COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Physique

L3 M1 M2

Hydrodynamique

PROBLÈMES CORRIGÉS

Stéphane Leblanc

EDP SCIENCES

HYDRODYNAMIQUE
Problèmes corrigés

Stéphane Leblanc

Préface de Luc Petit

Collection dirigée par Fabrice Mortessagne

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Illustration de couverture : photographie et copyright Graham Jeffery (2007).
`http://sensitivelight.com/smoke2/`

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0525-9

À Clara et Lilian

This page intentionally left blank

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

La publication d'un ouvrage d'enseignement est toujours une bonne nouvelle pour les professionnels de ce domaine. Et lorsqu'il s'agit d'un ouvrage d'hydrodynamique, l'événement revêt un caractère particulièrement heureux pour les spécialistes du sujet. C'est donc avec grand intérêt que j'ai découvert l'ouvrage *Hydrodynamique : problèmes corrigés* écrit par Stéphane Leblanc.

L'expérience d'enseignement de l'auteur dans ce domaine transparaît fort bien à travers la rédaction des solutions des problèmes avec le souci constant d'analyser les phénomènes et de « faire parler les équations » de l'hydrodynamique dont la richesse ne permet pas toujours d'en saisir tout le contenu physique sans une aide. C'est bien là l'un des intérêts de l'ouvrage. Les indications et ouvertures données à la fin de chaque problème dans les rubriques « Pour en savoir plus » sont aussi les bienvenues et soulignent les applications sous-jacentes des problèmes traités dont le caractère académique (au sens « fondamental » du terme) ne les rend pas directement explicites.

Je souhaite donc grand succès et longue vie à cet ouvrage.

Luc Petit, Professeur des universités

This page intentionally left blank

AVANT-PROPOS

Ce recueil de problèmes corrigés d'Hydrodynamique est principalement destiné aux étudiants de troisième année de licence ou première et deuxième années de master à l'université, dans des cursus de mécanique, mathématiques ou physique, ainsi qu'aux élèves d'écoles d'ingénieurs. Il a pour objectif de venir compléter les ouvrages publiés par mes confrères en proposant des sujets variés et originaux qui, je l'espère, satisferont la curiosité du plus grand nombre.

Les seize problèmes présentés sont académiques et leur résolution peut être menée à terme soit de manière exacte soit de manière approchée à l'aide de méthodes de perturbations. L'étudiant doit posséder une bonne connaissance en hydrodynamique des fluides incompressibles, doit savoir manipuler les opérateurs différentiels (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) et connaître de préférence quelques rudiments d'algèbre tensorielle ; quelques rappels sont fournis en annexe si besoin est. Les problèmes ne nécessitent en revanche pas de connaissances particulières en méthodes asymptotiques ou en stabilité hydrodynamique.

La Mécanique des fluides est une discipline complexe mais passionnante, à cheval entre Mathématiques appliquées et Physique. Mon objectif premier au cours des dix années passées en tant qu'enseignant à l'Université de Toulon fut de « faire parler » les équations de l'hydrodynamique — équations d'Euler et de Navier-Stokes. Le présent recueil est écrit dans cette philosophie : faire parler les équations afin d'expliquer rationnellement des phénomènes que l'on peut aisément observer, comme l'étalement d'une couche de fluide sous l'effet de son propre poids, la formation de vaguelettes à la surface d'un liquide s'écoulant sur un plan incliné, ou encore l'amplification des vagues à la surface de la mer.

Certains de ces problèmes permettront également aux étudiants de s'initier à des thématiques de recherche toujours d'actualité, comme l'instabilité d'un écoulement elliptique ou la sonoluminescence.

Une courte bibliographie, délibérément sélective, est jointe à la fin de chaque corrigé. Chacune d'entre elles renvoie soit aux articles originaux lorsque leur publication est postérieure au début de « l'ère JFM » — le *Journal of Fluid Mechanics* fut fondé par G.K. Batchelor en 1956 — soit à des monographies ou des articles de synthèse récents. Ceci permettra au lecteur d'approfondir le problème traité s'il le désire.

Je souhaite dédier ce livre à tous ceux qui m'ont transmis leur passion pour la mécanique des fluides, tout particulièrement Jean-Pierre Guiraud à l'Université Pierre et Marie Curie. Je remercie chaleureusement Fabrice Mortessagne d'avoir soutenu ce projet et Luc Petit d'avoir accepté de le préfacer.

Enfin, un grand merci à France Citrini et l'équipe éditoriale d'EDP Sciences pour la mise en page et la publication de cet ouvrage.

La Garde, Mai 2010

1

ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

Dans des conditions usuelles, les équations régissant le mouvement des fluides les plus courants comme l'air et l'eau, c'est-àdire les fluides « newtoniens », sont les équations établies par Navier et Stokes au cours du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Du point de vue mathématique, ces équations présentent une structure compliquée due à la présence conjointe d'un terme non-linéaire (l'accélération), d'un terme non-local (la pression en incompressible), et d'un terme de diffusion (la viscosité). Les propriétés mathématiques de ces équations font d'ailleurs encore l'objet de recherches actives pour prouver l'existence, l'unicité et la régularité des solutions[(1)].

Cependant, les physiciens et les ingénieurs n'ont pas attendu les mathématiciens pour obtenir dans de nombreuses situations des solutions exactes ou approchées. Certes, en raison de la complexité des équations de Navier-Stokes, les solutions exactes sont rares et limitées à des configurations relativement simples, comme les célèbres écoulements de Poiseuille dans une conduite ou de Couette-Taylor entre deux cylindres, écoulements décrits dans tous les cours d'Hydrodynamique ; deux autres types d'écoulement donnant lieu à des solutions exactes sont présentés dans les problèmes 1.4 et 1.5.

Dans des configurations plus compliquées, comme en présence d'obstacles, les solutions exactes ne sont pas à l'heure actuelle accessibles à l'analyse et nécessitent l'utilisation de coûteux calculs sur de puissants ordinateurs. Néanmoins, des solutions peuvent être obtenues en effectuant des hypothèses supplémentaires. La plus importante et la plus répandue d'entre elles consiste à négliger les effets visqueux : le fluide est dit « parfait » et les équations sont alors celles obtenues par Euler en 1755. Les problèmes 1.1 et 1.2 sont résolus en fluide parfait. Si de plus le fluide

---

[(1)] À l'instar des célèbres problèmes de Hilbert en 1900, l'institut Clay a proposé en 2000 une liste de sept problèmes ouverts faisant l'objet d'une récompense d'un million de dollars chacun ! L'un porte sur les équations de Navier-Stokes. À vos crayons ! `www.claymath.org/millennium/`

est supposé irrotationnel, alors l'écoulement est dit « potentiel » et le problème mathématique se ramène alors à une équation de Laplace ; historiquement, c'est d'ailleurs en analogie avec l'électrostatique que les célèbres écoulements potentiels autour d'un cylindre ou d'une sphère furent obtenus. Le problème 1.3 en propose une illustration.

Une autre alternative pour obtenir des solutions approchées consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes, soit en considérant que les mouvements sont de faible amplitude comme pour les vagues (problème I.6), soit en supposant que les effets de viscosité jouent un rôle prépondérant dans la dynamique ; ceci peut se produire dans des couches de fluide de faible épaisseur (problème 1.7) ou dans des écoulements où les effets visqueux dominent sur les effets d'inertie ; c'est l'approximation utilisée par Stokes en 1851 pour calculer la célèbre formule de la force de résistance à l'avancement d'une sphère dans un fluide très visqueux. Cela fait l'objet du problème 1.8. La simplicité de la formule de Stokes fera oublier les efforts produits !

Références générales

Voici quelques références bibliographiques sur la dynamique des fluides. Cette sélection non exhaustive reste bien entendu subjective. L'un des meilleurs ouvrages actuels sur la dynamique des fluides incompressibles est (en français de surcroît, profitons-en !) :

É. Guyon, J.-P. Hulin & L. Petit : *Hydrodynamique physique* (2de édition), EDP Sciences/CNRS Éditions (2001).

En français également, citons également l'incontournable :

L. Landau & E. Lifchitz : *Mécanique des fluides* (2de édition), Mir (1989).

Quoique plus difficile d'accès et plus aride, ce livre reste néanmoins une véritable mine d'or.

La mécanique des fluides moderne a été très influencée par les recherches de Taylor et Batchelor à Cambridge en Angleterre ; un excellent ouvrage est bien sûr :

G. K. Batchelor : *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge (1967).

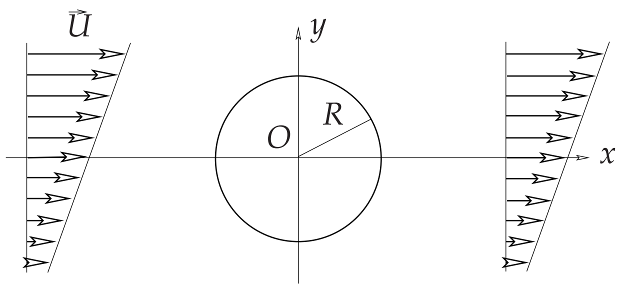
Malheureusement non publié par un éditeur scientifique, je recommande également l'excellent cours d'un des disciples de Batchelor :

H. K. Moffatt : *Fluid dynamics*, École Polytechnique (1994).

1.1. Écoulement cisaillé autour d'un cylindre

Ce problème consiste en l'étude d'un écoulement cisaillé autour d'un cylindre immobile dont l'axe est perpendiculaire au plan de l'écoulement. L'objectif est de déterminer la force exercée par le fluide sur le cylindre.

On supposera dans tout le problème que le fluide est parfait et incompressible, et que l'écoulement est stationnaire et bidimensionnel dans le plan $(O; x, y)$. On négligera dans tout le problème l'effet de la pesanteur.



En définissant $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ou $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les vecteurs de base des coordonnées cartésiennes et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ ceux des coordonnées polaires, le vecteur position d'un point dans le plan sera défini par : $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = r\vec{e}_r$. On notera

$$\vec{u}(\vec{x}) = u_x(x,y)\vec{e}_x + u_y(x,y)\vec{e}_y = u_r(r,\theta)\vec{e}_r + u_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta,$$

le vecteur vitesse, $p(\vec{x})$ la pression et ρ la masse volumique du fluide.

Partie I. Considérations générales

1. Rappelez les équations du mouvement du fluide.

2. On suppose que l'écoulement est bidimensionnel, stationnaire, et que sa vorticité $\operatorname{r\vec{o}t} \vec{u} = \omega \vec{e}_z$ est constante dans tout l'écoulement. Soit $\psi(x, y)$ la fonction de courant de l'écoulement définie en coordonnées cartésiennes par les relations :

$$u_x = \partial\psi/\partial y, \quad u_y = -\partial\psi/\partial x.$$

Montrez que l'accélération dérive d'un potentiel. On rappelle que :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = (\operatorname{r\vec{o}t} \vec{u}) \wedge \vec{u} + \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\|\vec{u}\|^2).$$

3. Déduisez-en que $\rho\omega\psi + \frac{1}{2}\rho\|\vec{u}\|^2 + p$ est constant dans l'écoulement.

4. On suppose qu'un obstacle de surface Σ et de normale $\vec{n}$ se trouve dans l'écoulement décrit dans la question précédente. Montrez que la force exercée par le fluide sur l'obstacle est donnée par :

$$\vec{F} = \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \|\vec{u}\|^2 \vec{n} dS.$$

Partie II. Description de l'écoulement

1. Soit le champ de vitesse donné par

$$\vec{U}(y) = (V + Sy)\vec{e}_x,$$

avec V et S des constantes. Calculez sa vorticité.

2. On place dans cet écoulement un cylindre circulaire d'axe (Oz), de longueur L et de rayon R, et on cherche à déterminer les modifications dues à la présence du cylindre. Pour cela, on recherche la vitesse sous la forme

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{\nabla}\varphi,$$

où $\varphi(\vec{x})$ est une fonction telle que $\|\vec{\nabla}\varphi\| \rightarrow\ 0$ quand $\|\vec{x}\| \rightarrow +\infty$.

Calculez la vorticité de l'écoulement et montrez que $\Delta\varphi = 0$.

3. Montrez que la condition limite sur la surface Σ du cylindre s'écrit :

$$(\partial\varphi/\partial r)_{|\Sigma} = -V\cos\theta - \tfrac{1}{2}SR\sin 2\theta.$$

4. Calculez le laplacien de $\varphi = \Gamma\theta/2\pi$ et $\varphi = A\ln r$, où Γ et A sont des constantes.

5. Montrez sans calcul que la fonction suivante satisfait $\Delta\varphi = 0$:

$$\varphi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + A\ln r + B_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ln r + C_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\ln r.$$

Ici, B_i $(i = 1, 2)$ sont les composantes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un vecteur constant $\vec{B}$ et C_{ij} $(i, j = 1, 2)$ celles d'un tenseur constant $\bar{\bar{C}}$.

6. En coordonnées polaires on peut montrer (voir annexe) que la fonction φ obtenue à la question précédente s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + A\ln r + \frac{1}{r}(B_1\cos\theta + B_2\sin\theta) \\ & - \frac{1}{r^2}((C_{11} - C_{22})\cos 2\theta + 2C_{12}\sin 2\theta).\end{aligned}$$

Montrez que $C_{11} = C_{22}$ et déterminez A, B_1, B_2 et C_{12}.

7. Déterminez les composantes u_r et u_θ du champ de vitesse complet de l'écoulement autour du cylindre (on rappelle que $\vec{u} = \vec{U} + \vec{\nabla}\varphi$).

Partie III. Force exercée sur le cylindre

1. Montrez, en explicitant les constantes K_n, que :

$$(u_\theta^2)_{|\Sigma} = \sum_{n=0}^{4} K_n \sin^n \theta.$$

2. En utilisant le résultat de la question I.4, montrez que la composante F_x de la force exercée par le fluide sur le cylindre est nulle.

3. Déterminez la composante F_y. Discutez ce résultat. On rappelle que :

$$\int_0^{2\pi} \sin^n \theta d\theta = 0 \ (n \text{ impair}), \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Annexe

1. Soit la fonction $f(r)$ avec $r = \|\vec{x}\|$. Montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(r) = \frac{x_i}{r} f'(r), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln r = \frac{1}{r^2}\left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{r^2}\right).$$

2. Déduisez-en que l'expression de φ donnée à la question II.6 s'obtient à partir de celle donnée en II.5.

Partie I

1. En l'absence de forces volumiques, les équations du mouvement d'un fluide parfait incompressible sont les équations d'Euler :

$$\partial \vec{u}/\partial t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p/\rho = \vec{0},$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

2. L'écoulement étant stationnaire, l'accélération du fluide est $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$, soit :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = (\vec{\text{rot}}\, \vec{u}) \wedge \vec{u} + \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\|\vec{u}\|^2) = \omega \vec{e}_z \wedge \vec{u} + \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\|\vec{u}\|^2).$$

Or, l'écoulement étant bidimensionnel et incompressible, il existe une fonction $\psi(x, y)$ telle que : $\vec{u} = (\partial\psi/\partial y)\vec{e}_x - (\partial\psi/\partial x)\vec{e}_y$. Par conséquent :

$$\vec{e}_z \wedge \vec{u} = (\partial\psi/\partial x)\vec{e}_x + (\partial\psi/\partial y)\vec{e}_y = \vec{\nabla}\psi.$$

Puisque ω est supposé constant, on en déduit que :

$$(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}) \wedge \vec{u} = \omega\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}(\omega\psi),$$

et l'accélération dérive d'un potentiel :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}(\omega\psi + \tfrac{1}{2}\|\vec{u}\|^2).$$

3. D'après les équations d'Euler, il en résulte que

$$\rho\omega\psi + \tfrac{1}{2}\rho\|\vec{u}\|^2 + p = C,$$

où C est une constante pure indépendante du temps par stationnarité.

4. La force exercée par le fluide sur un obstacle est, en fluide parfait : $\vec{F} = -\iint_\Sigma p\vec{n}dS$. Or, d'après le résultat de la question précédente,

$$\vec{F} = \rho\omega \iint\limits_{\Sigma} \psi\vec{n}dS + \frac{\rho}{2} \iint\limits_{\Sigma} \|\vec{u}\|^2\vec{n}dS - C \iint\limits_{\Sigma} \vec{n}dS.$$

La dernière intégrale s'annule d'après le théorème d'Ostrogradsky. La première s'annule pour la même raison. En effet, même si la fonction de courant ψ dépend de la position, elle est par définition constante le long des lignes de courant d'un écoulement stationnaire. Or, dans un fluide parfait, la paroi imperméable d'un obstacle est elle même une ligne de courant puisque la vitesse y est tangente car $\vec{u}_{|\Sigma} \cdot \vec{n} = 0$. Donc ψ est constante sur Σ et sort de la première intégrale qui s'annule !

Partie II

1. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = -S\vec{e}_z$.

2. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{\nabla}\varphi) = -S\vec{e}_z$ également car $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\nabla}\varphi = \vec{0}$.

   La condition d'incompressibilité s'écrit $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 = \Delta\varphi$.

3. Sur Σ, la condition de glissement $0 = \vec{u}_{|\Sigma} \cdot \vec{n}$ devient :

$$0 = (\vec{U} + \vec{\nabla}\varphi)_{|\Sigma} \cdot \vec{e}_r = (V + SR\sin\theta)\cos\theta + (\partial\varphi/\partial r)_{|\Sigma},$$

d'où le résultat.

4. Le laplacien en coordonnées polaires étant

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2},$$

les deux fonctions $\varphi = \Gamma\theta/2\pi$ et $\varphi = A\ln r$ sont harmoniques, c'est-à-dire telles que $\Delta\varphi = 0$.

5. Puisque $\Delta\ln r = 0$, alors $\vec{\nabla}\Delta\ln r = \vec{0} = \Delta\vec{\nabla}\ln r$ et, par combinaison linéaire, $\Delta(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\ln r) = 0$ pour tout vecteur $\vec{B}$ constant. Donc $B_i(\ln r)_{,i}$ est harmonique. Par itération, il en est de même pour $C_{ij}(\ln r)_{,ij}$, le tenseur C_{ij} étant symétrique pour assurer la commutation des dérivées. Enfin, le laplacien étant un opérateur linéaire, la somme de toutes ces fonctions harmoniques l'est également.

6. En explicitant la condition limite exprimée à la question II.3 et en identifiant les coefficients des termes trigonométriques, on obtient :

$$A = 0, \quad B_1 = VR^2, \quad B_2 = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = -\tfrac{1}{8}SR^4.$$

7. Les composantes du champ de vitesse sont :

$$u_r = V\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{Sr}{2}\left(1 - \frac{R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta,$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} - V\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{Sr}{2}\left(1 - \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right).$$

Sans cisaillement ($S = 0$), le lecteur perspicace reconnaîtra le champ de vitesse de l'écoulement potentiel de circulation Γ autour d'un cylindre de rayon R.

Partie III

1. En $r = R$ on vérifie que $u_r = 0$, ce qui est rassurant puisque le fluide est supposé glisser sur le bord du cylindre. Pour u_θ, toujours sur le bord Σ, on obtient :

$$(u_\theta^2)_{|\Sigma} = K^2 - 4KV\sin\theta + 4(V^2 - KSR)\sin^2\theta + 8SVR\sin^3\theta + 4S^2R^2\sin^4\theta,$$

où $K = \Gamma/(2\pi R) + SR/2$.

2. D'après la question I.4, la force a pour expression

$$\vec{F} = \frac{\rho}{2}\iint_\Sigma \|\vec{u}\|^2\vec{n}dS = \frac{\rho}{2}\int_{z=0}^{L}\int_{\theta=0}^{2\pi} u_\theta^2\vec{e}_r R d\theta dz,$$

soit, en projetant sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$F_x = \frac{\rho}{2} LR \int_0^{2\pi} u_\theta^2 \cos\theta d\theta, \quad F_y = \frac{\rho}{2} LR \int_0^{2\pi} u_\theta^2 \sin\theta d\theta.$$

Le calcul donne $F_x = 0$: il n'y a pas de force de traînée.

3. Après calcul, la force exercée sur le cylindre a pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = \rho V L(2\pi S R^2 - \Gamma)\vec{e}_y.}$$

C'est une force de portance car perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Le premier terme est la contribution du cisaillement et le second la portance de Joukowski (1906).

Pour en savoir plus

Le calcul présenté ici pour un cylindre est tiré de :

G. K. Batchelor : *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge (1967).

La solution n'est en revanche pas connue dans le cas d'une sphère, sauf quand le cisaillement est de faible intensité. Pour une synthèse, le lecteur pourra consulter :

J. Magnaudet & I. Eames : *Ann. Rev. Fluid Mech.* **32**, 659 (2000).

1.2. Oscillations radiales et collapse d'une bulle

Une bulle sphérique de rayon variable $R(t)$ est placée dans un fluide parfait incompressible de densité ρ_f au repos à l'infini. On note P_∞ la pression constante du fluide à l'infini et $P_f(t)$ la pression exercée par le fluide sur la surface de la bulle. En négligeant les effets de pesanteur, l'objectif du problème est de déterminer l'évolution du rayon de la bulle.

Les parties II, III et IV peuvent être traitées indépendamment.

Partie I. Équation de Rayleigh

1. L'écoulement dans le fluide est purement radial : les champs de vitesse et de pression sont de la forme $\vec{u} = u(r,t)\vec{e}_r$ et $p = p(r,t)$. Écrivez les équations

du mouvement et montrez que

$$u(r,t) = A(t)/r^2.$$

2. Soit $\vec{V}_p = (dR/dt)\vec{e}_r = \dot{R}(t)\vec{e}_r$ la vitesse de la paroi Σ de la bulle. À l'aide de la condition d'imperméabilité sur Σ, déterminez $A(t)$.

3. Calculez la pression $p(r,t)$ en tout point du fluide.

4. Établissez l'équation de Rayleigh :

$$P_f(t) = P_\infty + \rho_f \left(R\ddot{R} + \tfrac{3}{2}\dot{R}^2 \right).$$

Partie II. Oscillations libres

1. La bulle est constituée d'un gaz de pression uniforme $P_g(t)$. Soit σ le coefficient de tension superficielle entre le gaz et le fluide. Exprimez la différence de pression à l'interface (loi de Laplace) et déduisez-en l'expression de $P_g(t)$ en fonction du rayon de la bulle.

2. On note $\rho_g(t)$ la masse volumique du gaz supposée uniforme ; montrez que $\rho_g(t)R^3(t)$ est constant.

3. Le gaz est supposé parfait et son évolution isentropique ; sa loi d'état est alors $P_g(t) = K(\rho_g(t))^\gamma$ où $\gamma = 1.4$ est le rapport des chaleurs spécifiques et K une constante. Exprimez $P_g(t)$ en fonction de $R(t)$.

4. Déterminez une équation différentielle pour $R(t)$.

5. Soit R_0 le rayon constant de la bulle lorsqu'elle est à l'équilibre ; montrez alors que le rayon $R(t)$ de la bulle est solution de l'équation dite de Rayleigh-Plesset :

$$\rho_f \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) + \frac{2\sigma}{R} + P_\infty = \left(\frac{2\sigma}{R_0} + P_\infty \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}.$$

6. En posant $R(t) = R_0(1 + \varepsilon\lambda(t))$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$, et en linéarisant l'équation obtenue, déterminez la fréquence des oscillations de la bulle autour du rayon d'équilibre R_0.

   Application numérique : $\rho_f = 10^3$ kg/m^3, $P_\infty = 10^5$ Pa, $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.07$ N/m, $R_0 = 1.67$ mm.

This page intentionally left blank

B

CALCUL TENSORIEL

B.1. Opérateurs différentiels

Dans un repère cartésien muni de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, soit $\vec{x} = x_i\vec{e}_i$ le vecteur associé à un point de coordonnées (x_1, x_2, x_3). On rappelle les définitions et les différentes notations du gradient et du laplacien d'un champ scalaire $f(\vec{x})$, et de la divergence et du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{u}(\vec{x}) = u_j\vec{e}_j$:

$$\vec{\mathrm{grad}} f = \vec{\nabla} f = (\partial f/\partial x_i)\vec{e}_i = (\partial_j f)\vec{e}_j = f_{,m}\vec{e}_m,$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_i = \partial_{jj} f = f_{,mm},$$

$$\mathrm{div}\, \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial u_i/\partial x_i = \partial_k u_k = u_{p,p},$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \varepsilon_{ijk}(\partial u_k/\partial x_j)\vec{e}_i = \varepsilon_{pqr}\partial_q u_r \vec{e}_p = \varepsilon_{abc} u_{c,b}\vec{e}_a,$$

où ε_{ijk} désigne le symbole de permutation :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ ou toute permutation cyclique}\,; \\ -1 & \text{si } (i,j,k) = (2,1,3) \text{ ou toute permutation cyclique}\,; \\ \ \ 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux.} \end{cases}$$

On rappelle que $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{irs} = \delta_{pr}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qr}$.

Enfin, les composantes du gradient d'un vecteur sont : $[\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}]_{ij} = u_{i,j}$; celles du produit tensoriel de deux vecteurs sont : $[\vec{u} \otimes \vec{v}]_{ij} = u_i u_j$.