

# Sommaire

<b>Chapitre 1 ■ Données physiques sur les milieux fluides</b> .....	3
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	17
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	23
<b>Chapitre 2 ■ Notions phénoménologiques sur les écoulements de fluides réels</b> .....	29
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	36
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	37
<b>Chapitre 3 ■ Outils de description des mouvements de fluides</b> .....	43
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	61
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	66
<b>Chapitre 4 ■ Équations de bilans du mouvement de fluides</b> .....	75
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	95
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	100
<b>Chapitre 5 ■ Écoulements à potentiel de fluide incompressible homogène</b> .....	111
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	129
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	140
<b>Chapitre 6 ■ Écoulements compressibles monodimensionnels</b> .....	149
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	159
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	162
<b>Chapitre 7 ■ Mouvements de fluide visqueux incompressible</b> .....	171
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i> .....	182
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i> .....	185

# Données physiques sur les milieux fluides

## Introduction

La mécanique des fluides est la partie de la physique qui traite du mouvement des fluides. Ces mouvements peuvent être d'origine naturelle ou résulter d'activités humaines. Ainsi, cette discipline est-elle en amont d'applications en météorologie, océanographie, hydraulique maritime ou fluviale, hydrodynamique, aérodynamique...

Le champ de ces applications recouvre également des situations relevant de la thermique, du génie des procédés, de l'énergétique, dès lors que les écoulements mettent en jeu des transferts thermiques et /ou massiques, en fluides polyphasiques (gaz, liquide, particules solides) et milieux chimiquement réactifs (combustion, par exemple).

Sur le plan théorique, la mécanique des fluides continue de faire l'objet d'une activité de recherche soutenue car elle pose encore nombre de questions fondamentales mal ou non élucidées.

### Plan du chapitre 1

<b>A. Notion de fluide</b> .....	4
<b>B. L'approche du milieu continu : les trois niveaux d'échelles</b> .....	4
<b>C. Les forces dans un fluide en mouvement</b> .....	7
<b>D. Propriétés physiques du fluide monophasique, homogène et isotherme</b> .....	9
<b>E. Viscosité</b> .....	9
<b>F. Diffusion et advection : nombre de Reynolds</b> .....	13
<b>G. Compressibilité</b> .....	14
<b>H. Compressibilité et advection : nombre de Mach</b> .....	15
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	17
<i>Énoncés des exercices</i> .....	23
<i>Indications</i> .....	24
<i>Solutions des exercices</i> .....	25

1. Les forces de pression sont des forces qui s'exercent toujours de façon normale à la surface du fluide. Elles sont à l'origine de l'équilibre hydrostatique du fluide au repos.

2. Le mouvement de certains milieux solides *dispersés*, tel le sable, peut donner globalement une impression de mobilité évoquant celle d'un milieu fluide *continu*.

3. Cette déformation peut n'être perceptible que sur de très grandes durées, comme pour « l'écoulement » d'un glacier apparenté au mouvement très lent d'un matériau déformable.

4. L'identité microscopique peut être l'atome comme dans certains gaz et le mercure (seul métal liquide à constituant atomique sous les conditions normales). Le terme de « molécule », employé dans la suite, aura donc valeur de générique.

5. L'atmosphère terrestre, sous les conditions normales de température et de pression, est considérée comme un gaz dense. Elle devient un milieu raréfié avec l'altitude.

6. Les liquides formés de macromolécules en solution, par exemple, sont exclus de la discussion.

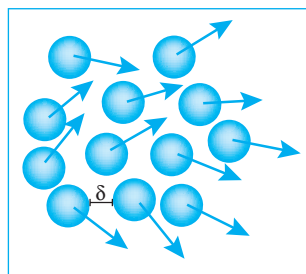


Fig. 1 – Échelle microscopique caractéristique dans un liquide : distance inter-moléculaire  $\delta$ .

## A. Notion de fluide

### A.1. Qu'est-ce qu'un fluide pour le mécanicien ?

Un fluide est une substance matérielle qui, soumise à des forces extérieures **constantes dans le temps** mais non réductibles à des pressions<sup>1</sup>, se déforme ou coule **en permanence** aussi longtemps que ces forces restent appliquées. Cette propriété s'appelle la mobilité<sup>2</sup>. Elle oppose le fluide au solide déformable qui, dans les mêmes conditions, atteint un état de déformation fixe<sup>3</sup>, où se sont développées des tensions internes qui équilibrent l'action des forces externes.

L'absence de rigidité du fluide rend ce matériau inapte à s'opposer à un cisaillement en résistant au glissement relatif de différentes parties.

Ainsi, un fluide ne peut être au repos (dans le repère du centre d'inertie) qu'en présence d'actions extérieures susceptibles d'être équilibrées par des forces internes exclusivement normales (pression).

### A.2. Qu'est-ce qu'un fluide pour le physicien ?

En physique, les interactions ou forces mutuelles entre les molécules<sup>4</sup> déterminent différents états de la matière :

– l'**état solide** ordonné ou amorphe, où les atomes occupent des positions relatives fixes dans l'espace, avec des vibrations de faibles amplitudes, d'origine thermique ;

– l'**état gazeux** sous faible pression, qui est celui d'un ensemble de molécules diluées dans l'espace, affectées de mouvements désordonnés et de vibrations, avec interaction par collisions ;

– l'**état liquide**, qui correspond à un état intermédiaire entre celui du solide et du gaz pouvant, de ce fait, être perçu soit comme un solide désordonné, soit comme un gaz très dense.

La notion de fluide pour le physicien fait référence à l'absence de structure organisée de la matière à l'échelle microscopique, autorisant des déplacements de grande amplitude des molécules. Elle regroupe donc les états liquides et gazeux.

## B. L'approche du milieu continu : les trois niveaux d'échelles

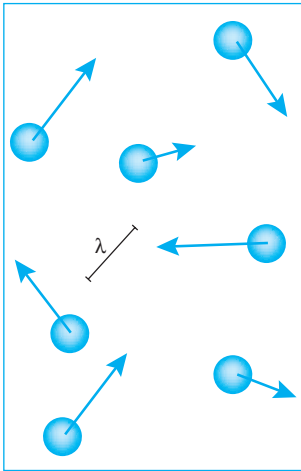
Les fluides étudiés ici sont des liquides et des gaz « denses<sup>5</sup> » dont on étudie les mouvements à une échelle de longueur  $L$  (dite échelle de « l'observateur ») très supérieure à celle caractérisant la structure discrète du milieu,  $\ell$  (échelle dite « moléculaire »).

### B.1. Niveau microscopique

Le niveau microscopique est celui des molécules. Son échelle de longueur caractéristique  $\ell$  dépend du milieu.

• Dans les liquides usuels<sup>6</sup>, les molécules se rapprochent entre elles autant que les forces de répulsion le permettent. La distance inter-moléculaire  $\delta$  (fig. 1) peut alors servir de référence d'échelle caractéristique  $\ell$ , soit :

$$\ell \sim \delta.$$



**Fig. 2** – Échelle microscopique caractéristique dans un gaz: libre parcours moyen  $\lambda$ .

1. L'hypothèse du continu ne permet pas de « voir » les molécules constitutives de la matière. Cela dit, ne pas « voir » le mouvement propre des molécules ne signifie pas ignorer les effets de l'agitation moléculaire. Une question majeure de l'approche du continu est ainsi de savoir traduire, à l'échelle macroscopique, les conséquences de l'agitation microscopique. C'est là l'origine physique des propriétés diffusives des fluides (viscosité et diffusivité thermique notamment, cf. § E).

Variable selon le corps considéré, cette distance est de même ordre de grandeur que la dimension représentative de la taille d'une molécule, soit typiquement l'Angström ( $1\text{Å} = 10^{-10}\text{ m}$ ).

• Dans les gaz (fig. 2), les molécules sont soumises à une agitation provoquant des chocs entre elles, de sorte que l'échelle moléculaire caractéristique devient le libre parcours moyen  $\lambda$ , distance statistiquement franchie « en moyenne » par une molécule entre deux chocs consécutifs. On a alors :

$$\ell \sim \lambda.$$

Variable selon la nature du gaz et les conditions de température et de pression, le libre parcours moyen est typiquement de l'ordre de  $10\text{ Å}$ .

En résumé, la majorante de l'échelle moléculaire caractéristique  $\ell$  est de l'ordre de 100 nanomètres ( $1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$ ).

## B.2. Niveau macroscopique

Ce niveau, fixé par l'observateur humain, recouvre une très large plage d'échelles  $L$ .

La borne supérieure peut aller jusqu'à la centaine, voire le millier de kilomètres (écoulements de géo-fluides, océan, atmosphère).

La borne inférieure peut se situer aux environs du millimètre ou du dixième de millimètre, en limite de résolution spatiale de capteurs de mesure, ou en référence aux écoulements (micro-circulation sanguine, filtration en milieux poreux...).

En résumé :

$$L \geq 10^{-1}\text{ mm}.$$

## B.3. L'hypothèse du continu

Dans les gaz, sous conditions normales de température et de pression, on compte  $6,023 \cdot 10^{23}$  molécules (nombre d'Avogadro) dans 22,4 litres, ce qui signifie qu'un cube de  $1\text{ }\mu\text{m}$  de côté renferme  $2,69 \cdot 10^7$  molécules. Ce résultat montre que, même à cette échelle, les effets de la structure discontinue de la matière peuvent être statistiquement lissés par un effet de grand nombre. On supposera donc que :

### Hypothèse

Pour l'étude de son mouvement à échelle macroscopique, le fluide se comporte comme **un milieu continu**, au sens où la matière est répartie continûment dans tout le domaine où s'effectue le mouvement<sup>1</sup>.

## B.4. Concept de particule fluide

En référence à un domaine macroscopique  $\Delta \sim L^3$  de l'écoulement, l'adoption de l'hypothèse du continu pose la question du sens physique à donner au passage à la limite «  $\Delta \rightarrow 0$  ». On ne peut en effet envisager un « domaine limite » de volume mathématiquement nul.

En arrière plan, c'est la notion de grandeur « locale » à l'échelle du milieu continu qui devra être définie, la localisation ne pouvant **physiquement** se rapporter à un « point mathématique ».

Le concept de particule fluide (fig. 3) fournit ainsi la réponse à ces interrogations.

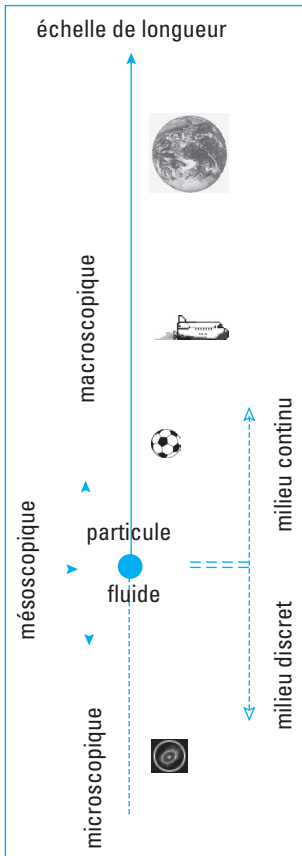


Fig. 3 – Concept de particule fluide et classes d'échelles.

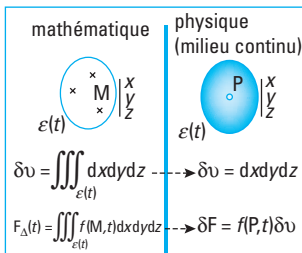


Fig. 4 – Particule fluide: équivalence entre concept physique et notions mathématiques.

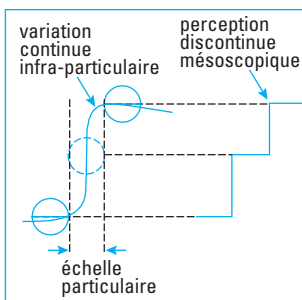


Fig. 5 – Variation sub-mésoscopique perçue comme une discontinuité à l'échelle macroscopique.

### Définition 1

La particule fluide  $\varepsilon$  est le domaine infinitésimal à l'échelle du continu. Son volume  $\delta v$  se situe au raccordement (**niveau mésoscopique**) des échelles micro et macroscopique :

$$\ell^3 \ll \delta v \ll L^3,$$

de telle sorte qu'il soit à la fois :

- **suffisamment petit** à l'ordre **macroscopique** pour que l'on ne puisse distinguer aucune variation spatiale à l'échelle du domaine particulière,
- **suffisamment grand** vis-à-vis de l'échelle **microscopique** pour contenir un nombre élevé de molécules, afin de moyenniser les fluctuations dues à leurs mouvements d'agitation.

Il résulte directement de cette définition que :

### Propriété 1

À l'échelle de la particule fluide, la valeur limite d'une intégrale de volume

$$F_{\Delta}(t) = \iiint_{M \in \Delta} f(M, t) dx dy dz \text{ pour } \Delta \rightarrow \varepsilon \text{ est telle que :}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow \varepsilon} F_{\Delta}(t) = f(P, t) \times \delta v$$

où  $f(P, t)$  représente la **valeur macroscopique locale** de la fonction  $f$  pour la particule fluide de volume  $\delta v$ , occupant le domaine  $\varepsilon(t)$  centré au « point matériel »  $P$  autour duquel s'évanouit le domaine  $\Delta(t)$  à l'échelle mésoscopique (fig. 4).

### Propriété 2

D'un point de vue mathématique, le concept de particule fluide comme entité physique de « localisation » d'un « point matériel »  $P(x, y, z)$  du milieu continu assure la **définition** de toute fonction de « point »  $f(x, y, z)$  à cette échelle. Elle n'assure pas pour autant la **continuité** mathématique de cette même fonction, dans la mesure où de fortes variations « *mathématiquement continues à un ordre infra-particulaire* » apparaîtront comme des discontinuités à l'échelle mésoscopique » (fig. 5).

## B.5. Valeur macroscopique locale de la masse volumique

À un instant  $t$  donné, on considère la masse volumique, selon les trois niveaux d'échelles :

– *microscopique* :

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=N} m_k}{v},$$

rapport de la masse de  $N$  molécules, de masse élémentaire  $m_k$ , dans un volume  $v \sim \ell^3$ ;

– *macroscopique* :

$$\frac{M}{D},$$

rapport de la masse  $M$  de fluide dans un domaine  $D \sim L^3$ ;