

BCPST

1^{re} année

Michel Féray
Sophie Abgrall
Philippe Bonnet
Charles-Pierre Mariani
Nadine Michau

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

Nouveau programme

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai-faux, erreurs à éviter
- Exercices de base et d'approfondissement
- Énoncés de sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés



PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

BCPST

1^{re} année

Mathématiques

nouveau programme

ouvrage coordonné par
Michel FÉRAY

Professeur au lycée Poincaré (Nancy)

Sophie ABGRALL

Professeur au lycée Montaigne (Bordeaux)

Philippe BONNET

Professeur au lycée Malherbe (Caen)

Charles-Pierre MARIANI

Professeur au lycée Janson de Sailly (Paris)

Nadine MICHAU

Professeur au lycée Lakanal (Sceaux)



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en Latex.

ISBN 978-2-7298-83027

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2014
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L.122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (Art. L.122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique-chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme celui de physique-chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

1. Vocabulaire de la logique et des ensembles	1
2. Nombres réels	23
3. Nombres complexes - Trigonométrie	49
4. Méthodes de calcul	77
5. Polynômes	105
6. Vocabulaire des applications	125
7. Dénombrement.....	151
8. Suites usuelles	179
9. Convergence des suites	201
10. Fonctions usuelles	239
11. Dériver, intégrer,	271
12. Systèmes linéaires.....	301
13. Géométrie	323
14. Calcul matriciel	357
15. Statistiques descriptives	387

Deuxième semestre

16. Probabilités	419
17. Limites et continuité des fonctions	449
18. Dérivabilité des fonctions	485
19. Développements limités et études de fonctions	515
20. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	551
21. Applications linéaires	583
22. Intégration	613
23. Équations différentielles linéaires.....	649
24. Variables aléatoires réelles	679
25. Couple de variables aléatoires réelles	711
26. Fonctions de deux variables	739
Index	761

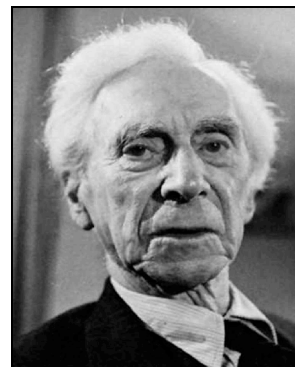
Chapitre 1

Vocabulaire de la logique et des ensembles

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier \cap et \cup désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note \exists ,

renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*.

Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■ ■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Notions de logique élémentaire :
 - utiliser les connecteurs logiques et les quantificateurs pour exprimer des énoncés mathématiques ;
 - maîtriser les principales techniques de démonstration.
- ▷ Vocabulaire de la théorie des ensembles :
 - sous-ensemble, inclusion ;
 - intersection, réunion, complémentaire ;
 - n -uplet, produit cartésien.

■ ■ Résumé de cours

■ Logique élémentaire

Définition : Une assertion ou proposition est un énoncé qui peut prendre la valeur vrai ou faux.

Remarque : Une proposition ne contient pas de variable, par exemple, $\{x < 0\}$ n'est pas une proposition, tant qu'on ne connaît pas la valeur de x .

Un énoncé qui dépend d'une ou plusieurs variables est une *forme propositionnelle* ou un *prédicat*.

Définition : Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.

Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de combiner des propositions pour en construire de nouvelles ; on en considère cinq :

Définition : Soient P et Q deux propositions

La négation de P se note $\neg P$, $\sim P$, ou \bar{P} ou encore \overline{P} ;

$P \vee Q$ se lit : P et Q ;

$P \Rightarrow Q$ se lit : P implique Q ;

$P \wedge Q$ se lit : P ou Q ;

$P \Leftrightarrow Q$ se lit : P équivaut à Q .

Tables de vérité

On regroupe dans un tableau, appelé *table de vérité* les valeurs de vérité des propositions ci-dessus :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

et

P	$\neg P$
V	F
F	V

Propriétés :

- $\neg(\neg P) = P$ (la double négation est une affirmation) ;
- $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $(\neg P) \vee Q$;
- $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Proposition 1.1. — **Associativité du « et », du « ou »** —. Soient P, Q, R trois propositions :

- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
- $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

Remarque : On peut supprimer les parenthèses si l'on a que des \wedge ou que des \vee :

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$ et $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$.

Proposition 1.2. — **Distributivité du « ET » par rapport à « OU », distributivité du « OU » par rapport à « ET »** —. Soient P, Q, R trois propositions :

- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

On ne peut pas supprimer les parenthèses lorsqu'on a à la fois des ET et des OU dans une même expression.

Proposition 1.3.— Négation d'un « et », négation d'un « ou » —.

Soient P et Q deux propositions :

- $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$
- $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$

Ces propriétés se généralisent à un nombre quelconque de propositions ; soit $n \geq 2$ et P_1, \dots, P_n des propositions :

- $\neg \left(\bigwedge_{k=1}^n P_k \right) \iff \bigvee_{k=1}^n (\neg P_k)$
- $\neg \left(\bigvee_{k=1}^n P_k \right) \iff \bigwedge_{k=1}^n (\neg P_k)$

Définition : Contraposée —. Soient P et Q deux propositions :

La contraposée de l'implication $(P \implies Q)$ est l'implication $(\neg Q \implies \neg P)$.

Proposition 1.4.— Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Si P et Q sont deux propositions, $(P \implies Q)$ est équivalent à $(\neg Q \implies \neg P)$.

Exemple : Considérons la proposition : *Il pleut \implies Il y a des nuages*, c'est une tautologie. Sa contraposée est : *Il n'y a pas de nuages \implies Il ne pleut pas*, qui est également toujours vraie.

Définition : Réciproque —. Soient P et Q deux propositions :

La réciproque de $(P \implies Q)$ est $(Q \implies P)$.

Remarque : $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ est équivalente à $(P \iff Q)$.

■ Théorie des ensembles

Définition : Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F , ou que E est une partie de F , si tout élément de E est un élément de F . On le note $E \subset F$. Si $E \subset F$, alors $\forall x \in E, x \in F$.

Remarque : Si E et F sont deux parties d'un même ensemble de référence Ω , on a $E \subset F \iff (\forall x \in \Omega, x \in E \implies x \in F)$.

Définition : Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. On le note $E = F$.

Remarque : Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Notation : Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties (ou des sous-ensembles) de E .

Définition : Opérations sur les parties d'un ensemble —. Si A et B sont deux parties d'un ensemble E , alors :

- la réunion de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des objets qui sont éléments de A ou de B . $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$;

- **l'intersection de A et B** , notée $A \cap B$, est l'ensemble des objets qui sont à la fois éléments de A et de B . $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$;
- **le complémentaire de A dans E** , noté $\complement_E A$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$;
- **la différence de A et B** , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B . $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

Remarques :

- Le complémentaire de A dépend de l'ensemble E dans lequel A est inclus; lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on le note aussi \bar{A} .
- Si $B \subset A$, alors $A \setminus B = \complement_A B$.

Proposition 1.5. — Distributivité — Pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E , on a :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion);
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union par rapport à l'intersection).

Proposition 1.6. — Lois de Morgan — Pour toutes parties A, B d'un ensemble E , on a :

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Ces propriétés se généralisent aisément à un nombre quelconque de sous-ensembles :

Proposition 1.7. — Pour toutes parties $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ d'un ensemble E , on a :

- $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$
- $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i)$
- $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$
- $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

Définition : Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble. Une partition $\{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ $p \geq 1$, de E vérifie les trois conditions suivantes :

- (i) Tous les E_i pour i variant de 1 à p sont des parties non vides de E .
- (ii) Les E_i sont 2 à 2 disjoints, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, E_i \cap E_j = \emptyset$.
- (iii) La réunion de tous les E_i est égale à E : $\bigcup_{i=1}^p E_i = E$.

Définition : Produit cartésien

- Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) , où $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

- On généralise à k ensembles E_1, \dots, E_k par récurrence :

$$E_1 \times \dots \times E_k = (E_1 \times \dots \times E_{k-1}) \times E_k$$

Remarque : Dans un couple, l'ordre est important, les couples (x, y) et (y, x) ne sont pas égaux ; par conséquent les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ sont différents.

Notation : Si E_1, \dots, E_k sont tous égaux à E , le produit cartésien $E \times E \times \dots \times E$ se note alors E^k .

Définition : Un élément (x_1, \dots, x_k) de E^k s'appelle un k -uplet ou une k -liste d'éléments de E .

■ Quantificateurs

Définition : Quantificateur universel

On le note \forall ; il se lit « Quel que soit » ou « Pour tout ».

Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat,

$\forall x \in E, P(x)$ s'énonce « pour tout x appartenant à E , $P(x)$ est vrai ».

Définition : Quantificateur existentiel

On le note \exists ; il se lit « Il existe ».

Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat,

$\exists x \in E, P(x)$ s'énonce « il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie ».

Proposition 1.8.—

La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \overline{P}(x)$.

La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \overline{P}(x)$.

Remarque : Attention, l'ordre des quantificateurs est important ; par exemple si E est un ensemble, P une proposition qui dépend de deux variables x et y , alors « $\forall x \in E, \exists y \in E / P(x, y)$ » et « $\exists x \in E, \forall y \in E / P(x, y)$ » ne sont pas équivalentes.

■ ■ Méthodes

■ Techniques de démonstration

□ Méthode 1.1.— Construire des tables de vérité

On se donne une expression mathématique E qui fait intervenir des propositions P_1, \dots, P_n pouvant toutes prendre la valeur VRAI ou FAUX indépendamment les unes des autres, et on cherche à déterminer la valeur de vérité de E en fonction des valeurs de P_1, \dots, P_n . Pour construire la table de vérité de E , on doit considérer 2^n cas (donc 2^n lignes pour la table de vérité) et on utilise les tables de vérité du cours (négation, et, ou, implication, équivalence).

Exemple : Montrer, à l'aide de tables de vérité, la **proposition 1.3** :

On va prouver $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$ et $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$, la généralisation se faisant par récurrence.

On a deux propositions, donc 4 cas possibles :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V

On a décomposé (colonnes 3, 4, 7 et 8) en propositions intermédiaires intervenant dans l'expression finale ; on compare ensuite les colonnes 5 et 9 (négation du ET) puis les colonnes 6 et 10 (négation du OU). Dans chaque cas, les colonnes sont identiques, les propositions $(\neg P) \vee (\neg Q)$ et $\neg(P \wedge Q)$ sont donc équivalentes, de même pour les propositions $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ et $\neg(P \vee Q)$.

□ Méthode 1.2.— Traduire une proposition en français en langage mathématique et inversement

- ▶ Pour une proposition en français :
 - (a) On décompose la proposition en énoncés élémentaires, reliés par des connecteurs logiques, des quantificateurs...
 - (b) On repère des expressions comme « pour tout », « il existe » les locutions du type « si... alors ».
 - (c) On définit des ensembles associés.
- ▶ Pour une proposition en langage mathématique, il suffit de reprendre les définitions des connecteurs et quantificateurs.

Méthodes

Exemples :

1. Soit la phrase : « Tous les humains sont mortels ». On pose E l'ensemble de tous les humains, $P(x)$ la proposition « x est mortel ». La proposition s'écrit alors $\forall x \in E, P(x)$.
2. On considère : « Tous les nombres entiers sont soit pairs, soit impairs ». On pose $P(x)$: « x est pair » et $Q(x)$: « x est impair » ; on peut alors écrire : « $\forall x \in \mathbf{Z}, P(x) \vee Q(x)$ ».
3. On se donne l'énoncé mathématique suivant : « $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y = x^2$ » se lit : « Pour tout réel x , il existe un réel y tel que y est le carré de x », ou encore, dans un français un peu plus habituel : « Tout réel a pour carré un nombre réel. »

□ Méthode 1.3.— Exprimer une négation

Pour exprimer la négation d'une proposition composée, on peut s'appuyer sur la **proposition 1.3** ou la **proposition 1.8**.

Exemples : On peut reprendre les propositions précédentes et écrire leur négation :

1. En langage mathématique, la négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E, \overline{P(x)}$, ou encore en français : « Il existe (au moins) un humain immortel ».
2. La négation de « $\forall x \in \mathbf{Z}, P(x) \vee Q(x)$ » est « $\exists x \in \mathbf{Z} / \overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}$ » ou bien en français : « Il existe un entier qui n'est ni pair, ni impair ».
3. La négation de « $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y = x^2$ » est « $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, y \neq x^2$ », ou bien en français, « Il existe un nombre réel dont aucun nombre réel n'est le carré ».

Remarque : Dans ces trois exemples, les propositions initiales sont vraies, donc leurs négations sont fausses.

□ Méthode 1.4.— Démontrer une implication

$P \Rightarrow Q$ peut s'énoncer : « Si P est vraie, alors Q est vraie. »

On remarque que si P est fausse, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie quelle que soit la valeur de vérité de Q . Par exemple « Il pleut \Rightarrow Il y a des nuages » est une tautologie, c'est-à-dire toujours vraie ; en particulier, s'il ne pleut pas, on ne peut rien en déduire sur l'existence ou pas de nuages.

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on ne cherche surtout pas à prouver P , mais on suppose que la proposition P est vraie, et on en déduit Q .

Mise en œuvre : exercice 1.8, exercice 1.11.

Remarque : Il est important de remarquer que lorsqu'on s'exprime en français, l'expression « Si ... alors » traduit le plus souvent une équivalence, par exemple la phrase : « S'il fait beau, alors nous irons nous promener » sous entend en outre que s'il ne fait pas beau, nous resterons chez nous ; alors qu'une stricte implication veut dire que nous irons effectivement nous promener s'il fait beau, mais que dans le cas contraire (mauvais temps) rien n'interdit que nous allions tout de même nous promener.

□ **Méthode 1.5.— Utiliser la contraposée**

Dans certains cas il est plus facile de prouver $(\neg Q) \implies (\neg P)$ que $P \implies Q$. Ces deux propositions étant équivalentes (voir **exercice 1.1**) on suppose alors Q non vérifiée, et on en déduit que P est fausse.

□ **Méthode 1.6.— Analyse-Synthèse**

Il s'agit de prouver l'existence et éventuellement l'unicité d'un objet vérifiant une propriété donnée. On commence en général par étudier les propriétés (sous réserve d'existence) des objets répondant au problème posé, cette première phase est l'analyse du problème; puis on vérifie si le(s) objet(s) ainsi déterminé(s) convien(nen)t.

1 On suppose l'existence d'au moins un objet solution du problème : « Si un tel objet existe, alors... » et on énumère toutes les propriétés qu'il doit vérifier. Lorsqu'au bout d'un moment on obtient une seule possibilité, ou si l'on ne voit aucune information supplémentaire à tirer de la supposition faite, on passe à l'étape suivante.

2 C'est la vérification (ou synthèse). C'est une étape essentielle, même si la première étape aboutit directement à l'unicité ou si le résultat paraît évident. En effet, tant qu'on n'a pas effectivement vérifié que l'objet convient, on ne peut pas garantir avoir trouvé une solution.

Exemple : Montrons que toute fonction définie sur \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{R} peut s'écrire d'une unique façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire également définies sur \mathbf{R} : Rappelons tout d'abord qu'une fonction f définie sur \mathbf{R} est paire si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$ et qu'elle est impaire si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

1 Soit f une fonction définie sur \mathbf{R} ; supposons qu'il existe un couple de fonctions que nous appellerons f_P (pour la fonction paire) et f_I (pour la fonction impaire) telles que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f_P(x) + f_I(x)$.

On utilise les propriétés de f_P et de f_I et pour cela on calcule $f(-x)$:

$$f(-x) = f_P(-x) + f_I(-x) = f_P(x) - f_I(x).$$

On obtient alors le système suivant :
$$\begin{cases} f_P(x) + f_I(x) = f(x) \\ f_P(x) - f_I(x) = f(-x) \end{cases}$$

qui a pour unique solution : $f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

On déduit de ce calcul que si le problème a bien une solution, celle-ci est unique; en effet les expressions de f_P et de f_I sont déterminées pour toute valeur de x .

2 Il nous reste à vérifier que les fonctions f_P et f_I ainsi calculées sont effectivement paire et impaire respectivement; pour cela on calcule $f_P(-x)$ et $f_I(-x)$ à partir de la formule obtenue :

$$f_P(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} \text{ donc } f_P(-x) = f_P(x). \text{ Ceci est vrai quel que soit } x \text{ réel, donc } f_P \text{ est une fonction paire.}$$

$$\text{De même, } f_I(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} \text{ donc } f_I(-x) = -f_I(x). \text{ Ceci est vrai quel que soit le réel } x, \text{ donc } f_I \text{ est une fonction impaire.}$$

On a ainsi montré l'existence et l'unicité de cette décomposition, et on a même donné la formule explicite.

□ **Méthode 1.7.— Prouver une équivalence**

Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut :

- ▶ raisonner par équivalences successives,
- ▶ démontrer les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple : Voir aussi **exercice 1.8**, **exercice 1.11**.

□ **Méthode 1.8.— Démonstration par l'absurde**

Soit \mathbf{P} une propriété à démontrer. Démontrer par l'absurde que \mathbf{P} est vraie c'est supposer que \mathbf{P} est fausse et montrer qu'alors on obtient une contradiction.

Remarque : Attention à ne pas confondre avec le raisonnement par contraposée. Pour montrer la contraposée de $P \Rightarrow Q$, on suppose que Q est fausse, et on en déduit que P l'est aussi ; on n'aboutit à aucune contradiction, on prouve juste une autre implication que celle demandée (mais équivalente).

Mise en œuvre : **exercice 9.7**, **exercice 9.11**.

Exemple : Soit \mathbf{P} « $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel », c'est-à-dire il n'existe aucun couple d'entiers relatifs (p, q) tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On va montrer ce résultat en utilisant un raisonnement par l'absurde : supposons qu'un tel couple d'entiers existe, quitte à simplifier la fraction $\frac{p}{q}$, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux (sans diviseur en commun) et positifs. On a donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair. On en déduit que p est pair (car le carré d'un nombre impair est impair), on peut donc écrire p sous la forme : $p = 2p_1$ où p_1 est un entier, d'où $p^2 = 4p_1^2$, et finalement $4p_1^2 = 2q^2$. Après simplification par 2, on obtient que q^2 (et donc q) est pair. Ceci est absurde étant donné qu'on a supposé que p et q n'ont pas de diviseur commun, et qu'on vient de montrer qu'ils sont pairs tous les deux. Il s'ensuit que l'hypothèse d'existence d'un couple d'entiers (p, q) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ est fausse.

■ Ensembles

□ **Méthode 1.9.— Comment montrer l'égalité de deux ensembles**

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut :

- ▶ montrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Pour ce faire, on montre que tout élément de A appartient à B , puis que tout élément de B appartient à A ;
- ▶ établir directement l'égalité $A = B$ à l'aide des résultats du cours (union, intersection, distributivité, lois de Morgan, etc.).

Mise en œuvre : **exercice 1.11**, **exercice 6.8**.

Exemple : Soient A et B des parties d'un ensemble E telles que $A \cap B = A \cup B$, et montrons que $A = B$. Pour ce faire, on va montrer que $A \subset B$, puis que $B \subset A$. Soit x un élément de A . Comme

$A \subset A \cup B$, x appartient à $A \cup B$. Comme $A \cup B = A \cap B$, x appartient à $A \cap B$. Mais comme $A \cap B \subset B$, x appartient aussi à B , et donc $A \subset B$. De la même façon, en échangeant les rôles de A et B , on montre que $B \subset A$, et il s'ensuit que $A = B$.

□ Méthode 1.10.— Définir une réunion, une intersection, un complémentaire en utilisant quantificateurs et connecteurs logiques

Soit E un ensemble, A, B des sous-ensembles de E . On peut exprimer $\complement_E A, A \cap B, A \cup B$ à l'aide de propositions :

- ▶ $\complement_E A$ est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A , donc :
 $\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}$ ou encore $\forall x \in E, x \in \complement_E A \iff x \notin A$.
- ▶ $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B (éventuellement dans A et dans B), donc : $A \cup B = \{x \in E / (x \in A) \vee (x \in B)\}$ ou encore
 $\forall x \in E, x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$.
- ▶ $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B , donc :
 $A \cap B = \{x \in E / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ ou encore
 $\forall x \in E, x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Remarque : On peut ainsi retrouver toutes les propriétés d'associativité de \cap et de \cup , ainsi que celles de distributivité à partir des propriétés du ET et du OU.

□ Méthode 1.11.— Importance de l'ordre des quantificateurs

On peut sans problème intervertir deux quantificateurs existentiels (\exists) ou universel (\forall) mais certainement pas un existentiel et un universel.

Mise en œuvre : exercice 1.8.

Exemple : Soit $P : \ll \forall x \in \mathbf{R}^+, \exists y \in \mathbf{R}^+ / y^2 = x \gg$ qui s'énonce en français « Pour tout réel positif, il existe un réel positif dont il est le carré ». Remarquons au passage que cette proposition est vraie. Si on change l'ordre des deux quantificateurs, on obtient la proposition :

$Q : \ll \exists x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}^+ / y^2 = x \gg$ qui s'énonce : « Il existe un réel positif qui est le carré de tous les réels positifs ». Cette affirmation est fausse bien sûr, elle n'est donc pas égale à P .