Table des matières

Remerciements

Ce livre repose sur une compilation de nombreux livres et articles, dont je n'ai pu faire figurer qu'une faible partie dans la bibliographie, page 198 ; c'est pourquoi je souhaite avant tout rendre hommage à tous les logiciens, classiques ou non, qui ont permis de formaliser, au moins partiellement, le raisonnement humain : Aristote, le précurseur, puis Boole, Frege, Hilbert, Russel surtout, en raison de sa profonde humanité et de ses engagements passionnés en faveur de la paix, et aussi Lukasiewicz, Church, Gödel, Türing, Zadeh...

Revenant à mon humble niveau, je dois remercier mes proches, mon épouse Évelyne et mes fils Loïc et Philippe, pour la patience dont ils ont à nouveau fait preuve lors de la rédaction de cet ouvrage, rédaction qui a fait suite à celle du précédent [*], ce qui a prolongé la période où j'ai été peu disponible à leur égard.

Je remercie également Henri Briand, qui, lorsqu'il était Directeur du Département Informatique de l'IRESTE, école qui, depuis, s'est intégrée à Polytech'Nantes, m'a proposé la responsabilité d'un cours sur les logiques non classiques.

Je remercie aussi Philippe Fauvernier, Directeur des Éditions Hermann pour sa confiance, ses remarques et ses conseils.

Enfin, la réalisation de cet ouvrage m'a été facilitée par l'utilisation de la suite bureautique OpenOffice sous Linux. Je remercie la communauté OpenOffice.org pour l'aide que j'ai pu trouver, tant dans la documentation en ligne que dans les réponses qui m'ont été apportées dans les forums.

(*) *Introduction Pratique aux Logiques Classiques,* Maurice Bernadet, Éditions Hermann, Paris 2010. Je ne peux que recommander ce livre ;-) .

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préalables

Si ce livre fait suite à l'ouvrage *"Introduction Pratique aux Logiques Classiques"*, paru également aux éditions Hermann, il en est indépendant. Cependant, pour des lecteurs n'ayant aucune ou que peu de connaissances en logique, il est conseillé de lire, avant le présent ouvrage, un livre relatif aux logiques classiques. Cela n'est cependant pas indispensable et, dans ce cas, nous recommandons de lire plus attentivement cette introduction.

Cet ouvrage est consacré aux logiques **non** classiques, logiques qui ont été conçues à partir des logiques classiques, pour représenter et reproduire des modes de raisonnements plus proches des véritables raisonnements humains. Alors que les logiques classiques s'attachent à des raisonnements ***immuables, rigoureux, précis et reposant sur des connaissances certaines,*** tels les raisonnements mathématiques, les logiques non classiques se sont affranchies de ces contraintes, ce qui est, en pratique, le cas de nombreux raisonnements.

Nous verrons que, si certaines logiques non classiques sont des extensions des logiques classiques, d'autres sont en rupture avec certains de leurs principes. Chaque classe de ces logiques fera l'objet d'un chapitre particulier ; nous considérerons successivement les logiques multivaluées, les logiques floues, puis les logiques modales et temporelles, pour terminer avec les modes de raisonnements non monotones et les raisonnements prenant en compte l'incertitude.

D'une manière générale, cet ouvrage se veut pratique, c'est-à-dire que les aspects théoriques y sont parfois survolés ou simplifiés : nous nous nous sommes plus attachés aux mécanismes et aux algorithmes qu'à leurs fondements théoriques. Chaque chapitre consacré à une logique ou à un mode de raisonnement est suivi d'exercices, dont les corrigés sont donnés en fin d'ouvrage. Dans la mesure du possible, les exercices sont dans un ordre croissant de difficulté, mais, parfois, pour des raisons de mise en page des corrigés, cet ordre n'est pas parfaitement respecté.

1.2 Éléments principaux des logiques classiques

Rappelons qu'une logique se préoccupe de l'étude des raisonnements, de leur modélisation et de leur validation. On ne peut pas parler de ***la** logique*, sauf en tant que domaine particulier de la philosophie ; il faut parler ***des** logiques* : les logiques classiques comprennent par exemple la logique des propositions, la logique des prédicats d'ordre 1, la logique des prédicats d'ordre 2…

Une logique formalise des énoncés déductifs ou raisonnements exprimés dans le langage courant ; formaliser un énoncé, c'est le représenter par une formule. Un raisonnement comporte des énoncés initiaux appelés "prémisses" et des énoncés déduits des prémisses, appelés "conclusions". Une fois ces énoncés représentés par des formules, les formules initiales sont appelées, par analogie, "formules prémisses" et les formules déduites, "formules conclusions".

Les premières logiques considérées ont été les logiques classiques. Elles ont été construites afin de modéliser et de vérifier la validité de raisonnements, en particulier les raisonnements mathématiques. Elles s'attachent donc à des raisonnements rigoureux, précis et reposant sur des connaissances certaines.

L'énoncé le plus simple formalisé par les logiques classiques est ***la proposition***. Une proposition concerne un fait simple, qui peut être soit vrai soit faux ; une proposition est représentée par un symbole simple, généralement une lettre : p, q, r…

Les propositions interviennent dans un raisonnement par l'intermédiaire d'opérateurs adverbiaux ("non"), de conjonctions de coordination ("et", "ou", "ni"...) ou de conjonctions de subordination ("si", "alors", "donc"…). Ces opérateurs sont représentés dans les formules par des symboles et sont appelés, alors, connecteurs, même si l'on utilise aussi le terme d'opérateurs. Le symbole "$\neg$" correspond à la négation d'une proposition, le symbole "$\wedge$" au *"et"* (conjonction logique), le symbole "$\vee$" au *"ou"* (disjonction logique). Un énoncé conditionnel de la forme *"si condition(s), alors conséquence(s)"*, se voit associer le symbole "$\rightarrow$", dit d'implication logique.

Par exemple, l'énoncé

"S'il pleut, je prends un parapluie".

se traduira par la formule

$$p \rightarrow q,$$

avec p représentant la proposition *"il pleut"*
et q la proposition *"je prends un parapluie".*

Un des principaux modes de raisonnement est celui qui, en présence d'une implication et de sa (ou ses) formule(s) prémisses(s), en déduit la (ou les) formule(s) conséquence(s).

Par exemple, si nous considérons le raisonnement

"S'il pleut, je prends un parapluie",
or *"il pleut",*
donc *"je prends un parapluie"* ;

nous pouvons formaliser ce raisonnement, en utilisant les symboles précédents, par

$p \rightarrow q$,
or p ,
donc q ;

ce que l'on peut résumer en

$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

ou en $$(p \rightarrow q) \wedge p \vdash q$$

Le symbole "$\vdash$" exprime que l'on peut déduire des formules écrites à sa gauche, les formules écrites à sa droite.

Ce raisonnement peut aussi s'écrire sous la forme ci-dessous, moins rigoureuse, mais néanmoins valide :

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q .$$

C'est un des modes de raisonnements fondamentaux des logiques classiques : on l'appelle le **modus ponens.**

En prolongement de la logique des propositions, les **logiques des prédicats** ont été construites pour considérer des ensembles d'individus ou d'entités.

Un prédicat énonce les propriétés d'individus ou d'ensembles d'individus, ainsi que des relations entre ces individus ou ces ensembles d'individus. Un prédicat, énoncé dans le langage courant, peut être représenté, dans une formule, par un symbole accompagné d'arguments pour constituer un prédicat formel.

Par exemple, si nous considérons des phrases comme

"Si une souris rencontre un chat, la souris a peur du chat" ;

ou, ce qui est équivalent, mais moins naturel en français,

"Pour toute souris et pour tout chat
si une souris rencontre un chat, la souris a peur du chat" ;

La logique des prédicats permet de formaliser cet énoncé, par exemple, en écrivant la formule

$$\forall X \, \forall Y \, [s(X) \wedge c(Y) \wedge r(X, Y)] \rightarrow p(X, Y)$$

dans laquelle

$\forall X$ désigne tout individu X, dont $s(X)$ précise que X est une souris,

$\forall Y$ désigne tout individu Y, dont $c(Y)$ précise que Y est un chat et

$r(X, Y)$ exprime que *"X rencontre Y"*,

$p(X, Y)$ exprime que *"X a peur de Y"*.

Il est aussi possible d'exprimer un énoncé comme

"Il y a des souris qui n'ont peur d'aucun chat",

par exemple, par $\exists X \, s(X) \wedge \neg \exists Y \, c(Y) \wedge p(X, Y)$,

ou par la formule équivalente $\exists X \, s(X) \wedge \forall Y \, [c(Y) \rightarrow \neg p(X, Y)]$

où $\exists X \, s(X)$ traduit *"il y a des souris"*

et $\neg \exists Y \, c(Y)$ *"il n'y aucun chat"...*

Remarquons au passage que ces deux énoncés se contredisent, ce que la logique des prédicats permet de démontrer rigoureusement, de manière formelle.

À partir de ces quelques indications, nous pouvons nous intéresser à ce qui caractérise une logique sur le plan théorique.

1.3 Aspects théoriques d'une logique

Sur le plan théorique, une logique comporte trois aspects :

- un langage symbolique permettant
  l’expression et la représentation formelle d’énoncés ;
- un système formel de déduction ;
- un lien entre les formules et une certaine réalité :
  une sémantique, qui considère le lien entre les formules
  et la vérité des énoncés qu'elles représentent.

Ces trois aspects sont fondamentaux pour définir une logique, même si l’on privilégie parfois certains d’eux.

1.3.1 L'aspect langage symbolique (ou formel)

Le langage formel L associé à une logique permet de transcrire des énoncés du langage courant sous une forme systématique et rigoureuse ; cette forme est constituée d'une suite de phases ou formules (les énoncés du langage).

La syntaxe du langage formel *L* décrit donc la structure morphologique des énoncés, c'est-à-dire quelles formes ils doivent respecter. Cette syntaxe

- pose la définition de formules atomiques,
- définit des connecteurs (opérateurs au niveau sémantique),
- et énonce des règles syntaxiques, permettant de combiner les formules atomiques à l'aide des connecteurs, pour constituer *des formules bien formées* (en abrégé : *f.b.f.*).

Les logiques classiques définissent des symboles pour représenter les *propositions* (énoncés les plus simples) ou des *prédicats* ; les prédicats traduisent aussi bien des propriétés que des relations entre entités d'un domaine. Les connecteurs permettent d'associer plusieurs sous-formules à l'intérieur d'une même formule ; ils se traduisent en opérateurs au niveau sémantique, pour combiner les valeurs de vérité des formules propositionnelles ou des formules prédicatives.

Les symboles que nous utiliserons, sont ceux utilisés par les mathématiciens et les informaticiens, américains en particulier. Nous les rappelons dans le tableau ci-dessous, à côté des symboles de Russell, qui sont plus souvent utilisés par les philosophes :

Symboles que nous utiliserons : ceux des mathématiciens et informaticiens (américains)	Notations de Russell, utilisées par les philosophes
$\neg$ négation, $\wedge$ conjonction ("et"), $\vee$ disjonction ("ou"), $\rightarrow$ implication, $\leftrightarrow$ équivalence, $\top$ tautologie ("toujours vrai"), $\perp$ contradiction ("toujours faux")	$\sim$ négation, **.** conjonction ("et"), $\vee$ disjonction ("ou"), $\supset$ implication, $\equiv$ équivalence, **1** tautologie ("toujours vrai"), **0** contradiction ("toujours faux")

Principaux symboles logiques

La logique des prédicats utilise aussi les deux symboles, $\forall$ et $\exists$, appelés *quantificateurs*, suivis d'un identificateur de variable.

- *Le quantificateur universel*, $\forall$, se lit *"quel que soit ..."*.
- *Le quantificateur existentiel*, $\exists$, se lit *"il existe au moins un ... tel que ..."*.

1.3.2 Les mécanismes de déduction

Une ***déduction formelle*** est un enchaînement formel d'énoncés, établis en appliquant certaines règles, *les règles d'inférence*. Une règle d'inférence permet d'écrire, à partir de formules déjà établies (prémisses), de nouvelles formules (conclusions) ; le modus ponens est un exemple de règle d'inférence.

La déduction formelle peut s'utiliser de deux manières :

- pour établir de nouveaux énoncés (théorèmes) ou
- pour effectuer des déductions à partir de formules prémisses.

Plus généralement, on définit

- un ensemble d'axiomes (f.b.f. initiales),
- des règles d'inférences r_i, notées

$f1,\ f2\ \ldots,\ fn\ \ \vdash_{r_i}\ \ g1, g2, \ldots, gm$ qui se lisent

"f1, f2 …, fn permettent de poser (par r_i) *g1, g2, ... , gm"*.

Par exemple, *le modus ponens* s'écrit $f,\ f \to g\ \vdash_{MP}\ g$,
les lettres *MP* étant l'abréviation de modus ponens.

La preuve d'une formule est une suite de formules, établies par application des règles d'inférences et aboutissant à la formule prouvée.

On note

$f1, f2\ \ldots, fn\ \vdash f$, si la formule f se déduit à partir des axiomes et de $f1,\ f2\ \ldots, fn$;

$\vdash f$, si la formule f se déduit uniquement à partir des axiomes et des règles d'inférences (on dit alors que *f* est un théorème).

Le symbole (...) $\vdash$ ... se lit "(*de* ...) *on déduit formellement* ...".

1.3.3 Une logique en tant que théorie de la vérité : la sémantique

L'objet de la sémantique est d'***interpréter*** les formules d'un langage formel *L,* c'est-à-dire de leur attribuer des valeurs de vérité. Les logiques classiques utilisent comme valeurs de vérité les éléments d'un des ensembles de symboles {Vrai, Faux} ou {1, 0}.

Quelques définitions

- une *formule valide* s'évalue à Vrai dans toute interprétation,
- une *formule inconsistante* s'évalue à Faux dans toute interprétation,
- une *formule non valide* s'évalue à Faux dans au moins une interprétation,
- une *formule consistante* s'évalue à Vrai dans au moins une interprétation.

On dit qu'*une formule f* ***découle*** *des formules* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, si *f* s'évalue à Vrai dans toute interprétation où *f1, f2*, ..., *fn* s'évaluent à Vrai. On dit aussi alors que la formule *f est entraînée* (matériellement) par les formules *f1, f2*, ..., *fn*.

On note

$f1, f2\ \ldots, fn \models f$, si *f1, f2*, ... *fn* entraînent matériellement f;

$\models f$, si f est une formule toujours vraie (une tautologie).

Le symbole $\models$ représente *l'entraînement matériel* (*entailment* en anglais.

1.3.4 Liens entre preuves formelles et implication matérielle

a) Définitions

Logique saine

une logique est appelée saine, quand toute preuve formelle correspond à un enchaînement de vérités dans le domaine représenté (ou que tout théorème est une tautologie). C'est-à-dire, que pour toute formule f,

si $\vdash f$, alors $\models f$, ou
si $f1, \dots, fn \vdash f$, alors $f1, \dots, fn \models f$.

Logique complète

une logique est appelée complète, quand à tout enchaînement de vérité dans le domaine représenté correspond une preuve formelle (ou que toute tautologie est un théorème). C'est-à-dire, que pour toute formule f,

si $\models f$, alors $\vdash f$, ou
si $f1, \dots, fn \models f$, alors $f1, \dots, fn \vdash f$.

b) Remarques

1) Tout système logique doit être sain : il est souhaitable, en effet, que tout ce que l'on démontre formellement corresponde à la vérité dans les domaines représentés.

2) La logique des propositions et la logique des prédicats d'ordre 1 sont complètes, mais ce n'est pas le cas de tous les systèmes logiques : par exemple, l'arithmétique n'est pas complète (démonstrations de Gödel et de Church).

3) Un autre problème se pose aussi : *la décidabilité d'une logique.*

   Une logique est dite décidable s'il existe un algorithme qui permet en un temps fini de savoir si une formule est un théorème ou non.

   Dans les systèmes sains et complets, ces algorithmes peuvent se placer au niveau syntaxique (par exemple, la méthode de résolution) ou sémantique (méthodes des tables de vérité, des tableaux ou arbres sémantiques).

c) Résultats importants

• *La logique des propositions* est saine, complète et décidable.

• *La logique des prédicats d'ordre 1* est complète, saine, mais semi-décidable : on dispose d'algorithmes permettant de prouver les théorèmes, mais qui risquent de ne pas se terminer quand les formules testées ne sont pas des théorèmes.

1.4 Logiques classiques et non classiques

1.4.1 Étude informelle des limites des logiques classiques

Si les logiques classiques ne considèrent que des raisonnements rigoureux, précis et reposant sur des connaissances certaines, les raisonnements humains courants ne possèdent pas toujours ces caractéristiques. Si, par exemple, nous considérons les énoncés ci-dessous :

"Toute personne qui pratique la logique n'est pas stupide".

"Toute personne qui n'est pas stupide est intelligente".

"Jean pratique la logique".

Il semble légitime d'en déduire *"Jean est intelligent"*.

Cependant, cette déduction n'est pas valide dans le cadre des logiques classiques. Il lui manque en effet la phrase *"Jean est une personne",* faute de quoi, si mon ordinateur s'appelait Jean et, étant donné que mon ordinateur pratique la logique (dans la mesure où il peut exécuter des programmes permettant d'évaluer des raisonnements), on pourrait déduire que *"mon ordinateur est intelligent"*, ce qui n'est pas vrai : un ordinateur peut simuler une certaine forme d'intelligence, mais je ne pense pas que l'on puisse dire d'un ordinateur qu'il est intelligent !

Un domaine dans lequel les logiques classiques ne se montrent pas toujours satisfaisantes est celui du diagnostic (médical, en particulier). En effet, supposons que l'on formule des règles de diagnostic, liées au résultat d'un examen tel, pour rester à un niveau général, la prise de température :

"Si la température est inférieure ou égale à 38°5,
la maladie est un rhume" (1)

"Si la température est supérieure à 38°5,
la maladie est une grippe". (2)

Que va-t-on décider si la mesure n'est pas possible, parce que, par exemple le thermomètre ne fonctionne pas ? (Ne pensez pas que c'est impossible, cela m'est arrivé, chez un généraliste dont les piles du thermomètre étaient déchargées...). Plus fréquemment, il s'agira d'un examen non pratiqué ou d'un examen dont on attend les résultats.

Un autre cas considère deux seuils, comme dans les énoncés

"Si la température est inférieure à 38°,
la maladie est un rhume".

"Si la température est supérieure à 39°,
la maladie est une grippe".

On se rend compte, dans ce contexte, qu'aucune conclusion n'est possible pour une température entre 38 et 39°. De plus, comment pourrait-on utiliser des implications sur des symptômes différents et donnant lieu à des conclusions contradictoires ?

Une première solution pourrait être obtenue en décidant de ne rien déduire. En effet, si le thermomètre est cassé, je n'ai pas de mesure possible et les faits concernant la température sont indéterminés : aucune règle ne s'applique.

Une méthode plus rigoureuse serait d'évaluer l'incertitude sur les maladies, par exemple par une probabilité, ce qui permet, d'une part de combiner des règles associées à des symptômes différents, mais aussi, de choisir le traitement susceptible d'être le plus efficace.

En fait, plus fréquemment, un médecin exprimera plutôt les énoncés (1) et (2) par

"Si la température est peu élevée,
la maladie est ***sans doute*** *un rhume",*

"Si la température est forte,
la maladie est ***sans doute*** *une grippe".*

On ne peut pas traduire ces règles dans une logique classique. Et que pourrait-on en déduire, si, des piles neuves ayant été mises en place, le thermomètre indiquait une température de 37,9° ?

De plus, les logiques classiques ignorent les possibilités d'erreurs dans les faits manipulés. En effet, si je lis 40° sur un thermomètre et si j'en déduis un diagnostic de grippe, les logiques classiques ne permettent pas de rectifier ce jugement, au cas où je découvrirais par la suite que le thermomètre est bloqué sur 40° : une hypothèse implicite des règles énoncées ci-dessus est que les températures prises en compte sont correctes.

Les logiques classiques ne permettent pas non plus les déductions sur les connaissances ou les croyances d'individus, humains ou agents informatiques. Considérons par exemple, l'énoncé

"Si je sais qu'il pleut et que je crois que mon voisin ne le sait pas,
si je le lui annonce,
je suis en droit de croire que dorénavant, il le sait".

Cet énoncé ne peut être pris en compte par une logique classique : on pourrait envisager d'utiliser des prédicats *"croire"* ou *"savoir",* mais leurs arguments devraient eux-mêmes être des prédicats...

Enfin, tout ce qui relève de prévisions est ignoré pas les logiques classiques, tel l'énoncé

"Si le ciel se couvre
et si la pression atmosphérique baisse,
la pluie va tomber ".

En effet, les logiques classiques ignorent les aspects temporels des énoncés. De plus, la déclaration ci-dessus s'exprimerait plus généralement sous la forme

"Si le ciel se couvre
et si la pression atmosphérique baisse rapidement,
il risque de se produire du mauvais temps dans un futur proche".

Cet énoncé utilise plusieurs notions, ignorées par les logiques classiques : outre l'aspect temporel, interviennent des graduations imprécises comme *"rapidement", "mauvais temps", "proche"* ainsi que l'expression d'incertitude *"il risque de"*, elle aussi imprécise.

Pour permettre l'utilisation d'énoncés comme ceux que nous venons d'exposer, les logiciens modernes ont créé diverses logiques, appelées "non classiques". Le but de ces logiques est de prendre en compte ces différents aspects, souvent non rigoureux, du raisonnement humain. Pour des raisons de simplicité d'exposé, nous les étudierons séparément dans l'ordre suivant :

1) les logiques multivaluées, dont les valeurs de vérité peuvent être autres que Vrai ou Faux, en particulier "incertain" ou "indéterminé" ;

2) les logiques floues qui prennent en compte les énoncés imprécis ou vagues ;

3) les logiques modales qui permettent d'exprimer la possibilité ou la nécessité de formules, ainsi que la croyance ou la connaissance, relatives à certaines formules ;

4) les logiques temporelles qui prennent en compte le temps dans les raisonnements ;

5) les logiques non monotones qui permettent de faire des hypothèses puis, si nécessaire, de les réfuter ;

6) les modes d'évaluation de l'incertain, permettant de proposer des décisions, espérées optimales, en présence d'incertitudes.

Il faut remarquer que, dans des applications, en particulier celles qui concernent les systèmes à bases de connaissances, plusieurs logiques non classiques peuvent se combiner : il est ainsi possible de pratiquer des raisonnements non monotones sur des évaluations d'incertitudes, de faire des prévisions temporelles évolutives, comme en météorologie, de maintenir la cohérence des connaissances ou des croyances d'agents informatiques, d'utiliser des règles de formulations imprécises pour déterminer des degrés de certitudes…

Avant de les détailler séparément, faisons un rapide tour des logiques non classiques que nous allons considérer. Cela permettra au lecteur d'avoir une idée de ce que seront les chapitres suivants et de choisir les chapitres qu'il souhaite étudier en priorité. Il faut remarquer que si le chapitre 3 (logiques floues) prolonge le chapitre 2 (logiques multivaluées), ils peuvent être étudiés sans problème dans un ordre quelconque, alors qu'il est fortement conseillé d'avoir assimilé le chapitre 4 (logiques modales) avant le 5 (logiques temporelles). Les autres chapitres peuvent être considérés comme indépendants.

1.4.2 Rapide survol des logiques non classiques

Les logiques non classiques sont de deux types :

1) des extensions de la logique classique qui conservent toutes les caractéristiques des logiques classiques : langages, axiomes, règles d’inférence, sémantique ; elles se voient ajouter suivant les cas :

– de nouveaux opérateurs ou de nouveaux objets au niveau syntaxique (logiques modales) ;
– de nouvelles valeurs de vérité au niveau sémantique (logiques multivaluées).

2) des logiques en rupture avec les logiques classiques et qui ne respectent pas certains axiomes des logiques classiques, tels la monotonie, le principe du tiers exclu (qui exprime que, soit une formule, soit sa négation, doit être vraie) ...

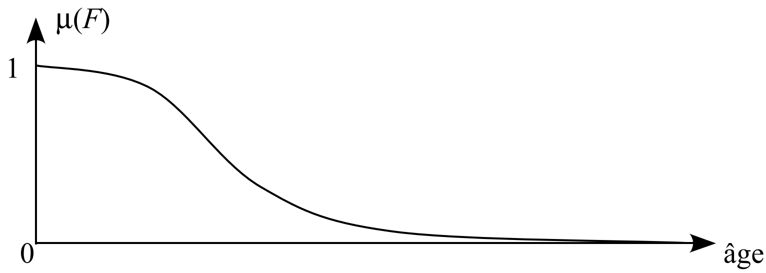
a) Les logiques multivaluées

- les logiques trivaluées ajoutent une troisième valeur de vérité à l'ensemble {Vrai, Faux}, valeur dont la signification peut être, suivant les logiques, "inconnu", "indécidable", "absurde"...

- les logiques multivaluées générales utilisent des valeurs de vérité en plus grand nombre pour graduer le degré de vérité des formules (ce qui se généralise dans les logiques floues) ou pour donner à la vérité des formules des significations spécifiques au domaine considéré.

b) Les logiques de l'imprécis

Ce sont essentiellement les logiques floues ; elles s'efforcent d'exprimer l'imprécision des formulations courantes par une graduation de la vérité des formules. Par exemple, la formule F représentant l'énoncé *"Jean est jeune"* a un degré de vérité, noté $\mu(F)$, lié à l'âge de Jean et qui peut correspondre à la courbe ci-dessous



Ces logiques présentent quelques difficultés d'emploi :

- elles traduisent une formulation subjective, liée à un individu dans un contexte donné ;
- de nombreux opérateurs peuvent être utilisés et leur choix est difficile.

Elles se généralisent dans le cas de formules, à la fois imprécises et incertaines, à l'aide de la théorie des possibilités. (Attention : la notion d'incertain doit être bien distinguée de celle d'imprécis !).

c) Les logiques modales

Elles utilisent des *modalités*.

Une modalité est un opérateur M, tel que, si F est une formule, MF est aussi une formule.

Les premières modalités, dites aléthiques, étaient

$\Box$ ...	il est nécessaire que ...
$\Diamond$ ...	il est possible que ...

Mais d'autres modalités ont été ajoutées et peuvent être utilisées :

- des modalités de connaissance/croyance (logiques épistémiques),
- des modalités d'obligation et d'autorisation (logiques déontiques),
- des modalités temporelles…

d) Les logiques temporelles

On en distingue deux classes principales :

- les logiques temporelles avec datation ou réification du temps, dans lesquelles, soit le temps est considéré comme un argument de plus dans les prédicats, soit il intervient à l'intérieur de "méta-prédicats" ;
- les logiques temporelles modales ; elles utilisent des opérateurs modaux exprimant

  qu'une formule sera toujours vraie ($\Box$ ou G)

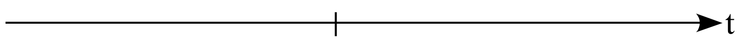
  qu'une formule sera vraie au moins une fois ($\Diamond$ ou F)

  avec, éventuellement, d'autres modalités pour le passé et le présent.

De plus, le temps peut être représenté par des dates précises (*points*), mais aussi par des *intervalles* entre deux dates.

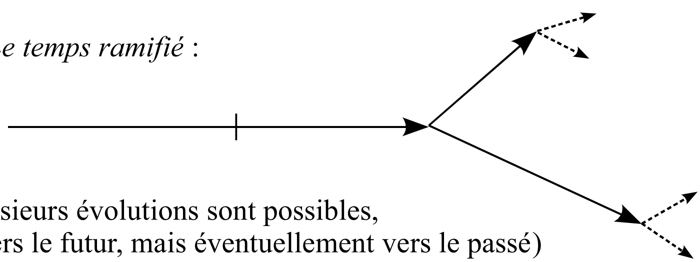
On peut aussi distinguer deux conceptions du temps :

- *Le temps linéaire* :



(une seule évolution est possible, vers le futur comme vers le passé)

- *Le temps ramifié* :



(plusieurs évolutions sont possibles,
ici vers le futur, mais éventuellement vers le passé)

Les logiques temporelles trouvent beaucoup d'applications en informatique :

- la formalisation de programmes parallèles,
- la spécification et la validation de protocoles de communication,
- la spécification et la validation de simulation de processus,
- la spécification et la mise au point du matériel...

Leur principal problème est leur complexité importante.

e) Les logiques permettant des raisonnements non monotones

Divers mécanismes permettent des raisonnements non monotones ; parmi ceux-ci, considérons quelques exemples :

• *Les systèmes de négation par échec*, considèrent un deuxième opérateur de négation '~' , (qui n'est pas, ici, le symbole de négation de Russell) et qui, pour une formule *f,* exprime que cette formule ne peut être prouvée ; $\sim f$ signifie "on ne peut déduire f ". On ajoute alors la règle d'inférence *"si* $\sim f$ *alors (sup)poser* $\neg f$*".*
Ce principe correspond à ce que nous appellerons *l'hypothèse du monde clos*.

• *La circonscription* est un opérateur du deuxième ordre qui limite l'application des prédicats aux individus dont on sait qu'ils les vérifient, soit en les désignant explicitement ou, mieux, par des formules qui les caractérisent.

• *La logique des défauts* utilise des "règles de défaut" de la forme

$\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$, que l'on peut lire :

"Si l'on croit α et qu'il est possible de croire β, alors on (sup)pose γ".

...

f) Les logiques de l'incertain

Elles cherchent à exprimer l'incertitude que l'on peut avoir sur la vérité ou la non-vérité des formules. Trois modes de représentation de l'incertain sont les plus souvent utilisés :

- *la théorie des probabilités* permet d'associer à chaque formule une "probabilité subjective" (1 pour une formule certainement vraie, 0 pour une formule certainement fausse) en utilisant les propriétés des probabilités.

- *la théorie des croyances* (ou *de Dempster-Shafer,* du nom de ses créateurs) permet d'associer à chaque sous-ensemble d'hypothèses une masse de probabilité et de définir à partir de ces masses la croyance et la plausibilité des formules.

- *la théorie des possibilités* exprime la certitude sur une formule par deux coefficients, la possibilité de cette formule et sa nécessité. Cette théorie est très liée aux logiques floues.

On peut considérer que la théorie des probabilités est la plus rigoureuse, suivie de la théorie de Dempster-Shafer, puis de la théorie des possibilités, mais des méthodes empiriques de représentation de l'incertain sont parfois utilisées avec efficacité.

g) La logique intuitionniste

Elle rejette les démonstrations par l'absurde (dans lesquelles, par exemple, pour prouver p, on prouve que $\neg p$ n'est pas vrai, c'est-à-dire produit une contradiction). Pour cette logique, *les seules preuves doivent être constructives*.

Le principe du tiers exclu ($p \vee \neg p \equiv \top$) n'est pas conservé.
Il s'agit d'une logique beaucoup plus rigoureuse que la logique classique, mais moins pratique.

Cette logique est peu utilisée en informatique, mais sa démarche est originale, c'est pourquoi nous la mentionnons ici, même si nous ne la développons pas dans cet ouvrage.

h) Autres logiques non classiques

Ce sont les logiques dynamiques, logique quantique, logiques linéaires, … Nous ne les aborderons pas ici, car elles sont peu utilisées, en informatique tout au moins.

Nous allons, dans les chapitres suivants, étudier plus en détail les logiques non classiques les plus intéressantes, en particulier celles qui intéressent l'informatique et les systèmes à base de connaissances. Cependant, pour ne pas nous limiter à un seul domaine et montrer le caractère général des logiques, tant classiques que non classiques, nous emprunterons beaucoup d'exemples et d'exercices à d'autres domaines que l'informatique.