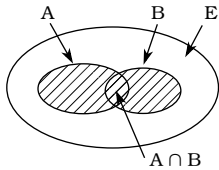


Ensembles - Dénombrement

A. Opérations sur les ensembles	8
B. Dénombrement	9
1. Ensemble fini	9
2. p -listes d'un ensemble à n éléments	10
3. p -listes d'éléments distincts de E	11
4. Parties à p éléments de E	11
5. Ensemble des parties de E	13
C. Calcul de sommes	13
1. Formules à connaître	13
2. Somme d'une famille de réels	14
3. Sommes doubles	15
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre.	17
Exercices niveau 1	21
Exercices niveau 2	22
Solutions des exercices	23

A. Opérations sur les ensembles

Le mot « ou » n'est pas exclusif, c'est-à-dire que x peut appartenir à la fois à A et B ou à l'une seulement de ces deux parties



$A \cup B$ est représenté par la partie hachurée.

■ Réunion

La réunion des deux ensembles A et B est notée $A \cup B$ et est définie par :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Leur réunion est notée $\bigcup_{i \in I} A_i$ et est définie par :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i$$

Donc $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin A_i$.

■ Intersection

L'intersection des deux ensembles A et B est notée $A \cap B$ et est définie par :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

L'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$ est notée $\bigcap_{i \in I} A_i$ et est définie par :

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

Donc $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \notin A_i$

■ Règles de calcul

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Plus généralement :

- $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$
- $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$.

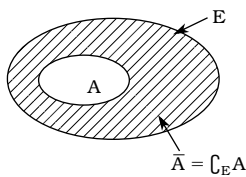
■ Partition

Deux ensembles A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de Ω est une **partition** de Ω si

$$\begin{cases} \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \\ \forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \end{cases}$$

$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = E \end{cases}$ donc (A, \bar{A}) est une partition de E .



$\bar{A} = C_E A$

■ Complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble E .

Le complémentaire de A dans E est noté $C_E A$ et est défini par :

$$x \in C_E A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$$

$C_E A$ est aussi noté $\bar{C}A$ ou \bar{A} s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E .

☞ Ici il n'y a pas d'ambiguïté : A, B et les A_i sont des parties d'un même ensemble E .

■ Règles de calcul

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Plus généralement :

- $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.

■ Différence

Soit A et B deux parties de E .

On note $A - B$ l'ensemble défini par :

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

Donc $A - B = A \cap \overline{B}$.

■ Produit cartésien

Le produit cartésien des deux ensembles E et F est noté $E \times F$. Il est défini par :

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Plus généralement le produit cartésien de n ensembles est :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Par définition : $E^n = E \times E \times \dots \times E$ (n facteurs).

Les éléments du produit cartésien de n ensembles sont appelés des n -uplets ou des n -uplets. Lorsque $n = 2$, on dit plutôt que ce sont des couples et lorsque $n = 3$, que ce sont des triuplets.

B. Dénombrement

1. Ensemble fini

☞ $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n .

■ On dit que l'ensemble E est fini s'il est vide, ou s'il existe un entier naturel n et une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E .

Si $E \neq \emptyset$, n est appelé **cardinal de E** . On note $\text{Card}E = n$.

$\text{Card}E = n$ si, et seulement si, les éléments de E peuvent être notés e_1, e_2, \dots, e_n , où les e_k sont deux à deux distincts.

Par convention $\text{Card}\emptyset = 0$.

■ **Dénombrer** un ensemble fini non vide E , c'est déterminer le **cardinal** de E , c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

Plusieurs méthodes sont souvent possibles.

Par exemple, pour compter le nombre n d'élèves d'une classe E , on peut :

– soit compter les élèves un par un,

– soit effectuer des groupements : si $n = 30$, on peut avoir cinq rangées de six élèves ou six colonnes de cinq élèves.

Trois conditions doivent être remplies pour que le dénombrement de E soit correct :

- 1) Il ne faut compter que des éléments de E .
- 2) Il ne faut pas en oublier.
- 3) Il ne faut pas compter certains éléments plusieurs fois.

Néanmoins, si par une méthode chaque élément de E est compté k fois, $\text{Card}E$ est le quotient par k du nombre obtenu par cette méthode. ☞

☞ Mise en œuvre Ex. 2. a)

- Si E est un ensemble fini, toute partie A de E est finie et on a $\text{Card}A \leq \text{Card}E$.
- $\text{Card}\bigcup_E A = \text{Card}E - \text{Card}A$.
- Si E et F sont des ensembles finis, $E \times F$ est un ensemble fini et on a $\text{Card}E \times F = \text{Card}E \times \text{Card}F$.

En effet, si $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$, on peut écrire les éléments de $E \times F$ sous forme d'un tableau à n lignes :

$$\begin{pmatrix} (e_1, f_1) & (e_1, f_2) & \dots & (e_1, f_p) \\ (e_2, f_1) & (e_2, f_2) & \dots & (e_2, f_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n, f_1) & (e_n, f_2) & \dots & (e_n, f_p) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow p \text{ éléments} \\ \leftarrow p \text{ éléments} \\ \vdots \\ \leftarrow p \text{ éléments} \end{array}$$

donc $E \times F$ contient np éléments et $\text{Card}(E \times F) = np = (\text{Card}E) \times (\text{Card}F)$.

On peut également rédiger cette démonstration de la façon suivante :

$$E \times F = \{(e, f) / e \in E, f \in F\}.$$

Il y a n façons de choisir dans E le premier élément du couple (e, f) , puis pour chacune d'elles, p façons de choisir le deuxième élément de ce couple.

Donc $\text{Card}(E \times F) = np = (\text{Card}E) \times (\text{Card}F)$.

Plus généralement, si $\text{Card}E = n$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}E^p = n^p$.

2. p -listes d'un ensemble à n éléments

Définition 1

On appelle **p -liste** d'un ensemble E à n éléments, toute suite de p éléments de E , c'est-à-dire tout élément de E^p .

Remarques

- L'ordre des éléments de la p -liste est important. Deux p -listes contenant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes.
- Une p -liste peut contenir plusieurs fois le même élément.
- Une p -liste est aussi appelée **p -uple** (ou **p -uplet**).

Par exemple :

Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$(1, 2, 2)$ et $(5, 3, 4)$ sont des 3-listes d'éléments de E .

$(5, 3, 4)$ et $(3, 5, 4)$ sont des 3-listes différentes.

Théorème 1

Il y a n^p p -listes d'un ensemble à n éléments.

Démonstration

Les p -listes sont les éléments de E^p , $\text{Card}(E^p) = n^p$, donc il y a n^p p -listes d'éléments de E .

3. p -listes d'éléments distincts de E

☞ Nécessairement,
 $0 \leq p \leq \text{Card}E$.

Définition 2

Une p -liste d'éléments distincts de E est aussi appelée **arrangement** de p éléments de E .
 Si $\text{Card}E = n$, une n -liste d'éléments distincts de E est appelée **permutation** de E .

Théorème 2

Soit E un ensemble à n éléments.
 On note A_n^p le nombre de p -listes d'éléments distincts de E .
 On a :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Démonstration

Une p -liste d'éléments distincts de E est constituée :

- d'un premier élément x_1 , suivi, si $p \geq 2$,
- d'une $(p-1)$ -liste d'éléments distincts de $E - \{x_1\}$.

Il y a n façons de choisir x_1 , puis pour chacune d'elles, A_{n-1}^{p-1} façons de choisir la $(p-1)$ -liste d'éléments distincts associée à x_1 . D'où $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$ et par récurrence :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+2)A_{n-p+1}^1.$$

Or $A_{n-p+1}^1 = n-p+1$ ☞ d'où $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

☞ A_{n-p+1}^1 est le nombre de 1-listes d'éléments d'un ensemble à $n-p+1$ éléments donc
 $A_{n-p+1}^1 = n-p+1$.

Théorème 3

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

Démonstration

Il y a A_n^n permutations d'un ensemble à n éléments, et $A_n^n = n!$

- Conséquence :** 1) Il y a $n!$ façons de ranger n éléments distincts dans tous les ordres possibles.
 2) Si E est n ensemble à n éléments, il y a $n!$ bijections de E dans E .

4. Parties à p éléments de E

Définition 3

Soit E un ensemble fini à n éléments.
 On appelle **combinaison de p éléments** de E , toute partie à p éléments de E .

Remarques

Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts, donc
 $0 \leq p \leq \text{Card}E$.

L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Par exemple :

Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3\}$ est une combinaison de 3 éléments de E .

$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$.

$\{1, 2, 2\}$ n'est pas une combinaison de 3 éléments de E (ni de 2 éléments de E).

Théorème 4

Soit E un ensemble à n éléments.
 On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E .
 On a :

$\binom{n}{p}$ est parfois noté C_n^p

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration

Une p -liste d'éléments distincts de E est une permutation d'une combinaison de p éléments de E .

Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir une combinaison de p éléments de E , puis pour chacune d'elles, il y a $p!$ permutations de ses éléments. Donc $A_n^p = p! \binom{n}{p}$.

Proposition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

Formule du binôme : pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Démonstration

Les cinq premières formules se démontrent facilement en utilisant l'expression des $\binom{n}{p}$ sous forme de factorielles.

La formule du binôme se démontre par récurrence sur n .

Remarques

- La relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ permet d'écrire le triangle de Pascal. Ce triangle fournit la valeur des $\binom{n}{p}$ pour les petites valeurs de n .

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	...
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮					15		

- En faisant $a = b$ dans la formule du binôme on obtient : $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et en faisant $a = 1$ et $b = -1$: $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

5. Ensemble des parties de E

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Théorème 5

Si $\text{Card}E = n$, alors $\text{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Démonstration

☞ $F_0 = \{\emptyset\}$ et $F_n = \{E\}$

$$\text{☞ } (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Une partie de E peut contenir soit 0, soit 1, ..., soit n éléments. ☞

Soit F_k l'ensemble des parties à k éléments de E ($0 \leq k \leq n$). $\text{Card}F_k = \binom{n}{k}$.

$$\text{Donc } \text{Card}E = \sum_{k=0}^n \text{Card}F_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n. \text{ ☞}$$

C. Calcul de sommes

1. Formules à connaître

Somme des n premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$= n + 1 \quad \text{si } q = 1$$

Somme des séries classiques

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

☞ Série géométrique.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

☞ Formule du binôme négatif.

$$\sum_{n=p}^{+\infty} (x^n)^{(p)} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(p)} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

☞ Série exponentielle.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple 1

☞ Pour $n = 1$,
 $n(n-1)x^n = 0$;

Calculons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n-1) + n]x^n = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n-1)]x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

$$S = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (x^n)'' + x \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)'$$

$$S = x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'' + x \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$\text{Donc } S = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

2. Somme d'une famille de réels

L'objet de ce paragraphe est de donner un sens à $\sum_{i \in I} x_i$ où $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels et où I est égal à \mathbb{N} , \mathbb{Z} , ou une de leurs parties finies.

■ 1^{er} cas : $I = \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{On pose } \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Plus généralement, si I est une partie finie à n éléments (de \mathbb{N} ou de \mathbb{Z}), on peut écrire :

$$I = \{i_1, \dots, i_n\} = \{i_k / k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

$$\text{On pose } \sum_{i \in I} x_i = \sum_{k=1}^n x_{i_k}.$$

■ 2^e cas : $I = \mathbb{N}$

Si la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ converge absolument, on pose $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i$.

■ 3^e cas : $I = \mathbb{Z}$

On pose $\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i + \sum_{i=1}^{+\infty} x_{-i}$ si les 2 séries convergent absolument. On dit alors que

$$\sum_{i=-n}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_{-i}.$$

$\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i$ converge absolument, et on a $\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=-n}^n x_i$.

Exemple 2

Calculons $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{x^i}{|i|!}$ ($x \in \mathbb{R}$).

$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument (c'est la série exponentielle de somme e^x).

$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{-n}}{|-n|!}$ converge absolument et sa somme est $e^{\frac{1}{x}}$.

Donc $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{x^i}{|i|!}$ converge absolument et on a : $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{x^i}{|i|!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^{-i}}{|-i|!} = e^x + e^{\frac{1}{x}} - 1$.

3. Sommes doubles

Proposition 2

Soit $I = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Démonstration

Les $a_{i,j}$ peuvent être écrits dans un tableau à n lignes et p colonnes :

$i \backslash j$	1	2	...	j	...	p	
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$...	$a_{1,j}$...	$a_{1,p}$	$\sum_{j=1}^p a_{1,j}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$...	$a_{i,j}$...	$a_{i,p}$	$\sum_{j=1}^p a_{i,j}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$...	$a_{n,j}$...	$a_{n,p}$	$\sum_{j=1}^p a_{n,j}$
	$\sum_{i=1}^n a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^n a_{i,2}$...	$\sum_{i=1}^n a_{i,j}$...	$\sum_{i=1}^n a_{i,p}$	

Pour calculer la somme $\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j}$ des éléments du tableau, on peut :

- soit calculer la somme des éléments de chaque ligne puis additionner les n sommes

obtenues on obtient alors $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right)$.

- Soit calculer la somme des éléments de chaque colonne puis additionner les p sommes

obtenues. On obtient alors $\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$.

Le résultat énoncé en découle.

Proposition 3

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n a_{i,j} \right).$$

Démonstration

Cette fois le tableau des $a_{i,j}$ est le suivant :

$i \backslash j$	1	2	...	i	...	n
1	$a_{1,1}$					
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$				
⋮	⋮	⋮	⋮			
i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$...	$a_{i,i}$		
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$		$a_{n,i}$...	$a_{n,n}$

Dans ce tableau les seuls éléments écrits sont ceux qui interviennent dans les sommations.

On obtient par le même raisonnement que précédemment :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n a_{i,j} \right).$$

Exemple 3

Calculons $\sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{i}{k+1} \right)$.

Soit S cette somme.

$$S = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{i}{k+1} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k \frac{i}{k+1} \right) \text{ (en adaptant la proposition 3)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=0}^k i \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

On sera amené à faire ce type de calcul en probabilités pour obtenir des espérances.