Table des matières

Chapitre 1

DISTRIBUTIONS

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'étude des distributions. La théorie des distributions est due à L. Schwartz (1944-45). Auparavant, les distributions d'ordre fini avaient eté introduites par S. Sobolev (1935) afin de résoudre le problème de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques. La partie A introduit la notion de distribution en tant que forme linéaire sur l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact vérifiant en outre une propriété de continuité. On explique ensuite comment l'espace des fonctions localement intégrables se plonge naturellement dans l'espace des distributions. Le paragraphe 1.2 introduit la topologie faible sur $\mathcal{D}'$; le théorème 1.2.1, qui est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus, est évidemment fondamental. Le paragraphe 1.3 traite des distributions d'ordre fini et explique quelle est la signification topologique de cette notion ; en particulier, ceci permet de faire le lien avec la théorie des mesures de Radon. S'il est utile de connaître la définition de l'ordre d'une distribution, on peut, en première lecture, se dispenser des aspects topologiques qui ne seront pas utilisés dans la suite d'une façon essentielle.

Dans la partie B, on étudie (paragraphe 1.4 à 1.8) les premières opérations sur les distributions : multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et dérivation. En particulier, on définit la dérivée de toute distribution, cette notion généralisant la dérivation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Une distribution admet des dérivées de tout ordre ; une fonction continue par exemple est indéfiniment dérivable au sens des distributions ! Le calcul effectif des dérivées nécessite bien souvent une formule d'intégration par parties, c'est-à-dire en dimension quelconque la formule de Stokes dont nous avons rappelé une version (formule (1.8.1)). L'étude du support d'une distribution est faite au paragraphe 1.9 et repose sur le théorème de partition de l'unité le plus simple (théorème 1.9.1). Ce théorème permet d'expliquer le caractère local des distributions, c'est-à-dire la possibilité de recoller des distributions : en langage moderne, $\mathcal{D}'$ est un faisceau. Le paragraphe 1.11 étudie les distributions à support compact ; ces distributions s'identifient naturellement à des formes linéaires continues sur l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty$ (théorème 1.11.2) et possèdent la propriété remarquable d'être prolongeables par 0 à tout l'espace. Le paragraphe

1.12 contient quelques théorèmes de structure ; on retiendra en particulier qu'une distribution est toujours localement la dérivée d'une fonction continue.

La partie C est consacrée à l'étude des distributions tempérées. Une distribution tempérée est en fait une forme linéaire continue sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ des fonctions à décroissance rapide. La transformation de Fourier induit un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}$ sur lui-même dont le transposé est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'$ sur lui-même. On obtient ainsi la définition de la transformée de Fourier de toute distribution tempérée qui étend les définitions de cette transformation sur L^1 et L^2. Le paragraphe 1.15 établit les propriétés élémentaires de cette transformation. La transformée de Fourier des distributions à support compact se prolongent à $\mathbb{C}^n$ en des fonctions entières (proposition 1.15.5).

La partie D a pour objet de définir le produit de convolution de deux distributions sous des hypothèses appropriées. A cet effet, on définit d'abord le produit tensoriel de deux distributions (théorème 1.16.1). Le produit de convolution de deux distributions $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est alors défini comme l'image du produit tensoriel $u \otimes v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ de ces distributions par l'addition, c'est-à-dire par l'application $\tau : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto x + y \in \mathbb{R}^n$; malheureusement, ceci n'a pas toujours un sens car l'application τ n'est pas une application propre et il faut se restreindre aux distributions telles que la restriction de τ au produit des supports de u et v soit propre. Ceci conduit à la définition 1.17.2 et à la formule (1.17.2). On établit ensuite les propriétés élémentaires du produit de convolution (proposition 1.17.3) ; l'associativité nécessite des hypothèses supplémentaires qui sont précisées (proposition 1.17.4). Deux distributions dont l'une est à support compact étant convolables, on peut effectuer des régularisations par convolution, ce qui permet de vérifier que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$ (proposition 1.18.5). Enfin, on calcule la transformée de Fourier du produit de convolution de deux distributions tempérées, l'une au moins étant à support compact (théorème 1.19.1).

La partie E étudie les opérateurs linéaires continus T de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ et établit d'abord le célèbre théorème des noyaux de L. Schwartz (théorème 1.21.4) qui affirme que de tels opérateurs admettent un noyau distribution. Le paragraphe 2.22 donne d'abord un contrôle du support de Tu en fonction du support de u, ce qui permet de caractériser les opérateurs tels que $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{E}'$ (théorème 1.22.3). Ceci conduit à la définition des opérateurs propres (définition 1.22.1) ; on étudie ces opérateurs, en particulier leur prolongement, par transposition (proposition 1.22.7). Le paragraphe 2.23 est consacré à l'étude des opérateurs régularisants, c'est-à-dire qui appliquent $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$; ce sont les opérateurs dont le noyau distribution est $\mathcal{C}^\infty$. On introduit enfin la notion de support singulier (définition 1.23.2) et on montre comment on peut contrôler le support singulier de Tu en fonction des supports singuliers de u et du noyau distribution de T.

A – Définitions

1.1 Définition et exemples

Les premières notions concernant les distributions sont apparues lors de l'étude d'équations aux dérivées partielles sous la forme de dérivées généralisées. A priori, on pourrait penser que les espaces de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ constituent un cadre fonctionnel naturel pour étudier de telles équations. En fait, il n'en n'est rien ; il n'existe pas de structure d'espace de Hilbert sur ces espaces et on ne dispose donc pas de toutes les techniques hilbertiennes. Bien entendu, on peut définir des structures préhilbertiennes, mais les espaces obtenus ne sont pas complets. Dans la théorie des distributions, on abandonne d'abord le cadre étroit des fonctions ou classe de fonctions. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une grandeur physique (Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$), l'observateur que nous sommes n'a accès à u que par l'intermédiaire d'instruments de mesure. Un instrument de mesure peut être considéré comme une fonctionnelle qui à u associe une valeur numérique, fonctionnelle qu'on peut supposer linéaire en première approximation. L'instrument de mesure idéal fournit la valeur $u(a)$ de u en un point $a \in \Omega$ et correspond à la fonctionnelle $u \mapsto u(a)$, c'est-à-dire à la mesure de Dirac au point a. Un tel instrument n'existe pas et, dans la pratique, on obtient une moyenne des valeurs de u au voisinage de a, c'est-à-dire en prenant une mesure admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue une fonctionnelle de la forme

$$u \mapsto < u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx.$$

On constate alors que, si φ décrit un espace fonctionnel adéquat, la donnée des réels $< u, \varphi >$ détermine u de façon unique : autrement dit, u s'identifie à la donnée de la forme linéaire $\varphi \mapsto < u, \varphi >$.

Une distribution sera donc définie comme une forme linéaire sur un espace fonctionnel. Nous allons d'abord décrire l'espace fonctionnel utilisé.

On note Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{K}$ sera soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Si $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ est une fonction, le support de φ est par définition l'adhérence dans Ω de l'ensemble $\{x \in \Omega\,;\ \varphi(x) \neq 0\}$; ce support, noté supp φ, est donc fermé dans Ω. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire non nul, on a évidemment

$$\text{supp}\,(\lambda\,\varphi) = \text{supp}\,\varphi \tag{1.1.1}$$

et, si $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions,

$$\text{supp}\,(\varphi + \psi) \subset \text{ supp}\,\varphi \cup \text{ supp}\,\psi. \tag{1.1.2}$$

Rappelons [58, paragraphe 1.8] comment on définit une topologie d'espace de Fréchet sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non vides de Ω, pour tout compact $K \in \mathcal{K}$ et tout entier k, on pose

$$\|\varphi\|_{K,k} = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq k}} |D^\alpha\varphi(x)|. \tag{1.1.3}$$

Lorsque K décrit $\mathcal{K}$ et k décrit $\mathbb{N}$, la famille de semi-normes $\|\bullet\|_{K,k}$ définit une structure d'espace de Fréchet sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Si K est une partie compacte non vide de Ω, on note $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ dont le support est contenu dans K ; il résulte des formules (1.1.1) et (1.1.2) que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Ce sous-espace est fermé : en effet, si (φ_n) est une suite de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ convergeant vers φ dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, toutes les fonctions φ_n sont nulles dans $\Omega - K$ et, la suite (φ_n) convergeant simplement vers φ, il en est de même de φ, ce qui signifie que le support de φ est contenu dans K, soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ et ceci suffit pour conclure, l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ étant métrisable.

Muni de la topologie d'e.l.c. induite par celle de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, le sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est donc un espace de Fréchet. Sur ce sous-espace on peut définir une famille de semi-normes équivalente plus simple que la famille (1.1.3). Pour tout entier k, on pose

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\substack{x\in \Omega\\ |\alpha|\leq k}} |D^\alpha\varphi(x)|\,; \tag{1.1.4}$$

si φ appartient à l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$, on a pour tout compact $L \in \mathcal{K}$

$$\|\varphi\|_{L,k} \leq \|\varphi\|_k = \|\varphi\|_{K,k}$$

et ceci prouve que les semi-normes $\|\bullet\|_k$, où k décrit $\mathbb{N}$, définissent la topologie du sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$. On observera que la semi-norme $\|\bullet\|_0$ est simplement la norme de la topologie de la convergence uniforme.

On note enfin

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \mathcal{D}_K(\Omega) \tag{1.1.5}$$

l'espace de toutes les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ; cet espace est toujours d'après (1.1.1) et (1.1.2) un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On peut munir cet espace de la topologie limite inductive [58, paragraphe 2.22]

$$\mathcal{D}(\Omega) = \liminf_{K\in\mathcal{K}} \mathcal{D}_K(\Omega);$$

cette topologie sera appelée topologie forte de $\mathcal{D}$.

Remarque 1.1.1 L'ouvert Ω peut s'écrire comme la réunion d'une suite croissante (K_n) de compacts telle tout compact soit contenu dans K_n dès que n est suffisamment grand. D'après le lemme 2.22.5 de [58], $\mathcal{D}(\Omega)$ est alors la limite inductive de la suite d'espaces de Fréchet $(\mathcal{D}_{K_n}(\Omega))$, soit

$$\mathcal{D}(\Omega) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{D}_{K_n}(\Omega).$$

On observera que cette limite inductive est stricte : l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est donc une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet.

D'après la proposition 2.22.4 de [58], une forme linéaire $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ est continue si, et seulement si, sa restriction $u|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathbb{K}$ à chaque sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 1.1.1 *Une forme linéaire $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ est appelée une distribution sur Ω si sa restriction à chaque sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est une forme linéaire continue, c'est-à-dire si*

(1.1.6) $$(\forall K \in \mathcal{K})(\exists c \geq 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega))(|u(\varphi)| \leq c\,\|\varphi\|_k).$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions sur Ω.

L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est donc le dual de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de sa topologie forte ; on notera $< u, \varphi >$ le crochet de dualité entre les espaces $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$. On peut donc définir des topologies faibles $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ sur les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ [57, paragraphe 3.15] ; on parle de $\mathcal{D}$ faible et de $\mathcal{D}'$ faible.

Bien que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on se gardera bien de croire que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$ (remarque 1.1.3).

Remarque 1.1.2 On peut définir sur l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, la topologie de la convergence bornée, topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée de $\mathcal{D}$; cette topologie, dite topologie forte de $\mathcal{D}'$, est évidemment strictement plus fine que la topologie faible. Cependant, une suite de $\mathcal{D}'$ qui converge faiblement converge fortement : en effet, d'après le théorème de Banach-Steinhaus [57, théorème 3.12.10], si une suite (u_n) converge faiblement, pour tout compact $K \subset \Omega$, la suite $(u_n|_{\mathcal{D}_K})$ converge uniformément sur tout compact de l'espace $\mathcal{D}_K$, donc sur tout borné de cet espace et, vu la caractérisation des parties bornées de l'espace $\mathcal{D}$ [58, théorème $2.22.13_4$], ceci prouve que la suite (u_n) converge uniformément sur toute partie bornée de $\mathcal{D}$.

Exemple 1.1.1 La distribution de Dirac Soit a un point de Ω, la forme linéaire

$$\delta_a : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{K}$$

est une distribution sur Ω vu l'inégalité

(1.1.7) $$|\delta_a(\varphi)| \leq \|\varphi\|_0.$$

Lorsque a est l'origine de $\mathbb{R}^n$, la distribution δ_0 est simplement notée δ.

Exercice 1.1.1 1. Montrer que, dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, toute partie bornée est relativement compacte (propriété de Montel) [utiliser le théorème 2.22.13 et le corollaire 1.8.3 de [58]].

2. En déduire qu'une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, qui converge faiblement, converge fortement [utiliser l'exercice 3.16.2 de [57]].

L'espace $\mathcal{D}'$ n'est pas un espace de fonctions sur Ω ; on ne peut pas définir (en général) la valeur d'une distribution en un point de Ω, mais l'espace $\mathcal{D}'$ est suffisamment vaste pour qu'on puisse y plonger la plupart des espaces fonctionnels utiles et, en particulier, l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Plus généralement, nous allons montrer que toute fonction localement intégrable définit une distribution. Rappelons qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ est dite localement intégrable si, pour tout compact K de Ω, la restriction de f à K est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ; de telles fonctions sont mesurables au sens de Lebesgue. On note $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions localement intégrables et $L^1_{loc}(\Omega)$ le quotient de cet espace vectoriel par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\mu$, $f \equiv g$ (mod. $\mathcal{R}_\mu$) signifiant que f et g sont égales presque partout pour la mesure de Lebesgue μ. Soient $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, la fonction $f\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ est intégrable car elle est mesurable en tant que produit de fonctions mesurables et $|f\varphi| \leq c\,|f|\mathbb{1}_K$ où $c = \|\varphi\|_0$. On peut donc définir la forme linéaire sur $\mathcal{D}$

$$< u_f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.1.8}$$

On définit ainsi une distribution u_f sur Ω vu l'inégalité

$$| < u_f, \varphi > | \leq c_K \,\|\varphi\|_0 \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \text{ où } c_K = \int_K |f(x)|\,dx.$$

Si $f = g\ p.p.$, il est clair que $u_f = u_g$; à toute (classe de) fonction $[f] \in L^1_{loc}(\Omega)$, on peut donc associer une distribution $u_{[f]}$ par la formule $u_{[f]} = u_f$ où $f \in [f]$ est un représentant quelconque de la classe d'équivalence $[f]$. On définit ainsi une application de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on a la

Proposition 1.1.1 *L'application*

$$[f] \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto u_{[f]} \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est linéaire et injective.

La linéarité est évidente et l'injectivité résulte du lemme 1.1.3 qui suit. Rappelons [58, paragraphe 2.33] auparavant la méthode de régularisation par convolution. Étant donné une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$, on pose $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ et, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$f_\varepsilon(x) = (f \star \rho_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

La fonction f_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, si f appartient à l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, f_ε appartient à l'espace $\big(\mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{L}^1\big)(\mathbb{R}^n)$ et converge vers f dans $\mathcal{L}^1$ lorsque ε tend vers 0. Une régularisation par convolution permet de construire par exemple des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égales à 1 sur un compact et à support dans un voisinage donné de ce compact, soit

Proposition 1.1.2 *Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et Ω un voisnage ouvert de K, alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ sur K et supp $\varphi \subset \Omega$.*

Preuve Soit K' un voisinage compact de K contenu dans Ω, on pose $\varphi_\varepsilon = \mathbb{1}_{K'} \star \rho_\varepsilon$, soit

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K'}(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{K'} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Cette fonction φ_ε est $\mathcal{C}^\infty$ et $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ en choisissant $\rho \geq 0$. Prenons en outre ρ à support dans la boule unité, alors $\varphi_\varepsilon = 1$ sur K dès que $0 < \varepsilon \leq d(K, \mathbb{R}^n - K')$ et le support de φ_ε est contenu dans le voisinage fermé d'ordre ε de K', ce support est donc compact et il est contenu dans Ω dès que $0 < \varepsilon < d(K', \mathbb{R}^n - \Omega)$. Q.E.D.

Lemme 1.1.3 *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $f = 0$ p.p.*

Preuve Soit K un compact de Ω et soit $0 < \varepsilon_0 < d(K, \mathbb{R}^n - \Omega)$, alors $K_0 = \{x \in \Omega\,;\, d(x,K) \leq \varepsilon_0\}$ est une partie compacte de Ω. Choisissons $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$; pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $x \in K$, la fonction $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)$ appartient à l'espace $\mathcal{D}_{K_0}(\Omega)$; on a donc par hypothèse

$$\int_\Omega f(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0 \text{ pour tout } x \in K.$$

Autrement dit, si $f_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ désigne la fonction

$$f_0(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in K_0, \\ 0 & \text{si } y \in \mathbb{R}^n - K_0, \end{cases}$$

on a $(f_0 \star \rho_\varepsilon)(x) = 0$ pour tout $x \in K$. En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $f(x) = 0$ pour presque tout x dans K, donc dans Ω, vu que Ω peut s'écrire comme une réunion dénombrable de compacts. Q.E.D.

L'injection $f \mapsto u_f$ permet d'identifier l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ à son image dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Autrement dit, la distribution associée à une fonction f localement intégrable sera notée encore f : on ne distingue pas f et la distribution qu'elle définit et on écrira donc

$$< f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Compte tenu de l'identification précédente, on a l'inclusion

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.1.9}$$

On observera que le fait de disposer sur Ω d'une mesure, à savoir la mesure de Lebesgue, joue un rôle essentiel pour plonger $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Une distribution appartenant à $L^1_{loc}(\Omega)$ sera dite localement intégrable. L'espace $\mathcal{D}'$ est beaucoup plus gros que l'espace L^1_{loc} : une distribution n'est pas nécessairement localement intégrable. L'exemple le plus simple est la distribution de Dirac δ_a. Supposons en effet qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\varphi(a) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,; \tag{1.1.10}$$

si $\Omega' = \Omega - \{a\}$, on aurait alors $\int_{\Omega'} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, d'où $f(x) = 0$ pour presque tout x dans Ω' d'après le lemme 1.1.3, donc pour preque tout x dans Ω. Ceci est en contradiction avec (1.1.10) car il existe des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ non nulles au point a.

Remarque 1.1.3 L'exemple le plus simple de fonction localement intégrable consiste à prendre la fonction constante et égale à 1, soit $f \equiv 1$. Cette fonction est alors identifiée à la distribution

$$< u, \varphi >= \int_\Omega \varphi(x)\,dx.$$

On notera que cette forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas continue si on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie $\mathcal{C}^\infty$. En effet, soit (K_j) une suite croissante de compacts de Ω telle que tout compact de Ω soit contenu dans K_j dès que j est suffisamment grand et soit (φ_j) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que supp $\varphi_j \subset \Omega - K_j$; une telle suite converge vers 0 pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ car $\|\varphi_j\|_{K,k} = 0$ dès que $K \subset K_j$, c'est-à-dire dès que j est suffisamment grand. On peut d'autre part construire les fonctions φ_j telles que $\int_\Omega \varphi_j(x)\,dx = 1$: en effet, il suffit de prendre $\varphi_j(x) = \rho_\varepsilon(x - x_j)$ où $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$, x_j est un point de $\Omega - K_j$ et $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit pour que supp $\varphi_j \subset \Omega - K_j$. On obtient ainsi une suite qui converge vers 0 pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$, mais telle que $< u, \varphi_j >= 1$, ce qui prouve le résultat voulu.

Exemple 1.1.2 La distribution d'Heaviside Sur $\mathbb{R}$, la distribution d'Heaviside est la fonction localement intégrable

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a donc

$$H : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Ayant plongé L^1_{loc} dans $\mathcal{D}'$, les sous-espaces de $L^1_{loc}(\Omega)$

$$L^p(\Omega),\ L^p_{loc}(\Omega)\ (1 \leq p \leq \infty) \text{ et } \mathcal{C}^k(\Omega)\ (0 \leq k \leq \infty)$$

s'identifient à des sous-espaces de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on a les inclusions

$$\mathcal{C}^k(\Omega) \cup L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Cela a donc un sens de dire qu'une distribution est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ou qu'elle appartient à $L^p(\Omega)$. Si u est une distribution de $L^p(\Omega)$, l'inégalité de Hölder s'écrit

$$|< u, \varphi >| \leq c\,\|\varphi\|_q \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1.11}$$

où q désigne l'indice conjugué de p (1/p+1/q=1), $\|\varphi\|_q$ est la norme de φ dans L^q et $c = \|u\|_p$.

La propriété (1.1.11) caractérise en fait les distributions de L^p lorsque $1 < p \leq \infty$.

Proposition 1.1.4 *Soit $1 < p \leq \infty$, une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à L^p si, et seulement si, (1.1.11) est vérifié ; la plus petite constante $c \geq 0$ pour laquelle (1.1.11) a lieu est alors $\|u\|_p$.*

Preuve On suppose donc que (1.1.11) est vérifié et on note $c \geq 0$ la plus petite constante qui convient. Alors, u est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie L^q dont la norme vaut c. D'après le théorème de Hahn-Banach [57, théorème 3.13.6], il existe une forme linéaire continue $\hat{u}$ sur L^q qui prolonge u et de même norme c. Étant donné que $1 \leq q < \infty$, le théorème 2.36.1 de [58] prouve qu'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ telle que $\|f\|_p = c$ et

$$\hat{u}(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \text{ pour tout } \varphi \in L^q(\Omega)\,;$$

en prenant φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, ceci prouve que $u = f$ et le résultat voulu. Q.E.D.

Lorsque $p = 1$, donc $q = \infty$, (1.1.11) ne caractérise pas les distributions intégrables comme le montre l'exemple de la distribution de Dirac ; la signification précise de (1.1.11) sera donnée ultérieurement (remarque 1.3.4).

Remarque 1.1.4 Dans tout ce qui précède, il n'est pas utile de préciser si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une distribution u est réelle ou à valeurs réelles si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs réelles, $< u, \varphi >$ est réel. Comme dans le cas des fonctions, on peut définir la partie réelle et la partie imaginaire de toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit d'abord la complexe conjuguée de u en posant

$$< \overline{u}, \varphi >= \overline{< u, \overline{\varphi} >} \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,;$$

il est clair que $\overline{u}$ est une distribution, ce qui permet de définir les distributions

$$\Re e\, u = \frac{u + \overline{u}}{2} \text{ et } \Im m\, u = \frac{u - \overline{u}}{2i}.$$

On a évidemment $u = \Re e\, u + i\,\Im m\, u$ et, si φ est à valeurs réelles,

$$< \Re e\, u, \varphi >= \Re e\ < u, \varphi >,\ < \Im m\, u, \varphi >= \Im m\ < u, \varphi >,$$

ce qui prouve que $\Re e\, u$ et $\Im m\, u$ sont des distributions réelles. Bien entendu, lorsque u est une (classe de) fonction localement intégrable, ces définitions coïncident avec les définitions usuelles.

1.2 Topologies faible et forte sur $\mathcal{D}'$

Rappelons que la topologie faible $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ sur $\mathcal{D}'$ est définie par les semi-normes

$$\|u\|_\varphi = |< u, \varphi >| \tag{1.2.1}$$

où φ décrit $\mathcal{D}$. Cette topologie est séparée et une suite (u_n) de distributions converge vers u pour cette topologie si, et seulement si,

$$< u, \varphi >= \lim_{n\to\infty} < u_n, \varphi > \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,;$$

on dit alors que la suite (u_n) converge au sens des distributions. D'après la remarque 1.1.2, une telle suite converge également pour la topologie forte de $\mathcal{D}'$.

Exemple 1.2.1 L'espace $L^2(\Omega)$ étant séparable [58, corollaire 2.32.3], il admet une base hilbertienne dénombrable (e_n). Une telle suite (e_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On a en effet $< e_n, \varphi >= (\varphi|\overline{e_n})$ en notant $(\bullet|\bullet)$ le produit scalaire usuel de L^2 et par conséquent la suite $(< e_n, \varphi >)$ appartient à $l^2(\mathbb{N})$ et converge donc bien vers 0.

Rappelons [58, paragraphe 2.31] qu'on définit sur l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$, et plus généralement sur $L^p_{loc}(\Omega)$, une structure d'espace de Fréchet en prenant comme semi-normes

$$\|f\|_{p,K} = \|f|_K\|_{L^p(K)}$$

où K décrit l'ensemble des parties compactes de Ω. L'injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est alors continue vu que, pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$\|f\|_\varphi \leq c\,\|f\|_{1,K} \text{ pour tout } f \in L^1_{loc}(\Omega)$$

où $c = \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|$. Ceci montre que l'espace L^1_{loc} est continûment plongé dans $\mathcal{D}'$: une suite de fonctions localement intégrables qui converge en moyenne sur tout compact converge dans $\mathcal{D}'$. Il en est de même des espaces L^p_{loc} car l'injection canonique de L^p_{loc} dans L^1_{loc} est continue vu que (Hölder)

$$\|f\|_{1,K} \leq \mu(K)^{1-1/p}\,\|f\|_{p,K} \text{ pour tout } f \in L^p_{loc}(\Omega).$$

L'injection canonique de L^p dans L^p_{loc} étant continue (car $\|f\|_{p,K} \leq \|f\|_p$) ainsi que l'injection canonique de $\mathcal{C}^k$ dans L^1_{loc}, on constate que tous les espaces L^p, L^p_{loc} et $\mathcal{C}^k$ sont continûment plongés dans $\mathcal{D}'$. Par exemple, la continuité de l'injection canonique de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ signifie que toute suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact converge au sens des distributions.

Exercice 1.2.1 Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx = 1$, on pose $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}u(x/\varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$, montrer que u_ε converge vers δ lorsque ε tend vers 0.

Voici une application très importante du théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 1.2.1 *Soit (u_n) une suite de distributions telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(< u_n, \varphi >)$ admette une limite notée $< u, \varphi >$, alors u est une distribution et la suite (u_n) converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En outre, pour toute suite (φ_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(< u_n, \varphi_n >)$ converge vers $< u, \varphi >$ et pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c \geq 0$ et un entier k tels que $| < u_n, \varphi > | \leq c\,\|\varphi\|_k$ pour tout n et tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.*

Preuve L'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ étant un espace de Fréchet, le théorème de Banach-Steinhaus [57, théorème 3.12.10] affirme que la restriction de u à $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est une forme linéaire et continue, ce qui prouve que u est une distribution sur Ω. De plus, si (φ_n) est une suite convergeant vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, d'après le théorème $2.22.13_5$ de [58], il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que la suite (φ_n) soit une suite convergente vers φ dans l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$; d'après le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(< u_n, \varphi_n >)$ converge vers $< u, \varphi >$. Quant à la dernière assertion, elle signifie que la suite $(u_n|_{\mathcal{D}_K})$ est équicontinue, équicontinuité qui résulte de la proposition 3.12.8 de [57]. Q.E.D.

Ce théorème est très utile dans la pratique pour vérifier qu'une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ est une distribution.

Exercice 1.2.2 1. Montrer que la forme bilinéaire

$$B : (u, \varphi) \in \mathcal{D}' \times \mathcal{D} \mapsto < u, \varphi > \in \mathbb{K}$$

est séquentiellement continue lorsque l'espace $\mathcal{D}$ est muni de sa topologie affaiblie $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et l'espace $\mathcal{D}'$ de sa topologie faible [utiliser l'exercice 1.1.1].

On se propose de démontrer que cette forme bilinéaire n'est pas continue, même en prenant comme topologie sur $\mathcal{D}$ sa topologie forte.

2. Étant donné deux e.l.c. $E, (\|\bullet\|_i)_{i\in I}$, et $F, (\|\bullet\|_k)_{k\in K}$, montrer qu'une forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est continue si, et seulement si, il existe une constante $c \geq 0$ et des parties finies $J \in \mathcal{F}(I)$, $L \in \mathcal{F}(K)$ telles que

$$|B(x, y)| \leq c\,\|x\|_J \|y\|_L \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F$$

[on rappelle [57, exercice 3.10.3] que B est continu dès qu'elle est continue au point $(0, 0) \in E \times F$].

3. Étant donné un e.l.c. séparé $E, (\|\bullet\|_i)_{i\in I}$, on suppose continue la forme bilinéaire $B : (x', x) \in E' \times E \mapsto x'(x) \in \mathbb{K}$ lorsque E est muni de sa topologie initiale et E' de la topologie faible $\sigma(E', E)$.

a. Montrer qu'il existe une constante $c \geq 0$, une famile finie $(x_k)_{k\in K}$ d'éléments de E et une partie finie $J \in \mathcal{F}(I)$ telles que

$$|x'(x)| \leq c \max_{k\in K} |x'(x_k)| \times \|x\|_J \text{ pour tout } (x', x) \in E' \times E.$$

b. En déduire que E est nécessairement de dimension finie [utiliser le lemme 3.15.2 de [57]].

c. Conclure.

Remarque 1.2.1 Soient $E = \liminf_{i\in I} E_i$ une limite inductive d'e.l.c. métrisables et $T : E \to \mathcal{D}'(\Omega)$ une application linéaire et continue, l'espace $\mathcal{D}'$ étant muni de sa topologie faible. Alors, T est séquentiellement continue, donc séquentiellement continue lorsque $\mathcal{D}'$ est muni de sa topologie forte d'après la remarque 1.1.2. L'espace E_i étant métrisable, ceci prouve que $T|_{E_i}$, donc T [58, proposition 2.22.4], est continue lorsque l'espace $\mathcal{D}'$ est muni de sa topologie forte.

Par exemple, si E désigne l'un des espaces L^p, L^p_{loc} ou $\mathcal{C}^k$, l'injection canonique $i : E \to \mathcal{D}'$ est continue lorsque $\mathcal{D}'$ est muni de sa topologie forte.

Remarque 1.2.2 Soient E et F des e.l.c. séparés et $T : E \to F'_\sigma$ une application linéaire continue pour la topologie initiale de E et à valeurs dans le dual faible F'_σ, c'est-à-dire pour la topologie faible $\sigma(F', F)$. D'après la remarque 3.18.2 de [57], T est faiblement continu, c'est-à-dire continu de E_σ, E muni de la topologie affaiblie, dans F'_σ : en effet, le dual de F'_σ s'identifiant à F [57, remarque 3.15.1], la topologie affaiblie de la topologie $\sigma(F', F)$ coïncide avec cette topologie $\sigma(F', F)$. En partculier, si $T : E \to \mathcal{D}'(\Omega)$ est une application linéaire et continue, l'espace $\mathcal{D}'$ étant muni de sa topologie faible, T est continu de E_σ dans $\mathcal{D}'$ faible.

Par exemple, si E désigne l'un des espaces L^p, L^p_{loc} ou $\mathcal{C}^k$, l'injection canonique $i : E \to \mathcal{D}'$ est continue de E_σ dans $\mathcal{D}'$ muni de sa topologie faible.

Exercice 1.2.3 1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on note $\check{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ la fonction $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$; soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, montrer qu'on définit une distribution $\check{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ en posant

$$< \check{u}, \varphi > = < u, \check{\varphi} > \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

2. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on pose $\check{f}(x) = f(-x)$; montrer que $\check{u}_f = u_{\check{f}}$.

Note Si $u = \check{u}$, on dit que u est une distribution paire et, si $u = -\check{u}$, que u est une distribution impaire.

Exercice 1.2.4 Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la limite suivante existe

$$< v.p.\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

et définit une distribution impaire notée $v.p.1/x$: on dit qu'il s'agit de la valeur principale de la fonction non localement intégrable $x \mapsto 1/x$, notion introduite par Cauchy.

Exercice 1.2.5 Soit $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{K}$ une fonction continue telle que $f(\lambda x) = \lambda^{-n} f(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \neq 0$. Montrer que la limite

$$< u, \varphi >= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| > \varepsilon} f(x)\varphi(x)\, dx$$

existe pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f\, d\sigma = 0$ où $d\sigma$ désigne la mesure superficielle sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est alors une distribution sur $\mathbb{R}^n$.

1.3 Distributions d'ordre fini

Dans la définition 1.1.1 des distributions, s'il existe un entier k indépendant du compact K tel que (1.1.6) soit vrai, on dit que la distribution est d'ordre fini et le plus petit entier k tel que (1.1.6) soit vrai est alors appelé l'ordre de la distribution. On note $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions d'ordre $\leq k$ et $\mathcal{D}'^{F}(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les distributions d'ordre fini. Les distributions localement intégrables sont d'ordre 0 ; il en est de même de la distribution de Dirac. Comme cela apparaitra au cours de cet exposé, l'ordre d'une distribution mesure son irrégularité : plus l'ordre est élevé, plus la distribution est irrégulière. Il existe même des distributions d'ordre infini (exercice 1.10.1).

Exercice 1.3.1 Montrer que la distribution $v.p.1/x$ (exercice 1.2.4) est d'ordre 1 [pour démontrer que cette distribution n'est pas d'ordre 0, on raisonnera par l'absurde en utilisant des fonctions $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon < 1$, telles que $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$, $\varphi_\varepsilon = 1$ sur $[\varepsilon, 1]$ et supp $\varphi_\varepsilon \subset]0, 2]$].

Exercice 1.3.2 Montrer que les suites de distributions suivantes convergent

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{1}{k^2}} - n\,\delta_0, \tag{1.3.1}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\delta_{\frac{1}{k}} - \ln(n)\,\delta_0, \tag{1.3.2}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\delta_{\frac{1}{k}} \tag{1.3.3}$$

et que les distributions limites sont d'ordre 1.

Nous allons essayer de comprendre quelle est la signification topologique de cette notion. Le procédé qui conduit à la définition de l'espace $\mathcal{D}'$ à partir de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact peut être répété à partir d'autres espaces fonctionnels. Considérons ici l'espace $\mathcal{C}^k(\Omega)$ où k est fini ; cet espace est un espace de Fréchet lorsqu'on le munit des semi-normes (1.1.3) où K décrit l'ensemble $\mathcal{K}$ des parties compactes non vides de Ω. Notons $\mathcal{C}^k_K(\Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ constitué des fonctions à support contenu dans le compact K. Ce sous-espace est évidemment fermé dans $\mathcal{C}^k(\Omega)$ et sa topologie peut être définie par la seule semi-norme (1.1.4) qui est donc une norme d'espace de Banach. Notons enfin

$$\mathcal{C}^k_0(\Omega) = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \mathcal{C}^k_K(\Omega)$$

l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact. On munit cet espace de la topologie limite inductive de la famille d'espaces de Banach $(\mathcal{C}^k_K)_{K\in\mathcal{K}}$, soit

$$\mathcal{C}^k_0(\Omega) = \varinjlim_{K\in\mathcal{K}} \mathcal{C}^k_K(\Omega).$$

Une forme linéaire $u : \mathcal{C}^k_0(\Omega) \to \mathbb{K}$ est continue si, et seulement si, sa restriction à chaque sous-espace $\mathcal{C}^k_K(\Omega)$ est continue. Dire que u appartient au dual $(\mathcal{C}^k_0)'(\Omega)$ signifie donc que

$$(1.3.4) \qquad (\forall K \in \mathcal{K})(\exists c \geq 0)(\forall \varphi \in \mathcal{C}^k_K(\Omega))(|u(\varphi)| \leq c\,\|\varphi\|_k).$$

Lorsque $k = 0$, cette définition est précisément celle d'une mesure de Radon [58, définition 2.19.1] sur l'espace localement compact Ω ; $(\mathcal{C}^0_0)'(\Omega)$ est donc l'espace $M(\Omega)$ des mesures de Radon.

Si u appartient à l'espace $(\mathcal{C}^k_0)'(\Omega)$, sa restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ est par définition même une distribution d'ordre $\leq k$; on définit ainsi une application

$$(1.3.5) \qquad \Phi : u \in (\mathcal{C}^k_0)'(\Omega) \mapsto u|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega).$$

On a alors le

Théorème 1.3.1 *L'application Φ est une bijection linéaire.*

Cette bijection linéaire permet d'identifier l'espace $(\mathcal{C}^k_0)'$ et l'espace $\mathcal{D}'^{(k)}$; en particulier, on identifie l'espace des mesures de Radon $M(\Omega)$ et l'espace des distributions d'ordre 0.

La démonstration du théorème utilisera le lemme suivant.

Lemme 1.3.2 *Dans l'espace $\mathcal{C}^k_0(\Omega)$, le sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est partout dense. Plus précisément, soient K une partie compacte de Ω, $L \subset \Omega$ un voisinage compact de K et $\varphi \in \mathcal{C}^k_K(\Omega)$, alors il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}_L(\Omega)$ qui converge vers φ pour la topologie $\mathcal{C}^k$.*

Preuve Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k_K(\Omega)$, notons $\varphi^0 \in \mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}^n)$ le prolongement de φ par 0 en dehors de Ω et soit $\varphi^0_\varepsilon = \varphi^0 \star \rho_\varepsilon$. Cette fonction φ^0_ε est $\mathcal{C}^\infty$, à support compact et appartient à l'espace $\mathcal{D}_L(\mathbb{R}^n)$ dès que $0 < \varepsilon < d(K, \mathbb{R}^n - L)$ en supposant ρ à support dans la boule unité. D'après la proposition 2.33.3 de [58], φ^0_ε converge vers

φ^0 dans l'espace $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ lorsque ε tend vers 0 ; par restriction à Ω, $\varphi^0_\varepsilon|_\Omega \in \mathcal{D}_L(\Omega)$ converge vers φ pour la topologie $\mathcal{C}^k$, ce qui prouve le lemme. Q.E.D.

Remarque 1.3.1 Lorsque φ est une fonction positive, on peut supposer les fonctions φ_n positives : il suffit d'effectuer la régularisation avec une fonction $\rho \geq 0$.

Preuve du théorème 1.3.1 La linéarité de Φ est évidente et son injectivité résulte de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^k_0(\Omega)$.

Montrons ensuite que Φ est surjective. Soit u une distribution d'ordre $\leq k$; il s'agit de démontrer que u est la restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une forme $v \in (\mathcal{C}^k_0)'(\Omega)$. Soient K un compact de Ω et $L \subset \Omega$ un voisinage compact de K. La distribution u étant d'ordre $\leq k$, sa restriction à $\mathcal{D}_L(\Omega)$ est une forme linéaire et continue pour la topologie $\mathcal{C}^k$, donc se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur l'adhérence de $\mathcal{D}_L(\Omega)$ dans l'espace $\mathcal{C}^k(\Omega)$ et par restriction (lemme 1.3.2) définit une forme linéaire

$$v_{K,L} : \mathcal{C}^k_K(\Omega) \to \mathbb{K}$$

continue pour la topologie $\mathcal{C}^k$. Par construction, on a $u|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} = v_{K,L}|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$.

Montrons que $v_{K,L}$ ne dépend pas du choix du compact L. Soient $L_1 \subset \Omega$ et $L_2 \subset \Omega$ deux voisinages compacts de K. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k_K(\Omega)$, il existe une suite (φ_n) de l'espace $\mathcal{D}_{L_1 \cap L_2}(\Omega)$ qui converge vers φ pour la topologie $\mathcal{C}^k$, d'où

$$v_{K,L_1}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n) = v_{K,L_2}(\varphi).$$

Nous pouvons donc poser $v_K = v_{K,L}$ et pour conclure il suffit de vérifier qu'il existe $v \in (\mathcal{C}^k_0)'(\Omega)$ tel que $v|_{\mathcal{C}^k_K} = v_K$. Autrement dit, si K_1 et K_2 sont deux compacts de Ω, il s'agit de vérifier que $v_{K_1}(\varphi) = v_{K_2}(\varphi)$ lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^k_{K_1 \cap K_2}(\Omega)$. Or, si $L \subset \Omega$ est un voisinage compact de $K_1 \cup K_2$, il existe une suite (φ_n) de $\mathcal{D}_L(\Omega)$ qui converge vers φ pour la topologie $\mathcal{C}^k$, d'où

$$v_{K_i}(\varphi) = v_{K_i,L}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n)$$

et ceci prouve le résultat souhaité. Q.E.D.

Remarque 1.3.2 Si u est une distribution d'ordre $\leq k$, on notera que la valeur $u(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^k_K(\Omega)$ est donnée par la formule $u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n)$ où (φ_n) est une suite de $\mathcal{D}_L(\Omega)$ convergeant vers φ pour la topologie $\mathcal{C}^k$, L désignant un voisinage compact de K.

Exercice 1.3.3 Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $< u, \varphi >$ est réel et positif.

1. Montrer qu'une distribution positive est une mesure réelle positive et que $| < u, \varphi > | \leq c \|\varphi\|_0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$ où $c =< u, \theta >$, θ désignant une fonction de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur K [lorsque $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ est à valeurs réelles, soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur K, remarquer que $-\|\varphi\|_0\, \theta \leq \varphi \leq \|\varphi\|_0\, \theta$, en déduire que $< u, \varphi >$ est réel et que $| < u, \varphi > | \leq < u, \theta > \ \|\varphi\|_0$; lorsque φ est à valeurs complexes, remplacer φ par $\Re e\,(\lambda\varphi)$ avec un choix convenable de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$].

2. Soit (u_n) une suite de distributions positives convergeant vers une distribution u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, montrer que u est une mesure positive et que la suite (u_n) converge vers u pour la topologie vague [utiliser le lemme 1.3.2 et l'inégalité de 1.].

Les espaces $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ et $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ étant en dualité, on peut définir sur l'espace $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ la topologie faible associée à cette dualité ; cette topologie est définie par la famille de semi-normes

$$\|u\|_\varphi = |u(\varphi)| \text{ où } \varphi \text{ décrit } \mathcal{C}_0^k(\Omega).$$

On a évidemment les inclusions

$$\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega) \subset \mathcal{D}'^{(l)}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \text{ pour } k \leq l$$

et les injections canoniques sont continues lorsqu'on munit les espaces de leur topologie faible. En particulier, sur l'espace $M(\Omega)$ des mesures de Radon, la topologie faible $\sigma(M(\Omega), \mathcal{C}_0(\Omega))$, appelée topologie vague, est plus fine que la topologie induite par la topologie faible de $\mathcal{D}'(\Omega)$: une suite de mesures de Radon convergeant vaguement converge au sens des distributions.

Remarque 1.3.3 A toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on peut associer la mesure de Radon

$$\lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \text{ où } \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$$

et l'application linéaire $f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto \lambda_f \in M(\Omega)$ est injective d'après le lemme 1.1.3. La restriction de λ_f à $\mathcal{D}(\Omega)$ est simplement la distribution associée à f. Autrement dit, modulo les identifications faites, on a les inclusions

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset M(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ceci conduit par exemple à identifier la fonction constante et égale à 1, la mesure de Lebesgue $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi(x)\,dx$ et la distribution de Lebesgue $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi(x)\,dx$

On observera que l'injection canonique de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $M(\Omega)$ est continue vu l'inégalité

$$\|\lambda_f\|_\varphi \leq c\,\|f\|_{1,K} \text{ si } \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega) \text{ et } c = \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|.$$

Remarque 1.3.4 Soit $\lambda \in M(\Omega)$ une mesure bornée, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$, continue pour la topologie de la convergence uniforme, soit

$$|\lambda(\varphi)| \leq c \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega). \tag{1.3.6}$$

Alors, la restriction $u = \lambda|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ est une distribution vérifiant

$$|u(\varphi)| \leq c\,\|\varphi\|_0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.3.7}$$

Réciproquement, une distribution vérifiant (1.3.7) est une mesure bornée. C'est en effet une distribution d'ordre 0, donc une mesure λ. D'après la remarque 1.3.2, on a $\lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n)$ où (φ_n) est une suite convenable de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant uniformément vers φ et ceci prouve que λ vérifie (1.3.6) : λ est donc une mesure bornée.

L'inégalité (1.3.7), c'est-à-dire (1.1.11) pour $q = \infty$, caractérise donc les mesures bornées.