

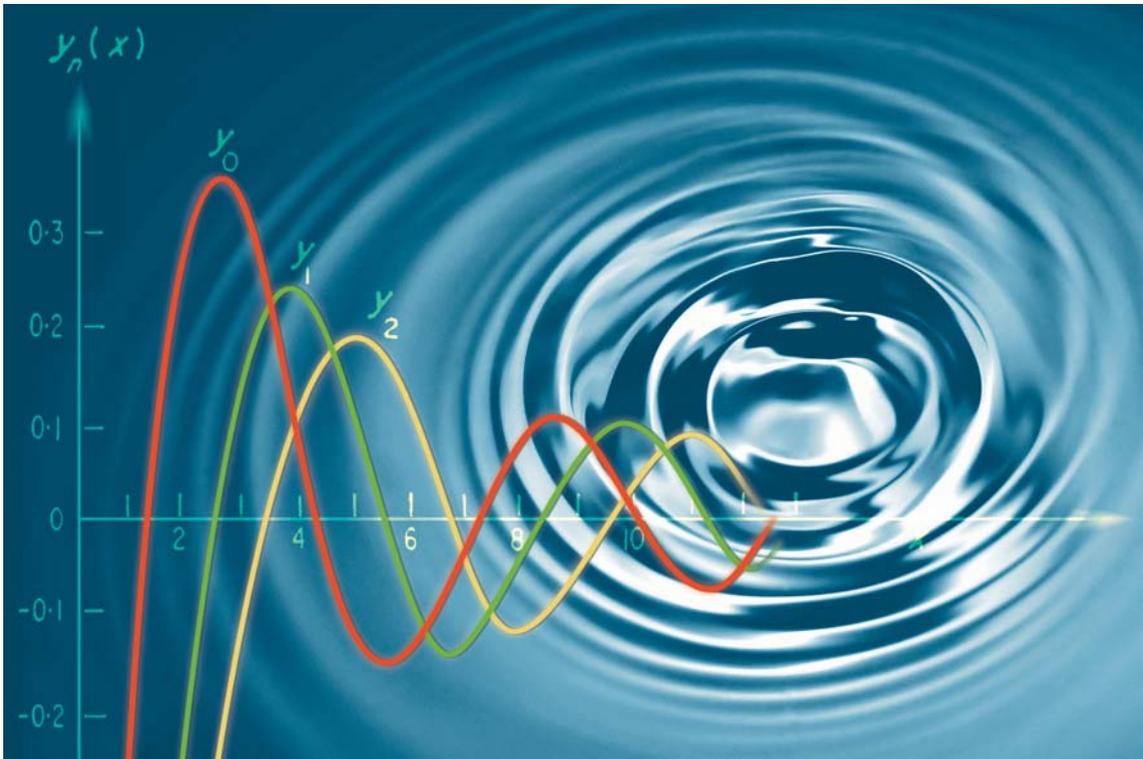


# OUTILS MATHÉMATIQUES

## À L'USAGE DES SCIENTIFIQUES ET INGÉNIEURS

Nouvelle édition

 **Elie BELORIZKY**



# OUTILS MATHÉMATIQUES

À L'USAGE DES SCIENTIFIQUES ET INGÉNIEURS

## Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référé anonyme, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » (*Selected by Grenoble Sciences*) correspondent à :

- ▶ des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- ▶ des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),
- ▶ une qualité de réalisation assurée par le centre technique de Grenoble Sciences.

### Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Pour mieux connaître Grenoble Sciences :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

Pour contacter Grenoble Sciences :

tél : (33) 4 76 51 46 95, e-mail : [grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr](mailto:grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr)

## Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de pap-ebook. Celui-ci se compose de deux éléments :

- ▶ un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier
- ▶ un **site web compagnon** qui propose :
  - des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage,
  - des exercices pour s'entraîner,
  - des compléments pour approfondir un thème, trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du pap-ebook est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres l'utiliseront et ce, chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un pap-ebook porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera la liste de nos sites compagnons à l'adresse internet suivante :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook>

Grenoble Sciences bénéficie du soutien de la **région Rhône-Alpes** et du **ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche**.

Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier** de Grenoble.

ISBN 978 2 7598 1656 9

© EDP Sciences 2015

**OUTILS MATHÉMATIQUES**  
**À L'USAGE DES SCIENTIFIQUES ET INGÉNIEURS**

Elie BELORIZKY



17, avenue du Hoggar  
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112  
91944 Les Ulis Cedex A - France

# Outils mathématiques

## à l'usage des scientifiques et ingénieurs

Cet ouvrage, labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Mathématiques de la collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par Jean BORNAREL, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

### Comité de lecture :

- ▶ Pascal-Henri FRIES, Ingénieur chercheur, CEA, Grenoble
- ▶ Philippe PEYLA, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- ▶ Marcel VALLADE, Professeur honoraire, Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- ▶ Madeleine VEYSSIÉ, Professeur honoraire, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
- ▶ José TEIXEIRA, Directeur de recherche, CEA, Saclay

Cette nouvelle édition a été suivie par Stéphanie TRINE. Réalisation des nouveaux éléments : Pierre-Luc MANTEAUX ( $\LaTeX$ ), Sylvie BORDAGE et Anne-Laure PASSAVANT (figures). Illustration de couverture : Alice GIRAUD, d'après 2006-01-14 Surface waves.jpg (Wikimedia) : *Ondes de surface sur de l'eau*, image de Roger McLassus (améliorée par DemonDeLuxe, septembre 2006), 14 janvier 2006, sous licence CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en>).

### Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur) :

Mathématiques pour l'étudiant scientifique. Tomes I et II (P.-J. Haug) • Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours. Tomes I et II (D. Alibert) • Mathématiques pour les sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé (J.-P. Bertrandias & F. Bertrandias) • Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (J.-P. Grivet) • Analyse numérique et équations différentielles (J.-P. Demailly) • Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Introduction à la mécanique statistique (E. Belorizky & W. Gorecki) • Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (E. Belorizky & W. Gorecki) • Analyse statistique des données expérimentales (K. Protassov) • Magnétisme : I Fondements, II Matériaux (sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie) • La mécanique quantique. Problèmes résolus. Tomes I et II (V.M. Galitski, B.M. Karnakov & V.I. Kogan) • Éléments de Biologie à l'usage d'autres disciplines. De la structure aux fonctions (P. Tracqui & J. Demongeot) • Minimum Competence in Scientific English (S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn) • L'air et l'eau (R. Moreau) • Turbulence (M. Lesieur) • Thermodynamique Chimique (M. Robert & M. Ali Oturan) • Petit traité d'intégration. Riemann, Lebesgue et Kurzweil-Henstock (J.-Y. Briend) • Nombres et algèbre (J.-Y. Mériandol) • Introduction aux variétés différentielles (J. Lafontaine) • Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (J. Sivardière) • Symétrie et propriétés physiques. Des principes de Curie aux brisures de symétrie (J. Sivardière) • Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (M. Attéia & J. Gaches)

et d'autres titres sur le site internet  
<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

A ma chère épouse Nicole

**Vj k'ŕ ci g'kpvgpvkqpcmf 'lghv'dnc pm**

## AVANT-PROPOS

Les mathématiques d'usage courant dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur comportent trois grands domaines : l'algèbre linéaire, les probabilités et l'analyse. Cet ouvrage concerne essentiellement l'analyse et deux chapitres d'algèbre relatifs aux matrices et aux tenseurs ; il s'adresse à des lecteurs ayant déjà les notions de base du calcul différentiel et intégral, c'est-à-dire aux étudiants en deuxième année d'université et des classes préparatoires des lycées, ainsi qu'aux étudiants de troisième année de licence et de première année d'écoles d'ingénieurs.

Ce livre est issu d'un enseignement donné aux étudiants de la licence de physique (troisième année) à l'université Joseph Fourier de Grenoble. Il comporte deux parties :

Une première partie (les huit premiers chapitres) est enseignée au premier semestre de l'année universitaire et concerne tous les étudiants inscrits. Cette partie assez élémentaire traite d'abord la résolution des équations différentielles les plus simples, puis introduit les fonctions analytiques et les méthodes d'intégration dans le plan complexe ; elle aborde ensuite le calcul opérationnel (transformation de LAPLACE) et l'analyse de FOURIER et se poursuit par la résolution de quelques équations aux dérivées partielles et, dans cette nouvelle édition, par un exposé assez détaillé du calcul matriciel.

La seconde partie (les quatre derniers chapitres) qui est enseignée au second semestre est optionnelle et d'un niveau légèrement supérieur ; elle concerne surtout les étudiants qui désirent poursuivre leurs études en maîtrise. Après un chapitre concernant les tenseurs, on traite les propriétés de quelques familles de polynômes orthogonaux indispensables à la mécanique quantique, puis on décrit les propriétés essentielles des fonctions de BESSEL et enfin on démontre les fameuses relations de KRAMERS-KRONIG.

Les techniques développées sont suffisantes pour traiter la majorité des phénomènes physiques fondamentaux qui font partie des programmes d'enseignement des différentes filières scientifiques.

Ce livre n'est pas un cours de mathématiques au sens propre, mais il donne les moyens de résoudre les problèmes concrets qui se posent aux scientifiques dans les sciences expérimentales, tout en conservant un minimum de rigueur, ce qui le différencie d'un simple formulaire.

Chaque chapitre est illustré par quelques applications physiques et par plusieurs exercices dont les corrigés sont donnés à la fin de l'ouvrage.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les professeurs Marcel VALLADE et Jean-Jacques BENAYOUN qui ont participé très activement à cet enseignement de mathématiques en licence de physique. Marcel VALLADE a grandement contribué à la rédaction du chapitre sur les tenseurs et est à l'origine de plusieurs des exercices proposés. Le polycopié de travaux dirigés de Jean-Jacques BENAYOUN a été également une source de sujets de problèmes. Je voudrais aussi rendre un hommage appuyé au professeur Yves AYANT qui m'a initié à la théorie et dont les enseignements de mécanique quantique et de mathématiques m'ont profondément marqués et qui est lui-même l'auteur d'un remarquable ouvrage sur les fonctions spéciales. J'exprime aussi ma profonde gratitude à Mme Madeleine VEYSSIE, M. José TEIXEIRA et M. Philippe PEYLA qui ont corrigé mon manuscrit et m'ont fait des propositions constructives pour l'améliorer, ainsi qu'à M. Konstantin PROTASSOV pour sa précieuse aide technique et ses conseils. Enfin je suis particulièrement reconnaissant à Pascal FRIES qui m'a aidé dans la rédaction du chapitre sur l'algèbre linéaire et qui a corrigé la nouvelle édition de l'ouvrage.

## DU MÊME AUTEUR :

- avec W. GORECKI, *Cours d'introduction à la mécanique statistique* (Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, Paris, 2001).
- avec W. GORECKI, *Exercices et problèmes corrigés de mécanique statistique* (Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, Paris, 2002).
- avec Y. AYANT, *Cours de mécanique quantique* (Dunod, Paris, 2000).
- *Initiation à la mécanique quantique. Approche élémentaire et applications* (Dunod, Paris, 2000).
- *Probabilités et statistiques dans les sciences expérimentales* (Collection « 128 », Nathan-Université, Paris, 1998).

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1 – Analyse vectorielle</b>	<b>1</b>
1.1. Les opérateurs différentiels	1
1.1.1. Champ scalaire et champ vectoriel	1
1.1.2. Opérateur gradient	2
1.1.3. Surface et gradient	3
1.1.4. Opérateur divergence	4
1.1.5. Opérateur rotationnel	6
1.1.6. Opérateur laplacien	7
1.1.7. Relations entre les opérateurs différentiels	8
1.2. Les potentiels	8
1.2.1. Potentiel scalaire	8
1.2.2. Potentiel vecteur	9
1.3. Les intégrales curvilignes, de surface et de volume	9
1.3.1. Intégrale curviligne. Circulation d'un champ vectoriel	9
1.3.2. Intégrale de surface. Flux d'un champ vectoriel	11
1.3.3. Intégrale de volume	13
1.4. Le théorème de STOKES	13
1.5. Le théorème d'OSTROGRADSKY	16
1.6. Exercices	20

<b>Chapitre 2 – Les équations différentielles</b>	<b>23</b>
2.1. Position du problème. Définitions .....	23
2.2. Existence et unicité des solutions .....	24
2.2.1. Equation du 1 <sup>er</sup> ordre .....	24
2.2.2. Equation du 2 <sup>e</sup> ordre .....	25
2.3. Généralités sur les équations du 1 <sup>er</sup> ordre .....	26
2.4. Les équations à variables séparées et séparables .....	26
2.5. Les équations homogènes du 1 <sup>er</sup> ordre .....	27
2.6. Les équations se ramenant aux équations homogènes .....	28
2.7. Les équations linéaires du 1 <sup>er</sup> ordre .....	29
2.8. L'équation de BERNOULLI .....	31
2.9. Les équations aux différentielles totales .....	31
2.10. Facteur intégrant .....	33
2.11. Solution singulière d'une équation du 1 <sup>er</sup> ordre .....	34
2.12. Généralités sur les équations d'ordre supérieur à 1 .....	36
2.13. Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$ .....	36
2.14. Exemples d'équations du 2 <sup>e</sup> ordre se ramenant à des équations du 1 <sup>er</sup> ordre .....	37
2.15. Les équations linéaires homogènes .....	38
2.15.1. Définitions .....	38
2.15.2. Propriétés .....	39
2.16. Les équations linéaires homogènes du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants .....	42
2.17. Généralisation à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $N$ à coefficients constants .....	43
2.18. Les équations linéaires non homogènes du 2 <sup>e</sup> ordre .....	44
2.19. Les équations linéaires non homogènes du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants .....	46
2.20. Application à un circuit électrique .....	48
2.21. Les systèmes d'équations linéaires à coefficients constants .....	50
2.22. L'intégration approchée des équations différentielles .....	54
2.22.1. L'intégration approchée d'une équation du 1 <sup>er</sup> ordre .....	54
2.22.2. Méthode de la série de TAYLOR .....	55
2.22.3. Méthode de RUNGE et KUTTA .....	56
2.23. Exercices .....	58
 <b>Chapitre 3 – Fonctions d'une variable complexe</b>	 <b>65</b>
3.1. Définitions et propriétés élémentaires .....	65
3.1.1. Continuité .....	66
3.1.2. Fonction uniforme .....	66

3.1.3.	Fonction analytique .....	66
3.1.4.	Critère pour une fonction analytique .....	68
3.1.5.	Mise d'une fonction analytique sous la forme $Z = f(z)$ .....	68
3.1.6.	Quelques fonctions analytiques élémentaires .....	69
3.2.	Points singuliers des fonctions analytiques. Fonctions holomorphes .....	70
3.3.	Fonctions multiformes .....	70
3.3.1.	Exemples .....	70
3.3.2.	Uniformisation des fonctions multiformes à l'aide de coupures .....	72
3.4.	Intégrales des fonctions analytiques .....	74
3.4.1.	Intégrale curviligne d'une fonction complexe .....	74
3.4.2.	Théorème de CAUCHY .....	76
3.4.3.	Extension du théorème de CAUCHY .....	77
3.5.	Séries entières dans le domaine complexe .....	78
3.6.	Formule de CAUCHY .....	80
3.7.	Développement d'une fonction holomorphe en série de TAYLOR .....	81
3.8.	Les zéros des fonctions analytiques .....	83
3.9.	Prolongement analytique d'un développement en série de TAYLOR .....	84
3.10.	Différents types de points singuliers .....	85
3.11.	Développement en série de LAURENT .....	85
3.12.	Intégration par la méthode des résidus .....	88
3.12.1.	Théorème des résidus .....	88
3.12.2.	Calcul des résidus relatifs aux pôles .....	89
3.12.3.	Applications au calcul d'intégrales définies réelles .....	91
3.12.4.	Intégration des fonctions multiformes .....	96
3.13.	Transformation conforme .....	98
3.13.1.	Définition .....	98
3.13.2.	Systèmes orthogonaux du plan .....	101
3.13.3.	Applications physiques .....	102
3.14.	Exercices .....	103
<b>Chapitre 4 – Fonctions spéciales</b>		<b>107</b>
4.1.	La fonction bêta .....	107
4.2.	La fonction gamma et la fonction factorielle .....	108
4.3.	Relation entre les fonctions bêta et gamma .....	109
4.4.	La formule des compléments .....	111
4.5.	Propriétés de la fonction factorielle .....	112
4.5.1.	Fonctions gamma et factorielle pour les valeurs négatives de l'argument .....	112
4.5.2.	Représentation graphique de la fonction factorielle .....	113

4.5.3.	La fonction factorielle pour les nombres demi-entiers .....	114
4.5.4.	La formule de STIRLING .....	114
4.6.	La fonction d'erreur .....	116
4.6.1.	Définition et propriétés élémentaires .....	116
4.6.2.	Développement asymptotique de la fonction d'erreur .....	117
4.7.	Exercices .....	119
<b>Chapitre 5 – La transformation de LAPLACE</b>		<b>123</b>
5.1.	Définition. Original et image .....	123
5.2.	Image d'un monôme .....	124
5.3.	Images des fonctions exponentielle et trigonométriques .....	125
5.4.	Les correspondances opératoires .....	126
5.4.1.	Le théorème du déplacement .....	126
5.4.2.	La multiplication de la variable par une constante .....	126
5.4.3.	La dérivation .....	127
5.5.	Le produit de convolution .....	128
5.6.	Exemples de transformées de LAPLACE .....	129
5.7.	La fonction de DIRAC et son image .....	132
5.8.	Applications à la résolution d'équations différentielles .....	133
5.9.	Oscillateur harmonique amorti soumis à une force imposée .....	134
5.10.	Exercices .....	136
<b>Chapitre 6 – Analyse de FOURIER</b>		<b>141</b>
6.1.	Séries de FOURIER .....	141
6.2.	Exemples de développement en série de FOURIER .....	143
6.3.	Séries de FOURIER des fonctions de période spatiale $L$ ou temporelle $T$ ...	144
6.4.	Série de FOURIER d'une fonction non périodique .....	146
6.5.	Forme complexe du développement .....	147
6.6.	Intégrale de FOURIER .....	149
6.7.	Les correspondances opératoires .....	152
6.8.	Exemples de transformées de FOURIER .....	154
6.9.	Transformée de FOURIER des fonctions de plusieurs variables .....	156
6.10.	Exercices .....	159
<b>Chapitre 7 – Les équations aux dérivées partielles</b>		<b>163</b>
7.1.	Introduction .....	163
7.2.	Les équations linéaires homogènes à coefficients constants .....	163
7.3.	Equation de propagation des ondes .....	164
7.3.1.	Milieu infini à une dimension .....	165

7.3.2.	Milieu fini à une dimension. Equation des cordes vibrantes .....	166
7.3.3.	Equation de propagation à trois dimensions .....	169
7.4.	L'équation de diffusion .....	172
7.4.1.	Diffusion à une dimension .....	173
7.4.2.	Diffusion à trois dimensions .....	175
7.5.	L'équation de LAPLACE .....	176
7.5.1.	Coordonnées sphériques .....	176
7.5.2.	Coordonnées cylindriques .....	177
7.6.	L'équation de POISSON .....	178
7.7.	La fonction de GREEN .....	179
7.8.	Exercices .....	180
<b>Chapitre 8 – Algèbre linéaire, calcul matriciel</b>		<b>183</b>
8.1.	Les opérateurs .....	183
8.2.	Espaces vectoriels et opérateurs linéaires .....	185
8.2.1.	Les espaces vectoriels .....	185
8.2.2.	Opérateur linéaire sur un espace vectoriel .....	185
8.3.	Définition des matrices .....	186
8.4.	Combinaisons de matrices .....	187
8.4.1.	Addition et multiplication par un scalaire .....	187
8.4.2.	Multiplication de deux matrices .....	188
8.4.3.	Sous-matrices .....	189
8.4.4.	Trace d'une matrice .....	189
8.4.5.	Produit direct de matrices .....	190
8.5.	Matrices particulières .....	190
8.5.1.	Matrice nulle, unité, diagonale .....	190
8.5.2.	Matrice transposée, adjointe, hermitique, unitaire .....	191
8.6.	Calcul des déterminants .....	192
8.7.	Inverse d'une matrice carrée .....	194
8.8.	Application à la résolution des systèmes d'équations linéaires .....	196
8.9.	Matrices équivalentes .....	198
8.10.	Valeurs propres, vecteurs propres, équation caractéristique d'une matrice .....	199
8.10.1.	Recherche des valeurs propres .....	199
8.10.2.	Recherche des vecteurs propres .....	200
8.11.	Théorème de CAYLEY-HAMILTON .....	203
8.12.	Application aux quadripôles électriques .....	206
8.13.	Espace vectoriel réel $R^n$ .....	209
8.13.1.	Définition, produit scalaire et bases .....	209

8.13.2.	Processus d'orthogonalisation de SCHMIDT .....	210
8.13.3.	Représentation d'un opérateur linéaire .....	211
8.13.4.	Changement de base .....	212
8.13.5.	Application aux rotations planes .....	213
8.13.6.	Application aux rotations dans l'espace : angles d'EULER .....	214
8.14.	Espace vectoriel complexe $C^n$ .....	216
8.14.1.	Généralités, produit scalaire hermitique .....	216
8.14.2.	Matrices hermitiques .....	217
8.14.3.	Matrices unitaires .....	220
8.15.	Formes quadratiques et applications .....	221
8.15.1.	Diagonalisation d'une forme quadratique réelle .....	221
8.15.2.	Application à l'étude des petits mouvements .....	222
8.16.	Espace vectoriel et algèbre de DIRAC .....	225
8.16.1.	Vecteurs droits et gauches .....	225
8.16.2.	Opérateurs Linéaires .....	228
8.16.3.	Commutateur de deux opérateurs .....	229
8.16.4.	Valeurs et vecteurs propres .....	230
8.16.5.	Produit ket-bra. Projecteurs. ....	231
8.16.6.	Changement de base .....	232
8.16.7.	Fonction d'opérateur hermitique .....	232
8.16.8.	Produit direct ou tensoriel .....	233
8.16.9.	Espaces à une infinité continue de dimensions .....	235
8.17.	Exercices .....	236
<b>Chapitre 9 – Les tenseurs</b>		<b>243</b>
9.1.	Introduction .....	243
9.2.	Tenseurs en coordonnées cartésiennes .....	244
9.2.1.	Définition des tenseurs .....	244
9.2.2.	Critère de tensorialité .....	246
9.3.	Cas particuliers .....	246
9.3.1.	Scalaire .....	246
9.3.2.	Vecteur polaire .....	247
9.3.3.	Tenseur de rang 2 .....	247
9.3.4.	Tenseur symétrique de rang 2 .....	247
9.3.5.	Exemples de tenseurs symétriques .....	248
9.3.6.	Tenseur antisymétrique de rang 2 .....	250
9.3.7.	Tenseur de rang 3 .....	251
9.4.	Principe de symétrie. Application aux propriétés physiques représentées par des tenseurs .....	253

9.5.	Les tenseurs en coordonnées non cartésiennes .....	255
9.5.1.	Covariance et contravariance .....	255
9.5.2.	Contraction des indices d'un tenseur .....	257
9.5.3.	Tenseur métrique .....	258
9.5.4.	Tenseurs antisymétriques .....	260
9.6.	Application à la relativité et aux équations de MAXWELL .....	261
9.6.1.	Les tenseurs en relativité .....	261
9.6.2.	Les équations de MAXWELL sous forme tensorielle .....	263
9.7.	Exercices .....	265
<b>Chapitre 10 – Les polynômes orthogonaux</b>		<b>269</b>
10.1.	Définitions .....	269
10.2.	Formules de récurrence .....	270
10.3.	Fonction génératrice .....	271
10.4.	Les polynômes de LEGENDRE .....	271
10.4.1.	Définition .....	271
10.4.2.	Orthogonalité .....	273
10.4.3.	Relations de récurrence. Equation de LEGENDRE .....	274
10.4.4.	Développement d'une fonction en série de $P_l(x)$ .....	276
10.5.	Fonctions de LEGENDRE associées .....	277
10.5.1.	Définition .....	277
10.5.2.	Relations d'orthogonalité .....	278
10.5.3.	Equation différentielle .....	279
10.5.4.	Relations de récurrence .....	279
10.6.	Les harmoniques sphériques .....	280
10.6.1.	Résolution de l'équation de LAPLACE en coordonnées sphériques ..	281
10.6.2.	Propriétés des harmoniques sphériques .....	284
10.6.3.	Développement d'une fonction en série des $Y_l^m$ .....	284
10.6.4.	Théorème d'addition des $Y_l^m$ .....	285
10.7.	Les polynômes d'HERMITE .....	286
10.7.1.	Définition .....	286
10.7.2.	Propriétés élémentaires des $H_n(x)$ .....	287
10.7.3.	Relations de récurrence .....	288
10.7.4.	Application à la résolution de l'équation de SCHRÖDINGER d'un oscillateur harmonique .....	289
10.8.	Les polynômes de LAGUERRE .....	290
10.8.1.	Définition. Propriétés élémentaires .....	290
10.8.2.	Relations de récurrence. Equation différentielle .....	291
10.9.	Exercices .....	293

<b>Chapitre 11 – Fonctions de BESSEL et applications</b>	<b>297</b>
11.1. L'équation différentielle de BESSEL .....	297
11.2. Fonctions de BESSEL de première et de deuxième espèce .....	298
11.2.1. Fonctions de BESSEL de première espèce .....	298
11.2.2. Relation entre $J_\nu$ et $J_{-\nu}$ .....	300
11.2.3. Fonctions de BESSEL de deuxième espèce .....	301
11.3. Forme intégrale des fonctions de BESSEL .....	302
11.4. Relations de récurrence .....	303
11.5. Fonctions de BESSEL d'indice entier et demi-entier .....	304
11.5.1. Fonctions de BESSEL d'indice entier .....	304
11.5.2. Fonctions de BESSEL d'indice demi-entier .....	306
11.6. Fonctions de HANKEL .....	307
11.7. Les fonctions de BESSEL modifiées .....	307
11.7.1. Fonctions $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ .....	307
11.7.2. Relations de récurrence des fonctions de BESSEL modifiées .....	309
11.7.3. Forme intégrale de $K_\nu(x)$ .....	311
11.8. Comportement des fonctions de BESSEL dans les cas limite .....	313
11.8.1. Faibles valeurs de l'argument .....	313
11.8.2. Comportement asymptotique des fonctions de BESSEL .....	314
11.9. Les fonctions de BESSEL sphériques .....	315
11.10. Applications des fonctions de BESSEL .....	318
11.10.1. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans le plan .....	318
11.10.2. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans l'espace .....	320
11.10.3. Ondes stationnaires dans le plan .....	321
11.10.4. Ondes stationnaires en symétrie sphérique .....	322
11.11. Exercices .....	323
<b>Chapitre 12 – Les relations de KRAMERS–KRONIG</b>	<b>327</b>
12.1. Valeur principale d'une intégrale .....	327
12.2. Valeur principale d'une fonction et fonction de DIRAC .....	328
12.3. Les relations de KRAMERS–KRONIG .....	329
12.4. Etude des systèmes à réponse linéaire .....	332
12.4.1. Définition .....	332
12.4.2. Exemples .....	332
12.4.3. Propriétés des systèmes linéaires .....	332
12.4.4. Excitation sinusoïdale .....	333
12.5. Application aux susceptibilités .....	334
12.6. Exercices .....	335

<b>Corrigés des exercices</b>	<b>337</b>
Exercices du chapitre 1 .....	337
Exercices du chapitre 2 .....	340
Exercices du chapitre 3 .....	348
Exercices du chapitre 4 .....	357
Exercices du chapitre 5 .....	361
Exercices du chapitre 6 .....	367
Exercices du chapitre 7 .....	374
Exercices du chapitre 8 .....	381
Exercices du chapitre 9 .....	393
Exercices du chapitre 10 .....	402
Exercices du chapitre 11 .....	407
Exercices du chapitre 12 .....	417
<b>Annexes</b>	<b>421</b>
I.    Unicité des solutions d'une équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre .....	421
II.   Formule de SIMPSON d'intégration .....	424
III.  Les déterminants .....	425
IV.  Tableau de transformées de LAPLACE .....	430
<b>Bibliographie</b>	<b>435</b>
<b>Index</b>	<b>437</b>

**Vj k'ŕ ci g'kpvgpvkqpcmf 'lghv'dnc pm**

# CHAPITRE 1

## ANALYSE VECTORIELLE

### 1.1. LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

#### 1.1.1. CHAMP SCALAIRE ET CHAMP VECTORIEL

Soit une région de l'espace où en chaque point  $M$  peut être attaché un nombre ou un vecteur dépendant de la position du point. On obtient ainsi, dans un repère donné, une fonction scalaire ou vectorielle des coordonnées de ce point que l'on désigne par **champ scalaire** ou **champ vectoriel**.

Par exemple, dans l'atmosphère terrestre en chaque point  $M$  on peut mesurer la température  $T(M)$  ou la pression  $P(M)$  qui sont données par des nombres. Les fonctions  $T(M)$  et  $P(M)$  sont des champs scalaires. Mais pour caractériser le vent en chaque point, il faut déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(M)$  et cette fonction est un champ vectoriel. De même, si l'on considère un corps solide non homogène, la masse volumique  $\rho$  en chaque point est une fonction scalaire de ce point et  $\rho(M)$  est un champ scalaire. Si le solide est en mouvement dans l'espace à un instant donné les divers points du solide ont des vitesses et des accélérations différentes et  $\vec{V}(M)$  et  $\vec{\gamma}(M)$  sont des champs vectoriels.

En général on choisit un repère orthonormé de l'espace  $R_3$ ,  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , de sorte que la position du point  $M$  est entièrement décrite par ses composantes  $x, y, z$  :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Un champ scalaire sera décrit par une fonction scalaire  $\omega(x, y, z)$  et un champ vectoriel par une fonction vectorielle  $\vec{A}(x, y, z)$ . Mais notons bien que les valeurs de  $\omega(M)$  et  $\vec{A}(M)$  sont indépendantes du choix du système de coordonnées rectangulaires. Partant des fonctions  $\omega$  et  $\vec{A}$  on définit des opérateurs différentiels qui jouent un rôle très important :

- le **gradient** qui est un opérateur vectoriel agissant sur un champ scalaire ;

relations de récurrence, 291  
lames à faces parallèles, 239  
LAPLACE  
  équation de, 19, 67, 176, 281  
  image de, 123  
  de l'exponentielle, 125  
  des fonctions trigonométriques, 125  
  original de, 123  
  transformation de, 123  
  transformée de, 123, 129, 153, 430  
laplacien, 2, 7  
LAURENT  
  série de, 85  
LEGENDRE  
  équation de, 274  
  fonction de  
    associée, 277  
    orthogonalité, 278  
  relations de récurrence, 279  
  polynôme de, 271  
  fonction génératrice, 294  
  orthogonalité, 273  
  relations de récurrence, 275  
ligne  
  de champ, 102, 103  
  équipotentielle, 102, 103  
LIOUVILLE  
  théorème de, 83  
loi  
  de FICK, 172  
  de FOURIER, 172  
LORENTZ  
  fonction de, 154  
  transformation de, 261

## M

matrice(s)  
  addition de, 187  
  adjointe, 191, 196  
  antihermitique, 196  
  antisymétrique, 191, 196  
  complémentaire, 194, 196  
  complexe conjuguée, 191, 196  
  définition, 186  
  diagonale, 190  
  équivalentes, 198

hermitique, 192, 196, 217  
  imaginaire pure, 196  
  inverse, 194, 196  
  multiplication des, 188  
  nulle, 190  
  orthogonale, 192, 196  
  réelle, 196  
  singulière, 187, 194  
  symétrique, 191, 196  
  trace d'une, 189  
  transposée, 191, 196  
  unitaire, 192, 196, 220  
  unité, 190

## MAXWELL

  équations de, 263  
méthode des résidus, 88  
métrique, 258  
modes normaux de vibration, 224, 240  
moment  
  cinétique, 251, 294  
  d'inertie, 265  
  dipolaire, 267, 334  
  octupolaire, 267  
  quadrupolaire, 267

## O

onde  
  plane, 169, 242, 325  
  sphérique, 169, 325  
  stationnaire  
    dans le plan, 321  
    en symétrie sphérique, 322  
opérateur(s)  
  adjoint, 228  
  différentiels, 1  
  hermitique, 228, 230  
  inverse, 185, 229  
  linéaire, 185, 228  
  produit d', 184  
  régulier, 184  
  somme d', 184  
  unitaire, 229  
  unité, 184  
original de LAPLACE, 123  
orthogonalisation de SCHMIDT, 210  
orthogonalité des polynômes de LEGENDRE, 273

- oscillateur
  - couplé, 224
  - harmonique, 134, 289
- OSTROGRADSKY
  - théorème d', 16
- P**
- PARSEVAL
  - théorème de, 371
- partie principale
  - d'une fonction, 329
  - d'une intégrale, 327
- peigne de DIRAC, 161
- petits mouvements, 222
- piézoélectrique, 267
- point
  - critique
    - algébrique, 71, 85
    - logarithmique, 71, 85
  - de branchement, 71, 85
  - singulier, 70, 85
    - essentiel, 85
- POISSON
  - équation de, 19, 178
  - intégrale de, 180
- pôles, 85
- polynôme
  - d'HERMITE, 286
    - relations de récurrence, 288
  - de LAGUERRE, 290
    - généralisé, 290
    - orthogonalité des, 291
    - relations de récurrence, 291
  - de LEGENDRE, 271
    - fonction génératrice, 294
    - orthogonalité, 273
    - relations de récurrence, 275
  - orthogonaux, 269
    - relations de récurrence, 270
- potentiel
  - de YUKAWA, 158
  - électrostatique, 19
  - scalaire, 8
  - vecteur, 9
- principe de symétrie, 253
- produit
  - de convolution, 128, 152, 157
  - direct ou tensoriel, 233
    - de deux bras, 233
    - de deux kets, 233
    - de matrice, 190
    - d'opérateurs, 234
  - ket bra, 231
  - mixte, 252
  - scalaire, 209, 247, 256
    - hermitique, 216, 226
  - vecteuriel, 251, 252
- projecteur, 231
- prolongement analytique, 84
- pseudo
  - scalaire, 252
  - vecteur, 251
- puissance fractionnaire d'une matrice, 205
- Q**
- quadripôles électriques, 206
- quadrivecteur, 261
  - densité de courant, 262
  - énergie impulsion, 262
  - potentiel, 262
- R**
- rang, 187
- relations de
  - CAUCHY-RIEMANN, 67
  - KRAMERS-KRONIG, 327, 329
  - récurrence des fonctions
    - de BESSEL, 303
    - de BESSEL modifiées, 309
    - de LEGENDRE, 279
  - récurrence des polynômes
    - de LAGUERRE, 291
    - de LEGENDRE, 275
    - d'HERMITE, 288
    - orthogonaux, 270
- relativité, 261
- réponse linéaire, 332
- représentation d'un opérateur linéaire, 211
- résidus
  - méthode des, 88
  - relatifs aux pôles, 89