

Table des matières

Chapitre I. Théorie des ensembles	1
1. Motivation	1
2. Fondements	2
3. Relations, applications	5
4. Suites	8
5. Cardinalité	11
6. Le continu	15
7. Exercices	17
Chapitre II. Espaces métriques	23
1. Métriques	24
2. Convergence des suites	27
3. Continuité métrique	30
4. Produits dénombrables d'espaces métriques	32
5. Parties ouvertes et fermées	35
6. Exercices	38
Chapitre III. Espaces topologiques	43
1. Topologies	44
2. Convergence des suites	49
3. Continuité topologique	52
4. Topologie cofinie	53
5. Treillis des topologies	54
6. Topologies métrisables	57
7. Exercices	61
Chapitre IV. Opérations sur les espaces topologiques	65
1. Sous-espaces	65
2. Produits	66
3. Quotients	70
4. Éventail séquentiel	70
5. Exercices	72
Chapitre V. Espaces métriques séparables	73
1. Exercices	76

Chapitre VI. Espaces métriques compacts	77
1. Compacité en termes des suites	77
2. Compacité en termes de recouvrements	81
3. Compacité dans des espaces fonctionnels	82
4. Exercices	85
Chapitre VII. Espaces métriques complets	89
1. Espaces métriques complets	89
2. Complétude d'espaces fonctionnels	93
3. Points fixes	94
4. Exercices	95
Chapitre VIII. Espaces métriques connexes	99
1. Connexité	99
2. Espaces ultramétriques	104
3. Exercices	105
Chapitre IX. Espaces vectoriels	109
1. Bases, dimension	109
2. Applications et formes linéaires	113
3. Exercices	116
Chapitre X. Espaces vectoriels normés	117
1. Espaces normés	118
2. Projections	125
3. Espaces normés spéciaux	126
4. Espaces de Banach	131
5. Espaces de Hilbert	135
6. Exercices	142
Annexe A. Nombres ordinaux	145
1. Ordre	145
2. Bon ordre	146
3. Nombres ordinaux	148
4. Arithmétique des ordinaux	152
5. Nombres ordinaux-cardinaux	154
6. Exercices	156
Annexe B. Espaces topologiques compacts	159
1. Grilles	159
2. Filtres	160
3. Convergence des filtres	163
4. Compacité	164
5. Topologie de Stone	165

6. Compacité versus compacité séquentielle	168
7. Exercices	169
Index	175
Bibliographie	179

CHAPITRE I

Théorie des ensembles

1. Motivation

Jusqu'au dix-neuvième siècle les mathématiques furent développées à l'aide d'un langage informel, mélangeant des expressions mathématiques avec celles de la langue courante. Ainsi le discours mathématique ne pouvait pas éviter des ambiguïtés présentes dans les langues naturelles, car l'interprétation sémantique n'y est pas univoque. D'où de nombreux cas d'erreurs dans des œuvres mathématiques de l'époque. La nécessité de rigueur fut ressentie par plusieurs grands esprits, comme Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1934), Bertrand Russell (1872-1970) et autres. Nous leur sommes redevables pour la création du langage mathématique moderne rigoureux, celui de la théorie des ensembles. David Hilbert (1862-1943) écrivait de cette contribution "Que personne ne puisse nous chasser du paradis que Cantor nous a bâti." (1) Plus tard, en parlant au Congrès des Mathématiciens à Bologne en 1928 du langage formel de Peano, Hilbert disait que c'était un outil essentiel pour sa théorie de la démonstration (2).



FIGURE 1. Georg Cantor, Giuseppe Peano et Bertrand Russell

1. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

2. [...] ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie [ist] die Begriffsschrift; wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, Peano, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben.

La plupart des notions et des résultats concernant les nombres cardinaux et ordinaux évoqués dans ce chapitre, sont dûs à Cantor.

2. Fondements

Une théorie déductive est fondée sur des *notions primitives*, c'est-à-dire non définies, et des propositions primitives appelées *axiomes*, c'est-à-dire non démontrées, toutes les deux en nombre fini. La signification d'une notion primitive est donnée indirectement par les axiomes qui la concernent. Les axiomes sont déclarés vrais.

Toute notion d'une théorie déductive est définie, moyennant des règles syntaxiques, à partir des notions ayant déjà une signification. Toute proposition de la théorie est déduite des propositions retenues vraies, moyennant des règles logiques inférentielles finies. Une telle procédure est récursive. Elle nécessite donc des notions et des propositions primitives, car si toute notion était définie par d'autres notions ou toute proposition était une conséquence d'autres propositions, on n'arriverait pas, en reculant à l'infini, à une signification ⁽³⁾. Une théorie déductive est cohérente si elle ne contient pas de propositions contradictoires ⁽⁴⁾.

Dans la théorie des ensembles, la notion d'*ensemble* est primitive. Un ensemble est déterminé par ses *éléments* (c.f., l'axiome d'extensionnalité ci-dessous).

À partir de deux formules élémentaires $x \in y$ (x appartient à y) et $x = y$ (x est égal à y), on construit des formules moyennant des *connectives* logiques :

$$\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff,$$

respectivement, la *négation*, l'*alternative*, la *conjonction*, l'*implication* et l'*équivalence* et les deux *quantificateurs*, *existential* \exists et *universel* \forall . Par exemple ⁽⁵⁾,

$$(1) \quad \neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \implies \psi, \varphi \iff \psi, \exists_x \varphi(x), \forall_x \varphi(x).$$

On définit l'inclusion $A \subset B$ par $x \in A \implies x \in B$ pour tout x .

Une liste d'axiomes fonde la théorie. On utilise d'habitude le système de *Zermelo-Fraenkel* avec l'*axiome du choix* (*ZFC*).

3. Une telle procédure est une arborescence avec des (multiples) racines.

4. En 1931 Kurt Gödel a démontré que la théorie des ensembles contient des propositions, qui ne sont pas *décidables*, c'est-à-dire que l'on ne peut ni démontrer ni infirmer.

5. D'ailleurs, certaines de ces formules peuvent être écrites moyennant d'autres, par exemple, $(\varphi \implies \psi) \iff (\neg\varphi \vee \psi)$.

On n'étudie pas ici la théorie des ensembles de façon systématique. Disons seulement que parmi les axiomes de ZFC, il y a celui d'*extensivité*, disant que $X = Y$ si et seulement si

$$z \in X \iff z \in Y,$$

pour tout z . L'axiome de l'*union* dit que pour tout ensemble (d'ensembles) X , il existe un ensemble $Y := \bigcup X$ tel que

$$y \in \bigcup X \iff \exists_{A \in X} y \in A.$$

L'axiome de la *puissance* affirme que pour tout ensemble X , il existe l'ensemble 2^X de toutes les parties de X ,

$$Y \in 2^X \iff Y \subset X,$$

etc...

L'axiome de *séparation* dit que pour toute formule $\varphi(x)$ et tout ensemble X , il existe l'ensemble

$$\{x \in X : \varphi(x)\}.$$

La restriction de la formule à un ensemble est ici essentielle. En général, il n'existe pas l'ensemble de tous les x qui vérifie $\varphi(x)$.

EXEMPLE 2.1 (Paradoxe de Russell). *Il n'existe pas l'ensemble de tous les ensembles X pour lesquels $X \notin X$. Effectivement, si Y était un tel ensemble, alors, par définition, $Y \in Y$ si et seulement si $Y \notin Y$.*

Comme conséquence, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles. S'il y avait un tel ensemble U , alors selon l'axiome de séparation, $Y := \{X \in U : X \notin X\}$ serait un ensemble, d'où la contradiction notée auparavant.

On peut parler cependant de la *classe* de tous les ensembles, en traitant le terme *classe* comme externe à la théorie des ensembles.

Enfin, l'*axiome du choix* affirme que

AXIOME 2.2 (Peano-Zermelo). *Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une application $f : X \rightarrow \bigcup X$ telle que $f(A) \in A$ pour tout $A \in X$.*

On attribue généralement la formulation de cet axiome à E. Zermelo [14] de 1904, mais il fut déjà formulé par G. Peano dans [12] en 1890.

Un élément u d'un ensemble ordonné (X, \leq) est dit *maximal* si $x \geq u$ implique que $x = u$.

LEMME 2.3 (Zorn-Kuratowski). *Soit X un ensemble ordonné par \leq . Si pour toute partie totalement ordonnée L de X , il existe $w \in X$ tel que $l \leq w$ pour tout $l \in L$, alors pour tout $x \in X$ il existe un élément maximal $u \in X$ tel que $x \leq u$.*

Ce lemme est équivalent à l'axiome 2.2 du choix. Il est démontré dans l'annexe A.3.11.

Les propositions logiques (1) correspondent à des opérations sur les parties d'un ensemble ; si $A := \{w \in W : \varphi(w)\}$ et $B = \{w \in W : \psi(w)\}$, alors on a, respectivement,

$$\begin{aligned} A^c &:= W \setminus A = \{w \in W : \neg\varphi(w)\}, \\ A \cup B &= \{w \in W : \varphi(w) \vee \psi(w)\}, \\ A \cap B &= \{w \in W : \varphi(w) \wedge \psi(w)\}, \\ A \subset B &\iff \left(\forall_{w \in W} \varphi(w) \implies \psi(w) \right), \\ A = B &\iff \left(\forall_{w \in W} \varphi(w) \iff \psi(w) \right) \end{aligned}$$

Si $A(x) := \{w \in W : \varphi(x, w)\}$, alors l'union et l'intersection de $A(x)$ pour $x \in X$, sont définies moyennant des quantificateurs existentiel et universel respectivement :

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in X} A(x) &= \left\{ w \in W : \exists_{x \in X} \varphi(x, w) \right\} \text{ et} \\ \bigcap_{x \in X} A(x) &= \left\{ w \in W : \forall_{x \in X} \varphi(x, w) \right\}. \end{aligned}$$

Rappelons que Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y . On a

$$\begin{aligned} y \in \bigcup_{x \in X} Y_x &\iff \exists_{x \in X} y \in Y_x, \\ y \in \bigcap_{x \in X} Y_x &\iff \forall_{x \in X} y \in Y_x, \\ \prod_{x \in X} Y_x &:= \left\{ f \in \left(\bigcup_{x \in X} Y_x \right)^X : \forall_{x \in X} f(x) \in Y_x \right\}. \end{aligned}$$

Autrement dit, le produit $\prod_{x \in X} Y_x$ est égal à l'ensemble d'applications $f : X \rightarrow \bigcup_{x \in X} Y_x$ telles que $f(x) \in Y_x$ pour tout $x \in X$. L'axiome du choix affirme que si $Y_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$, alors $\prod_{x \in X} Y_x \neq \emptyset$. En particulier, si $Y = Y_x$ pour tout $x \in X$, alors $\prod_{x \in X} Y = Y^X$.

Pour tout $w \in X$, on définit la *projection* π_w est une application

$$\pi_w : \prod_{x \in X} Y_x \rightarrow Y_w$$

définie par $\pi_w(f) := f(w)$.

Si $A \subset X$, alors la fonction $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

s'appelle la *fonction caractéristique* de A . Si $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, alors $f = \chi_A$, où $A := \{x \in X : f(x) = 1\}$. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les parties de X et les fonctions de X dans un ensemble de deux éléments. C'est pourquoi on note 2^X l'ensemble de toutes les parties de X .

3. Relations, applications

Il découle des axiomes de la théorie des ensembles que pour deux ensembles X, Y il existe leur *produit* $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Si $R \subset X \times Y$, alors on dit que R est une *relation entre X et Y* . Traditionnellement on note $(x, y) \in R$ par xRy .

Pour tout $A \subset X$, l'*image* RA de A par R est définie par

$$RA := \{y \in Y : \exists_{x \in A} (x, y) \in R\}.$$

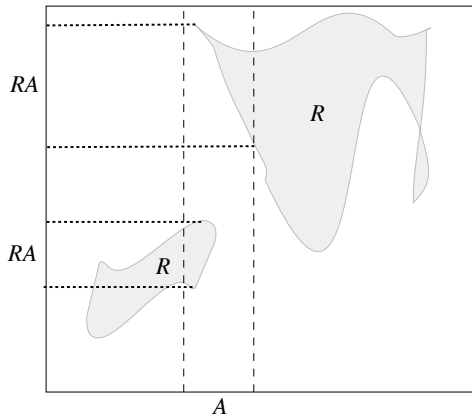


FIGURE 2. L'image RA d'un ensemble A par la relation R (ici ayant deux composantes connexes) a, dans ce cas, également deux composantes.

Observons que l'image d'une partie de X par une relation $R \subset X \times Y$ est une partie de Y , donc un ensemble. Il s'ensuit que l'image $R\{x\}$ du singleton $\{x\}$ est un ensemble. Notons que

$$RA = \bigcup_{x \in A} R\{x\}.$$

La *relation réciproque* R^{-1} de R (entre Y et X) est définie par

$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

Comme R^{-1} est une relation, les symboles $R^{-1}B$ et $R^{-1}\{y\}$ ont un sens précis pour tout $B \subset Y$ et tout $y \in Y$. Bine sûr,

$$x \in R^{-1}\{y\} \iff y \in R\{x\}.$$

Pour tous $R \subset X \times Y$, $A \subset X$ et $B \subset Y$, les formules suivantes sont équivalentes :

- (2) $RA \cap B \neq \emptyset,$
 (3) $A \cap R^{-1}B \neq \emptyset,$
 (4) $(A \times B) \cap R \neq \emptyset.$

Si $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$, alors la *relation composée* $S \circ R$ (entre X et Z) est définie par

$$(S \circ R)A := S(RA)$$

pour tout $A \subset X$. Par conséquent, on abrège $SR := S \circ R$.

Une relation $R \subset X \times Y$ est dite *surjective* si $RX = Y$; *injective* si $R\{x_0\} \cap R\{x_1\} \neq \emptyset$ implique $x_0 = x_1$. En contraposant la définition, on obtient

PROPOSITION 3.1. *Une relation est injective si et seulement si $x_0 \neq x_1$ implique $R\{x_0\} \cap R\{x_1\} = \emptyset$.*

Une relation $R \subset X \times Y$ s'appelle *applicationnelle* si pour tout $x \in X$ il existe un élément $\widehat{R}(x)$ de Y tel que

$$(5) \quad R\{x\} = \{\widehat{R}(x)\},$$

c'est-à-dire, si R est une relation applicationnelle, alors elle définit une application $\widehat{R} : X \rightarrow Y$ telle que (5).

On souligne que l'image d'une partie par une application est un ensemble. En particulier, si R est applicationnelle, alors $R\{x\}$ est un singleton. Par contre, l'image $\widehat{R}(x)$ de x par l'application \widehat{R} correspondante est un élément de Y .

On désigne par Y^X l'ensemble de toutes les applications de X dans Y . Si $f : X \rightarrow Y$ est une application, alors f définit une relation $\widetilde{f} \subset X \times Y$ telle que $\widetilde{f}\{x\} := \{f(x)\}$. Bien entendu, \widetilde{f}^{-1} est également une relation (entre Y et X).

PROPOSITION 3.2. *Une relation $R \subset X \times Y$ est applicationnelle si et seulement si la relation réciproque R^{-1} est injective et surjective.*

Une application f est *injective* (resp., *surjective*) si la relation applicationnelle correspondante l'est. Par conséquent, f est *injective* si $f(x_0) = f(x_1)$ implique $x_0 = x_1$; *surjective* si $f(X) = Y$. Une application est dite *bijjective* si elle est à la fois injective et surjective.

Si f est injective, alors \tilde{f}^{-1} est une relation applicationnelle entre $f(X)$ et X ; si f est bijective, alors \tilde{f}^{-1} est une relation applicationnelle de Y dans X (d'après la proposition 3.2). On note f^{-1} l'application correspondante.

REMARQUE 3.3. Dans la notation traditionnelle, $f(A)$ désigne $\{f(x) : x \in A\}$, c'est-à-dire $\tilde{f}A$ dans notre notation ; de même, traditionnellement, $f^{-1}(B)$ dénote $\{x \in X : f(x) \in B\}$, c'est-à-dire $\tilde{f}^{-1}B$ dans notre notation. La notation traditionnelle n'échappe pas à des incohérences, par exemple, $f^{-1}(y)$ peut signifier l'image réciproque de y par f (qui est un ensemble), ainsi que la valeur de y par l'application réciproque de f quand f est injective (qui est un élément). Néanmoins, afin de ne pas alourdir l'écriture, nous allons employer la notation traditionnelle, évitant des ambiguïtés grâce au contexte.

La relation diagonale $I := I_X \subset X \times X$ est définie par

$$I_X := \{(x, y) \in X \times X : x = y\}.$$

Autrement dit, $I_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Bien entendu $I_X \{x\} = \{x\}$ pour tout $x \in X$ et, par conséquent, toute relation diagonale est applicationnelle, et l'application correspondante est l'identité.

Une relation $R \subset X \times X$ est dite *réflexive* si $I \subset R$; *symétrique* si $R^{-1} = R$; *antisymétrique* si $R \cap R^{-1} \subset I$; *transitive* si $RR \subset R$. Rappelons qu'une relation $R \subset X \times X$ est dite d'*équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique, et d'*ordre (large)* si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Soit R une relation d'équivalence sur X . On note X/R le *quotient* de X par R , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de R . Autrement dit,

$$X/R := \{R\{x\} : x \in X\}.$$

Puisque R est réflexive, $X = \bigcup_{x \in X} R\{x\}$. L'application quotient $\pi_R : X \rightarrow X/R$ est définie par $\pi_R(x) := R\{x\}$. Autrement dit, π_R associe à tout $x \in X$ sa classe d'équivalence $R\{x\}$ par rapport à R . On voit facilement que

PROPOSITION 3.4. *Toute application quotient est surjective.*

EXEMPLE 3.5. *Pour toute application $f : X \rightarrow Y$, la relation \approx sur X définie par*

$$(6) \quad x_0 \approx x_1 \iff f(x_0) = f(x_1),$$

est une relation d'équivalence, car la famille $\{f^{-1}\{y\} : y \in Y\}$ consiste de parties disjointes deux à deux, dont l'union est égale à X . La classe

d'équivalence de x est $f^{-1}\{f(x)\}$. On note X/f le quotient par rapport à cette relation.

PROPOSITION 3.6. *Toute application f admet une décomposition $f = h \circ g$, telle que g est surjective et h est injective.*

DÉMONSTRATION. Considérons une application $f : X \rightarrow Y$. Soit $g : X \rightarrow X/\tilde{f}$ l'application quotient, c'est-à-dire $g(x) := \tilde{f}^{-1}\{f(x)\}$ pour tout $x \in X$. D'après la proposition 3.4, g est surjective. Puisque $w \in \tilde{f}^{-1}\{f(x)\}$ si et seulement si $f(w) = f(x)$, l'application f restreinte à $\tilde{f}^{-1}\{f(x)\}$ est constante (égale à $f(x)$). Donc

$$h(\tilde{f}^{-1}\{f(x)\}) := f(x)$$

définit une application de X/\tilde{f} dans Y et $f(x) = h(g(x))$ pour tout $x \in X$. Or, h est une injection, car si $h(\tilde{f}^{-1}\{f(x_0)\}) = h(\tilde{f}^{-1}\{f(x_1)\})$, alors $f(x_0) = f(x_1)$, donc $x_1 \in \tilde{f}^{-1}\{f(x_0)\}$, d'où $\tilde{f}^{-1}\{f(x_0)\} = \tilde{f}^{-1}\{f(x_1)\}$. ■

Par conséquent, si f est surjective, alors il existe $g : X \rightarrow X/f$ et $h : X/f \rightarrow Y$ telles que $f = h \circ g$, où g est une application quotient et h est une bijection.

4. Suites

Une *suite* sur X est une application de \mathbb{N} dans X . Si $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ est une suite (sur X), alors souvent on note $x_n := f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on désigne f comme $(x_n)_n$, ou, si une telle précision est utile, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} : m \leq n\}.$$

En particulier, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où \mathbb{N}_1 est une notation traditionnelle assez répandue.

Considérons les suites suivantes

$$(7) \quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_1},$$

$$(8) \quad ((-1)^n)_n,$$

$$(9) \quad \left(\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)_n$$

$$(10) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ fois}}, \dots$$

$$(11) \quad 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{1, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}}, \dots$$

sur l'ensemble \mathbb{R} (des nombres réels). Les deux premières sont *injectives* et les autres ne le sont pas.

Cependant il y a une différence notable entre (8)(9) d'une part et (10) de l'autre. Les suites (8)(9) prennent un nombre fini de valeurs et les images réciproques des singletons sont infinies ⁽⁶⁾, tandis que l'image réciproque de tout singleton par (10) est finie. Enfin, la suite (11) a l'image infinie et l'image réciproque de tout élément de cette image est infinie.

Notez que les images de (7),(10) et (11) sont les mêmes.

On dira qu'une suite f sur X est *presque injective* si $\{n : f(n) = x\}$ est finie pour tout $x \in X$ ⁽⁷⁾. Toute suite injective est presque injective. La suite (10) est presque injective et les suites (8)(9) et (11) ne le sont pas.

On appelle le *noyau* d'une suite $(x_n)_n$ l'ensemble

$$(12) \quad \ker_{n \rightarrow \infty} x_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x_k : k \geq n\}.$$

Le noyau d'une suite est un ensemble dénombrable (infini ou fini). Comme une conséquence immédiate de la définition, on a

PROPOSITION 4.1. *Pour que $x \in \ker_{n \rightarrow \infty} x_n$ il faut et il suffit que $\{n \in \mathbb{N} : x = x_n\}$ soit infini.*

Une suite est dite *libre* si son noyau est vide. D'après la proposition 4.1,

PROPOSITION 4.2. *Une suite est libre si et seulement si elle est presque injective.*

Une suite $(x_n)_n$ est dite *principale* si son noyau $\ker_{n \rightarrow \infty} x_n$ n'est pas vide et $\{n : x_n \notin \ker_{k \rightarrow \infty} x_k\}$ est fini. Une suite $(x_n)_n$ est *stationnaire* s'il existe x tel que $\{n : x_n \neq x\}$ est fini.

Bien entendu, toute suite stationnaire est principale.

EXEMPLE 4.3. *Le noyaux des suites (8) et (9) sont finis et celui de (11) est égal à \mathbb{N} . Ces sont des suites principales. Les suites (7) et (10) sont libres.*

EXEMPLE 4.4. *La suite $x_n := \max\{(-\frac{1}{n})^n, 0\}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$ n'est ni principale ni libre. On a $\ker_{n \rightarrow \infty} x_n = \{0\}$, mais $\{n : x_n \neq 0\}$ est infini.*

6. Bien entendu, si l'image d'une suite est finie, alors au moins l'image réciproque d'au moins un singleton est infinie.

7. En anglais, *finite-to-one*.

THÉORÈME 4.5 (Décomposition de suites). *Pour toute suite $(x_n)_n$ qui n'est ni principale ni libre, il existe deux ensembles infinis A et B tels que $A \cup B = \mathbb{N}$ et $A \cap B = \emptyset$ de telle sorte que $(x_n)_{n \in A}$ est libre et $(x_n)_{n \in B}$ est principale.*

DÉMONSTRATION. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas libre, alors son noyau $Q := \ker_{n \rightarrow \infty} x_n$ n'est pas vide. Bien entendu, $B := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Q\}$ est infini. Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas principale, $A := \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin Q\}$ est infini. La suite $(x_n)_{n \in A}$ est libre, car son noyau

$$\bigcap_{n \in A} \{x_k : k \in A, k \geq n\}$$

est inclus dans Q et, d'autre part, $\{x_n : n \in A\} \cap Q = \emptyset$. La suite $(x_n)_{n \in B}$ est principale, car son noyau est égal à Q et, en plus, si $n \notin B$, alors $x_n \notin Q$. ■

Une suite $(y_k)_k$ est une *suite extraite* de $(x_n)_n$ s'il existe une partie *cofinie* N ⁽⁸⁾ de \mathbb{N} et $f : N \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty$ et $y_k = x_{f(k)}$ pour tout k . Une suite $(y_k)_k$ est une *suite strictement extraite* (c'est-à-dire *suite extraite* au sens traditionnel) de $(x_n)_n$ s'il existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_k = x_{f(k)}$ pour tout k .

Bien entendu, toute suite strictement extraite est une suite extraite. D'autre part,

PROPOSITION 4.6. *Si $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors il existe une suite extraite de $(y_k)_k$ qui est une suite strictement extraite de $(x_n)_n$.*

PROPOSITION 4.7. *Soit $(y_k)_k$ et $(x_n)_n$ deux suites libres dans X . Alors, $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$ si et seulement si*

$$\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est fini.

DÉMONSTRATION. Si $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors

$$\{y_k : k \in \mathbb{N}\} = \{x_{f(k)} : k \in N\} \subset \{x_n : n \in N\}$$

et $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} = \{x_{f(k)} : k \in N\} \cup \{y_k : k \in \mathbb{N} \setminus N\}$. La réciproque est presque évidente. ■

PROPOSITION 4.8. *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties dénombrables infinies telle que $A_{n+1} \setminus A_n$ est finie pour tout n . Alors il existe une partie infinie A_∞ ⁽⁹⁾ telle que $A_\infty \setminus A_n$ est finie pour tout n .*

8. Une partie A de X est dite *cofinie* si $X \setminus A$ est finie.

9. Une telle partie A_∞ s'appelle une *presque-intersection* de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DÉMONSTRATION. Soit $a_0 \in A_0$. Pour tout n il existe

$$a_n \in \bigcap_{k=0}^n A_k \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\},$$

car cette partie est infinie. Alors $A_\infty := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ a la propriété requise. En effet, si $n \leq p$ alors $a_p \in A_n$, donc $A_\infty \setminus A_n \subset \{a_0, \dots, a_n\}$. ■

5. Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. Deux ensembles finis ont la même cardinalité si et seulement s'il existe une bijection entre eux.

Deux X, Y sont ensembles sont dits *équipotents* ($X \sim Y$) s'il existe une bijection $f : X \rightarrow Y$. Si X, Y, Z sont trois ensembles, alors $X \sim X$ (réflexivité), si $X \sim Y$ alors $Y \sim X$ (symétrie), et $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ entraîne $X \sim Z$ (transitivité). Par conséquent, l'*équipotence* est une relation d'équivalence sur la classe de tous les ensembles.

Une classe d'équivalence des ensembles équipotents s'appelle *nombre cardinal*. On désigne $\text{card } X$ (ou $|X|$) la classe des ensembles équipotents à laquelle appartient X , c'est-à-dire la *cardinalité* de X .

Traditionnellement on utilise les caractères minuscules grecs, du milieu de l'alphabet ⁽¹⁰⁾, $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ pour désigner des cardinaux.

On note $\kappa \leq \lambda$ s'il existe des ensembles $Y \subset X$ tels que $\text{card } Y = \kappa$ et $\text{card } X = \lambda$. C'est clairement une relation réflexive et transitive.

PROPOSITION 5.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\text{card } X \geq \text{card } Y$,
- (2) $\exists_{g:Y \rightarrow X}$ g est injective,
- (3) $\exists_{f:X \rightarrow Y}$ $f(X) = Y$.

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (1) et (2) : $\text{card } Y \leq \text{card } X$ si et seulement s'il existe deux ensembles $Y_0 \subset X_0$ tels que $X_0 \sim X$ et $Y_0 \sim Y$: il existe des bijections $h : Y \rightarrow Y_0$ et $k : X_0 \rightarrow X$. Alors $g := k \circ h$ est injective.

Supposons (2). Comme $g : Y \rightarrow X$ est injective, alors $g : Y \rightarrow g(Y)$ est bijective. Soit $g^{-1} : g(Y) \rightarrow Y$ sa réciproque. Toute application $f : X \rightarrow Y$, qui coïncide avec g^{-1} sur $g(Y)$, est surjective, ce qui prouve (3).

Supposons (3) : Comme f est surjective, pour tout $y \in Y$, il existe $g(y) \in f^{-1}(y)$. L'application $g : Y \rightarrow X$ est injective, car la relation f^{-1} est injective, ce qui nous donne (2). ■

10. En réservant plutôt les premiers caractères α, β, γ , etc... pour les nombres ordinaux.