Chapitre 1

Équations de conservation de la masse

Objectifs

1- **Connaître les différentes formes différentielles et intégrales de l'équation de continuité.**

2- **Savoir faire un bilan de masse au niveau d'un volume de contrôle fixe et déformable.**

3- **Connaître les formes usuelles de l'équation de continuité pour une conduite de diamètre constant et variable.**

4- **Savoir formuler l'équation de continuité pour un écoulement à surface libre et dégager les différents cas particuliers.**

5- **Appliquer l'équation de continuité aux écoulements souterrains et dériver l'équation de Laplace.**

6- **Savoir traiter les différents problèmes relatifs à la vidange et au remplissage des réservoirs.**

Pour résoudre la plupart des problèmes qui se posent en ingénierie, on utilise un principe universel et unique de conservation. L'équation qui traduit ce principe de conservation peut prendre des formes différentes selon les contextes. La mécanique des fluides qui constitue la fondation de l'hydraulique utilise les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de son moment ainsi que de l'énergie.

Les chapitres 1 et 2 traitent respectivement des principes de conservation de la masse et de l'énergie qui sont les plus utilisés en hydraulique. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est introduite, selon le besoin, dans les chapitres subséquents.

1.1 Définitions

La *masse* m contenue dans un volume S se calcule par la relation

$$m = \int_S \rho \, dS \tag{1.1}$$

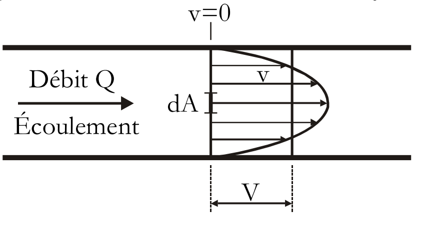
où ρ est la *masse volumique* qui s'exprime en kg/m^3, la masse étant en kg et le volume en m^3. Lorsque le corps est homogène, cette relation devient

$$m = \rho S \tag{1.2}$$

Le *débit volumique* qui traverse une section d'écoulement A se calcule par la relation (figure 1.1)

$$Q = \int_A v \, dA = VA \tag{1.3}$$

Fig. 1.1 Profil des vitesses et vitesse moyenne



où

v est la vitesse d'écoulement qui varie selon la position; elle est nulle au point qui est en contact avec une paroi fixe, et maximale au point le plus éloigné des parois,

V est la vitesse moyenne d'écoulement (m/s),
A est la section d'écoulement (m^2), normale au courant.

En système international, le débit doit être exprimé en m^3/s, mais pour des raisons pratiques, on peut aussi l'exprimer en litres par seconde (l/s), litres par minute (l/min), etc., selon son ordre de grandeur.

Le *débit massique* qui traverse une section d'écoulement A, se calcule par la relation

$$\dot{m} = \int_A \rho \, v \, dA \tag{1.4}$$

Lorsque le fluide est homogène et incompressible, cette relation devient $\dot{m} = \rho Q$ où Q est le débit volumique. En système international, le débit massique est exprimé en kg/s.

Application 1.1

L'eau de masse volumique $\rho = 1000 kg/m^3$ à 4°C s'écoule avec une vitesse moyenne V=1,0m/s dans une conduite de diamètre D=0,6m.
Il faut calculer les débits volumique et massique.

Réponses :
Le débit volumique Q se calcule par la relation (1.3) :
$Q = AV = V(\pi D^2/4) = [\pi(0{,}6m)^2/4] \cdot 1{,}0m/s = 0{,}2826 m^3/s$

Le débit massique $\dot{m}$ se calcule par la relation (1.4) :
$\dot{m} = \rho Q = 1000 kg/m^3 \cdot 0{,}2826 m^3/s = 282{,}6 kg/s$

1.2 L'équation de continuité : Forme intégrale

1.2.1 Formulation générale

L'équation de continuité traduit le principe selon lequel la matière ne peut ni disparaître ni être créée. Cette équation exprime en termes comptables que dans un temps dt, la quantité de matière qui entre dans un volume de contrôle est égale à celle qui en sort plus celle qui s'y accumule (figure 1.2) :

$$\dot{m}_E = \dot{m}_S + \frac{\partial m}{\partial t} \tag{1.5}$$

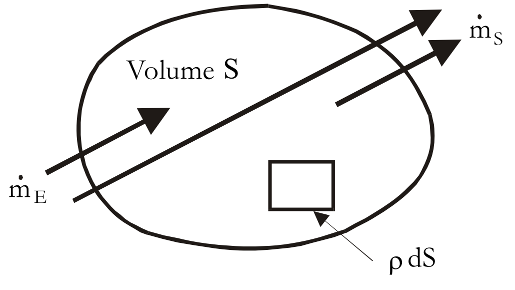


Fig. 1.2 Schématisation d'un volume de contrôle

1.2.2 L'équation de continuité pour un fluide incompressible

En hydraulique, on traite principalement du transport et du stockage de l'eau. Pour l'eau, les variations de pression et de température en jeu ne font pratiquement pas modifier la masse volumique qui peut être considérée comme constante (fluide incompressible). Dans ce contexte, l'équation (1.5) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S \tag{1.6}$$

où Q_E et Q_S sont les débits volumiques entrant et sortant.

L'équation de continuité exprime donc que pour un fluide incompressible, le taux de variation du volume est égal à la différence entre les débits volumiques entrant Q_E et sortant Q_S.

Application 1.2

Une rivière apporte un débit Q_E = $100 m^3/s$ à un barrage hydroélectrique. Le débit turbiné est Q_S = $200 m^3/s$. 1) Quel est le taux de variation de stockage dans le réservoir dans ces conditions?
2) Si le stockage au jour j est S_j = $100 hm^3$, quel est le stockage S_{j+1} au jour j+1 ?

Réponses :

$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S = 100 m^3/s - 200 m^3/s = -100 m^3/s$. Le réservoir se vide à un taux de $100 m^3/s$.

$S_{j+1} = S_j - [100 m^3/s \cdot (24 h/j \cdot 3600 s/h)]/(10^6 m^3/hm^3) = 91{,}36 hm^3$.

1.2.3 Cas particuliers courants pour les conduites sous pression

1.2.3.1 Conduite pleine avec diamètre constant

Quand la conduite est pleine, le volume d'eau S contenu dans le tronçon de conduite de diamètre D ne varie pas dans le temps (figure 1.3), si bien que $\frac{\partial}{\partial t}(S) = 0$ et l'équation (1.6) s'écrit :

$$0 = Q_E - Q_S \tag{1.7}$$

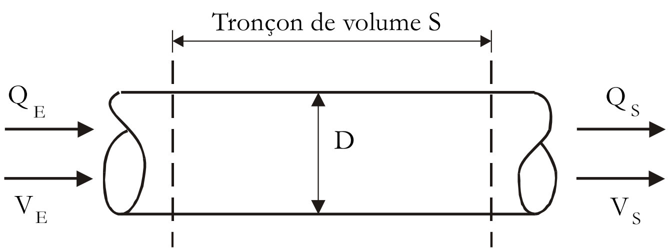


Fig. 1.3 Conduite pleine avec diamètre constant