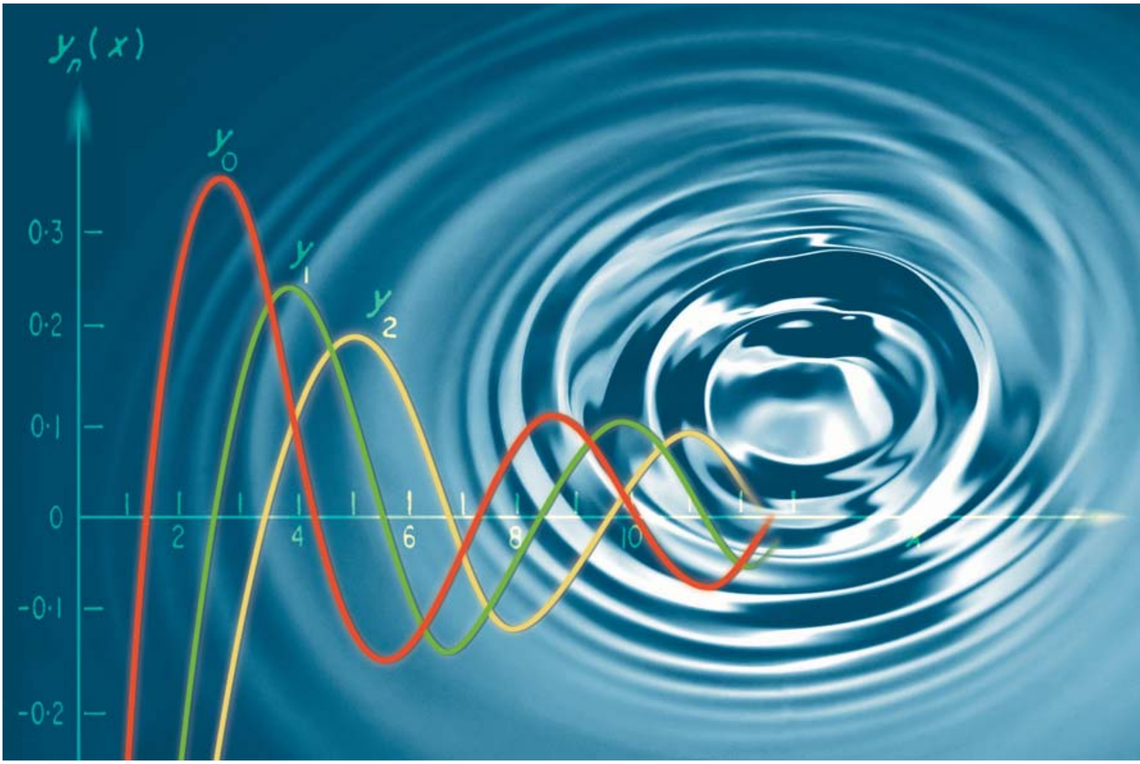
COLLECTION GRENOBLE SCIENCES
DIRIGÉE PAR JEAN BORNAREL

OUTILS MATHÉMATIQUES

À L'USAGE DES SCIENTIFIQUES ET INGÉNIEURS

Nouvelle édition

Elie BELORIZKY



edp sciences

Outils mathématiques

à l'usage des scientifiques et ingénieurs

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » *(Selected by Grenoble Sciences)* correspondent à :

- des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),
- une qualité de réalisation assurée par le centre technique de Grenoble Sciences.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences
Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Pour mieux connaître Grenoble Sciences :
https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr

Pour contacter Grenoble Sciences :
tél : (33) 4 76 51 46 95, e-mail : *grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr*

Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de pap-ebook. Celui-ci se compose de deux éléments :

- un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier
- un **site web compagnon** qui propose :
  - des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage,
  - des exercices pour s'entraîner,
  - des compléments pour approfondir un thème, trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du pap-ebook est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres l'utiliseront et ce, chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un pap-ebook porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera la liste de nos sites compagnons à l'adresse internet suivante :

https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook

Grenoble Sciences bénéficie du soutien de la **région Rhône-Alpes** et du **ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche**.
Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier** de Grenoble.

ISBN 978 2 7598 1656 9

Outils mathématiques

à l'usage des scientifiques et ingénieurs

Elie Belorizky

edp sciences

17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Outils mathématiques
à l'usage des scientifiques et ingénieurs

Cet ouvrage, labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Mathématiques de la collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Comité de lecture :

- Pascal-Henri Fries, Ingénieur chercheur, CEA, Grenoble
- Philippe Peyla, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Marcel Vallade, Professeur honoraire, Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Madeleine Veyssié, Professeur honoraire, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
- José Teixeira, Directeur de recherche, CEA, Saclay

Cette nouvelle édition a été suivie par Stéphanie Trine. Réalisation des nouveaux éléments : Pierre-Luc Manteaux (LaTeX), Sylvie Bordage et Anne-Laure Passavant (figures). Illustration de couverture : Alice Giraud, d'après 2006-01-14 Surface waves.jpg (Wikimedia) : *Ondes de surface sur de l'eau*, image de Roger McLassus (améliorée par DemonDeLuxe, septembre 2006), 14 janvier 2006, sous licence CC-BY-SA-3.0 (*http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en*).

Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur) :

Mathématiques pour l'étudiant scientifique. Tomes I et II (P.-J. Haug) • Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours. Tomes I et II (D. Alibert) • Mathématiques pour les sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé (J.-P. Bertrandias & F. Bertrandias) • Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (J.-P. Grivet) • Analyse numérique et équations différentielles (J.-P. Demailly) • Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Introduction à la mécanique statistique (E. Belorizky & W. Gorecki) • Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (E. Belorizky & W. Gorecki) • Analyse statistique des données expérimentales (K. Protassov) • Magnétisme : I Fondements, II Matériaux (sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie) • La mécanique quantique. Problèmes résolus. Tomes I et II (V.M. Galitski, B.M. Karnakov & V.I. Kogan) • Éléments de Biologie à l'usage d'autres disciplines. De la structure aux fonctions (P. Tracqui & J. Demongeot) • Minimum Competence in Scientific English (S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn) • L'air et l'eau (R. Moreau) • Turbulence (M. Lesieur) • Thermodynamique Chimique (M. Robert & M. Ali Oturan) • Petit traité d'intégration. Riemann, Lebesgue et Kurzweil-Henstock (J.-Y. Briend) • Nombres et algèbre (J.-Y. Mérindol) • Introduction aux variétés différentielles (J. Lafontaine) • Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (J. Sivardière) • Symétrie et propriétés physiques. Des principes de Curie aux brisures de symétrie (J. Sivardière) • Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (M. Attéia & J. Gaches)

et d'autres titres sur le site internet
https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr

A ma chère épouse Nicole

This page intentionally left blank

Avant-propos

Les mathématiques d'usage courant dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur comportent trois grands domaines : l'algèbre linéaire, les probabilités et l'analyse. Cet ouvrage concerne essentiellement l'analyse et deux chapitres d'algèbre relatifs aux matrices et aux tenseurs ; il s'adresse à des lecteurs ayant déjà les notions de base du calcul différentiel et intégral, c'est-à-dire aux étudiants en deuxième année d'université et des classes préparatoires des lycées, ainsi qu'aux étudiants de troisième année de licence et de première année d'écoles d'ingénieurs.

Ce livre est issu d'un enseignement donné aux étudiants de la licence de physique (troisième année) à l'université Joseph Fourier de Grenoble. Il comporte deux parties :

Une première partie (les huit premiers chapitres) est enseignée au premier semestre de l'année universitaire et concerne tous les étudiants inscrits. Cette partie assez élémentaire traite d'abord la résolution des équations différentielles les plus simples, puis introduit les fonctions analytiques et les méthodes d'intégration dans le plan complexe ; elle aborde ensuite le calcul opérationnel (transformation de Laplace) et l'analyse de Fourier et se poursuit par la résolution de quelques équations aux dérivées partielles et, dans cette nouvelle édition, par un exposé assez détaillé du calcul matriciel.

La seconde partie (les quatre derniers chapitres) qui est enseignée au second semestre est optionnelle et d'un niveau légèrement supérieur ; elle concerne surtout les étudiants qui désirent poursuivre leurs études en mastère. Après un chapitre concernant les tenseurs, on traite les propriétés de quelques familles de polynômes orthogonaux indispensables à la mécanique quantique, puis on décrit les propriétés essentielles des fonctions de Bessel et enfin on démontre les fameuses relations de Kramers–Kronig.

Les techniques développées sont suffisantes pour traiter la majorité des phénomènes physiques fondamentaux qui font partie des programmes d'enseignement des différentes filières scientifiques.

Ce livre n'est pas un cours de mathématiques au sens propre, mais il donne les moyens de résoudre les problèmes concrets qui se posent aux scientifiques dans les sciences expérimentales, tout en conservant un minimum de rigueur, ce qui le différencie d'un simple formulaire.

Chaque chapitre est illustré par quelques applications physiques et par plusieurs exercices dont les corrigés sont donnés à la fin de l'ouvrage.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les professeurs Marcel VALLADE et Jean-Jacques BENAYOUN qui ont participé très activement à cet enseignement de mathématiques en licence de physique. Marcel VALLADE a grandement contribué à la rédaction du chapitre sur les tenseurs et est à l'origine de plusieurs des exercices proposés. Le polycopié de travaux dirigés de Jean-Jacques BENAYOUN a été également une source de sujets de problèmes. Je voudrais aussi rendre un hommage appuyé au professeur Yves AYANT qui m'a initié à la théorie et dont les enseignements de mécanique quantique et de mathématiques m'ont profondément marqués et qui est lui-même l'auteur d'un remarquable ouvrage sur les fonctions spéciales. J'exprime aussi ma profonde gratitude à Mme Madeleine VEYSSIÉ, M. José TEIXEIRA et M. Philippe PEYLA qui ont corrigé mon manuscrit et m'ont fait des propositions constructives pour l'améliorer, ainsi qu'à M. Konstantin PROTASSOV pour sa précieuse aide technique et ses conseils. Enfin je suis particulièrement reconnaissant à Pascal FRIES qui m'a aidé dans la rédaction du chapitre sur l'algèbre linéaire et qui a corrigé la nouvelle édition de l'ouvrage.

DU MÊME AUTEUR :

– avec W. GORECKI, *Cours d'introduction à la mécanique statistique*
(Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, Paris, 2001).

– avec W. GORECKI, *Exercices et problèmes corrigés de mécanique statistique*
(Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, Paris, 2002).

– avec Y. AYANT, *Cours de mécanique quantique*
(Dunod, Paris, 2000).

– *Initiation à la mécanique quantique. Approche élémentaire et applications*
(Dunod, Paris, 2000).

– *Probabilités et statistiques dans les sciences expérimentales*
(Collection « 128 », Nathan-Université, Paris, 1998).

Table des matières

This page intentionally left blank

Chapitre 1

Analyse vectorielle

1.1. Les opérateurs différentiels

1.1.1. Champ scalaire et champ vectoriel

Soit une région de l'espace où en chaque point M peut être attaché un nombre ou un vecteur dépendant de la position du point. On obtient ainsi, dans un repère donné, une fonction scalaire ou vectorielle des coordonnées de ce point que l'on désigne par **champ scalaire** ou champ **vectoriel**.

Par exemple, dans l'atmosphère terrestre en chaque point M on peut mesurer la température $T(\mathrm{M})$ ou la pression $P(\mathrm{M})$ qui sont données par des nombres. Les fonctions $T(\mathrm{M})$ et $P(\mathrm{M})$ sont des champs scalaires. Mais pour caractériser le vent en chaque point, il faut déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{M})$ et cette fonction est un champ vectoriel. De même, si l'on considère un corps solide non homogène, la masse volumique ρ en chaque point est une fonction scalaire de ce point et $\rho(\mathrm{M})$ est un champ scalaire. Si le solide est en mouvement dans l'espace à un instant donné les divers points du solide ont des vitesses et des accélérations différentes et $\vec{V}(\mathrm{M})$ et $\vec{\gamma}(\mathrm{M})$ sont des champs vectoriels.

En général on choisit un repère orthonormé de l'espace R_3, $\{\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, de sorte que la position du point M est entièrement décrite par ses composantes x, y, z :
$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Un champ scalaire sera décrit par une fonction scalaire $\omega(x, y, z)$ et un champ vectoriel par une fonction vectorielle $\vec{A}(x, y, z)$. Mais notons bien que les valeurs de $\omega(\mathrm{M})$ et $\vec{A}(\mathrm{M})$ sont indépendantes du choix du système de coordonnées rectangulaires. Partant des fonctions ω et $\vec{A}$ on définit des opérateurs différentiels qui jouent un rôle très important :

- le **gradient** qui est un opérateur vectoriel agissant sur un champ scalaire ;

M

O