mersenne ne m'aime	64	Désinvolte	111
En attendant G	66	K	110
Haïku	67	Philatélie	109
Coquilles	68	Version latine	106
Comédie	69	Tragédie	103
Anglicismes	76	Beweis ohne Worte	102
Messages personnels	77	Troisième degré	99
Portrait de l'artiste	96	Monophrase	78
X	80	Y	94
Cahiers du cinéma	81	Barry Lyndon	93
La mort aux trousses	84	Passe ton bac d'abord	90
Minimaliste	86	Malistemini	89

INTRODUCTION

Nous présentons ici des textes qui démontrent l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (et de quelques autres). C'est un nombre, $\sqrt{2}$ est un nombre, dont le carré est égal à 2. Un tel nombre doit exister : c'est, d'après le théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale d'un carré dont la longueur du côté est 1. Ce que l'on veut démontrer, c'est que ce nombre ne peut pas s'écrire comme une fraction $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers.

Pourquoi ces textes ? Par amour, pour les mathématiques et pour la littérature. Le désir n'est pas venu de $\sqrt{2}$ lui-même (sujet) mais, bien sûr, des *Exercices de style* de Raymond Queneau.

Une démonstration. Commençons par donner une démonstration, la plus populaire parmi les mathématiciens. C'est une démonstration « par l'absurde » : on suppose au contraire qu'il existe des nombres entiers p et q tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit égale à $\sqrt{2}$ et soit « irréductible », c'est-à-dire ne puisse pas se simplifier (sinon on la simplifie), et on essaie d'arriver à une absurdité, une contradiction. On écrit donc

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \sqrt{2}, \text{ puis on élève au carré,} \\ \frac{p^2}{q^2} &= 2, \text{ on multiplie les deux membres par } q^2 \\ p^2 &= 2q^2,\end{aligned}$$

et le raisonnement commence : si on a une telle égalité, alors p ne peut pas être un nombre impair, donc il est pair, donc p^2 est divisible par 4. Donc notre dernière égalité s'écrit $4 \text{ trucs} = 2q^2$, donc, en divisant par 2, q^2 est pair, donc q est pair. Mais alors, le numérateur p et le dénominateur q de la fraction sont pairs tous les deux : c'est la contradiction cherchée puisque si c'était le cas la fraction pourrait être simplifiée.

Pourquoi vouloir démontrer une chose pareille ? D'une part, les mathématicien·ne·s aiment bien cette démonstration... parce que c'est une démonstration, une vraie, et pas trop difficile, ce qui fait qu'il est possible d'en parler avec des non-professionnels. Elle sert souvent d'exemple, de réponse à la question « Qu'est-ce que vous faites ? » ou « C'est quoi, une démonstration ? »

D'autre part, c'est une preuve du fait que l'on a besoin d'autres nombres que les simples fractions, et une fois qu'on a admis $\sqrt{2}$ parmi les nombres, arrivent à sa suite des tas d'autres racines, dont $\sqrt{5}^{(1)}$, et des tas d'autres nombres comme π (celui d'Archimède, la star des nombres⁽²⁾), e (celui des logarithmes⁽³⁾)...

★

Il y a bien d'autres démonstrations, dont certaines sont données dans tel ou tel de nos textes. Certaines sont jolies et sérieuses, d'autres sont beaucoup trop compliquées. On peut aussi démontrer d'une façon complètement analogue le fait que, si le

⁽¹⁾et sa fille $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le « nombre d'or »).

⁽²⁾Sur lequel il y aurait eu beaucoup à écrire, mais pas grand chose d'aussi élémentaire. Signalons toutefois, dans une thématique proche, que l'artiste qui a fait les décorations en bronze du temple de Salomon avait réussi à fabriquer un cercle de diamètre dix coudées dont le périmètre en mesurait trente (du moins d'après la Bible, Premier livre des Rois, 7.23).

⁽³⁾que deux de nos pastiches feront disparaître et réapparaître.

nombre entier d n'est pas le carré d'un autre nombre entier, alors \sqrt{d} est irrationnel lui aussi. Pour les besoins exprimés par la littérature, nous remplacerons parfois 2 par un autre nombre, mieux adapté au texte en question.

Pour le plaisir et la jubilation de les écrire, nous en avons reproduit ou « inventé » quelques-unes⁽⁴⁾.

On peut aussi démontrer, ce qui est moins fort mais que nous nous laissons aller à faire, que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal. On peut encore utiliser la décomposition des nombres entiers p et q en produits de facteurs premiers, comme un des protagonistes nous le rappelle judicieusement.

L'une des « trop compliquées » fait appel à ce que l'on appelle le « critère d'irréductibilité d'Eisenstein⁽⁵⁾ ».

Il y a aussi de nombreuses démonstrations « géométriques » plus ou moins limpides, qui feront l'objet de plusieurs figures dessinées spécialement pour ce texte.

Certains de ces textes font allusion à des notions mathématiques un peu plus délicates. Par exemple, l'utilisation du critère de convergence des séries alternées est probablement à déconseiller à de trop jeunes lecteurs (ainsi qu'aux verges effarouchées), mais est fortement recommandée à ceux que la muse habite. Avec délicatesse, nous avons indiqué ces textes en les recouvrant d'opprobre et d'italiques, *comme ça*.

Enfin il y a les auteurs que nous nous sommes permis de pasticher (avec parfois l'aide gracieuse et involontaire de certains mathématiciens à qui il arrive d'écrire ou d'agir comme tel ou

⁽⁴⁾Certaines existent malheureusement vraiment, comme celle qui fait l'objet du sujet du « Devoir maison » que l'on trouvera quelques pages plus loin.

⁽⁵⁾Cet Eisenstein est le mathématicien allemand Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852) et non pas le mieux connu cinéaste soviétique Sergueï Mikhaïlovitch Eisenstein (1898–1948) — une homonymie que nous ne manquons pas d'exploiter dans une série « cinématographique ».

tel « maître de mathématiques », voire pire⁽⁶⁾), ou même de copier, et que nous remercions de leur aide. Des indications sur les sources de ces textes figurent dans les co-notations, page 148.

★

Ultime avertissement : de même que Cyrille et Méthode sont les noms de deux authentiques saints⁽⁷⁾, Agnès et Ludmila sont bien les noms de deux auteurs (une co-auteur, une coautrice). Si la plupart de ces textes ont une auteur principale, l'idée de chacun d'eux est venue d'une discussion entre elles deux, et chacune d'elles est intervenue dans les textes de l'autre, parfois de façon visible et signalée dans des commentaires ou des notes infrapaginales, parfois de façon cachée. De sorte qu'il n'est plus possible de réattribuer tel texte à Agnès, tel autre à Ludmila⁽⁸⁾. Bref, ceci est un morceau à quatre mains.

⁽⁶⁾Nous avons essayé de traiter ces comportements avec humour — de toute façon il est peu probable que ces mathématiciens lisent ces textes, encore moins qu'ils s'y reconnaissent.

⁽⁷⁾Dont nous verrons des personnages portant ces noms en action.

⁽⁸⁾S'il y en a une qui dit-verge et laquelle, nous ne le savons plus.

DE QUOI S'AGIT-IL ?

— Vous écrivez quoi, là ?

Nous étions au bistrot. J'écrivais dans un cahier rouge. Ma co-autrice avait sorti sa dernière coquetterie, un petit PC portable, et n'en levait plus les yeux. Il avait presque vingt ans. Le bel âge, comme dit l'autre. Il devait s'ennuyer.

— Ce sera un livre.

— Écrit de toutes les couleurs, comme le cahier ?

— Non, ça c'est juste pour m'amuser. Ce sera un livre sérieux imprimé noir sur blanc.

— Et il parle de quoi, votre livre ?

— De $\sqrt{2}$. Racine de deux.

— Tout un livre ? Rien que sur racine de deux ?

— Et quelques autres, racine de trois, de cinq, de sept, de onze, et même de quarante-deux !

— Quarante-deux ? Pourquoi quarante-deux ?

Ma co-autrice me lança un regard noir. Elle fait ça si bien qu'on oublie qu'elle a les yeux bleus. En attendant, lui les avait marron, marron clair. Clairs. Vraiment clairs. J'obtempérai au regard noir.

— Mais surtout racine de deux.

— Bon, c'est 1,414, tout le monde sait ça. Et après ça, il y a autre chose à dire ?

— Vous croyez ça ?

— Quoi, ça ?

— Eh bien, 1,414.

— C'est ce que j'ai appris à l'école. J'ai fait S, moi.

— Très bien. Vérifions.

— Comment ça ? Vous ne me croyez pas ?

— Mais si. Je veux dire, vérifions que c'est 1,414. Vous avez un papier, un crayon, posons l'opération.

— L'opération ? On n'est pas à l'école. Vous êtes prof, vous, je parie.

— Oui. Mais posons. Posons. Vous avez oublié ? On écrit 1,414, en-dessous 1,414, et on multiplie. Si vous avez raison, ça doit faire 2.

— Euh...

— ?

— J'ai une calculette, dans mon téléphone.

— Eh bien, allez-y.

— 1.414 fois 1.414 enter égale 1.999396.

— Donc pas 2.

— Presque. Vous voulez un chewing-gum ? Ah ! Essayons ça : 1.4142 fois 1.4142 enter égale 1.99996164. Toujours pas. Peut-être...

— N'insistez pas... Ça ne s'arrête pas.

— Comment le savez-vous ? Peut-être en continuant...

— Eh bien. Supposons que ça s'arrête. Vous voyez, 1,4142... encore d'autres chiffres, un dernier, d (je l'appelle d , parce que je ne sais pas qui c'est⁽¹⁾), donc 1,4142... d . Et ce chiffre, d , n'est pas un zéro, mais un chiffre entre 1 et 9. Maintenant, élevez au carré.

— Encore ? Et comment je fais, avec votre d , dans la calculette ?

— Posez, mon jeune ami, posez ! Mentalement, vous imaginez votre 1,4142... d , vous en disposez un autre identique en-dessous, et vous imaginez que vous multipliez. Comme à l'école primaire, en commençant par le chiffre de droite. Vous obtenez un nombre à virgule. Le dernier chiffre, c'est...

— d^2 !

⁽¹⁾Même si ma co-auteurice sait bien qui est dd .

- Presque. Si $d = 1, 2$ ou 3 , oui, sinon d^2 n'est pas un chiffre mais un nombre à deux chiffres, $16, 25...$
- Alors, le dernier chiffre de d^2 .
- Parfait !
- Eh ! Je peux avoir un autre xxx⁽²⁾ ?
- Finissons. Le dernier chiffre de d^2 , c'est quoi ?
- J'sais pas. Ça dépend de d .
- Alors regardons-les tous. $1^2 = 1$, c'est 1 , $2^2 = 4$, c'est 4 , $3^2 = 9$, c'est 9 , $4^2 = 16$, c'est 6 , $5^2 = 25$, c'est 5 , $6^2 = 36$, c'est 6 , $7^2 = 49$, c'est 9 , $8^2 = 64$, c'est 4 , $9^2 = 81$, c'est 1 . Donc $1, 4, 5, 6$ ou 9 . Vous ne remarquez rien ?
- Jamais 2 ?
- C'est vrai. Mais surtout, jamais 0 . Donc le carré de votre $1,4142...d$
- Je ne sais pas pourquoi vous dites que c'est le mien.
- Façon de parler. Le carré de $1,4142...d$, eh bien il a vraiment des chiffres après la virgule.
- Et alors ?
- Eh bien, alors, ça ne peut pas être 2 .
- Ah ! Euh ! Excusez-moi. Mon vibreur... Ah. Non, c'est rien, c'est ma mère.

Sa mère. Prends ça dans les dents. Son xxx arrivait. Il remit le portable dans la poche de son xxx⁽³⁾.

- On en est où ?
- Eh bien vous ne pouvez pas écrire $\sqrt{2}$ comme un nombre à virgule « qui s'arrête ».
- Et ça me fait quoi ?
- Eh bien, c'est une démonstration. Du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

⁽²⁾Censuré : d'une part, ma co-auteurice ne veut pas de publicité de marque, de l'autre, je déteste le xxx.

⁽³⁾Non, pas de publicité de marque, insiste ma co-auteurice.

— Attendez ! Vous me faites ce truc compliqué, faut poser, calculer des carrés, juste pour ça ? C'est bouffon ! C'est vachement plus facile de montrer que c'est irrationnel, non ? Pourquoi vous dites pas juste que ça peut pas s'écrire p/q parce que p/q au carré égale deux, ça vous donne que p^2 il a une puissance impaire de 2 dans sa décomposition en facteurs premiers, et que pour un carré, c'est pas possible.

Désarçonnée, je regardai ma co-auteurice, qui tapotait son clavier, essayant de fabriquer un tableau en html pour y installer nos œuvres. Malgré sa concentration apparente, elle n'avait rien perdu de la discussion, sauf peut-être les yeux clairs, et s'empressa de voler à mon secours, en agressant le garçon :

— Alors, si vous savez que c'est irrationnel, vous ne pouvez pas croire que c'est 1,414.

— ?

— Ben ouais, $1,414 = \frac{1414}{1000}$, mon gars. Si c'est irrationnel, ça peut pas être décimal.

J'avoue qu'il m'avait embrouillée. Au point que je m'étais laissée entraîner à cette démonstration compliquée... Alors que, il avait bien raison, l'irrationalité, c'était plus simple, et, là c'est ma co-auteurice qui avait raison, plus fort. Il était plutôt mignon, comme dit ma co-auteurice, qui avoue une petite faiblesse pour les garçons mignons mais bêtes. Bête, celui-là ne l'était pas. Tout au plus un peu vulgaire. Un futur lecteur, peut-être. Après tout, il m'avait demandé « de quoi parlait » le livre. Elle aurait pu y aller moins brutalement. J'essayai de rattraper le coup.

— C'est un livre dans lequel il y a aussi des poèmes, des jeux de mots. Toujours à propos de racine de deux.

— Vous écrivez des poèmes sur racine de deux ? Vous rigolez ?

— C'est vous, qui rigolerez, quand vous les lirez. Il y a aussi des films.

— Ah oui. Je vois le genre. Des trucs avec des nombres, *Matrix*, pas vrai ?

Je m'étais déjà plantée une fois, sur ses connaissances mathématiques. Je pouvais me planter encore, mais il ne me semblait pas du style à connaître Pasolini ou Eisenstein. Trop jeune pour Passe ton bac d'abord. *Peut-être avait-il vu la Mort aux trousses. Je sentais que ma co-autrice se bidonnait, l'air absorbé dans ses*

etc. <i>De qui se moquait-elle ? J'aurais le temps de régler ça plus tard. Mais ça se réglerait. En pensant à ce qu'elle écrivait quand elle se mettait à la langue naturelle, j'ajoutai, en esquivant la question :</i>
--

— Il y a aussi des personnages. Et même des gens comme vous.

— Vous voulez dire quoi, des gens comme moi ?

Disons que ma co-autrice avait introduit dans ses textes un certain nombre de côtés désagréables de ce genre de type, la désinvolution, par exemple. Attendant, tout de même. Je me promis de lui consacrer un chapitre, à lui ou à un de ses semblables.

Un groupe de jeunes arrivait, ses amis, ils le saluaient bruyamment, s'installaient à sa table.

Je me remis à écrire.