

Introduction

Pour comprendre d'où vient le modèle standard qui régit aujourd'hui la physique quantique, nous commençons par un retour sur ses origines. Quand l'idée d'une onde associée au mouvement de toute particule a été inventée, Louis de Broglie a été guidé par les conséquences de la relativité restreinte [23]. La première équation pour son onde fut trouvée par E. Schrödinger [47]. Elle n'était pas relativiste et ne pouvait donc pas être la vraie équation d'onde. La même année le spin de l'électron fut découvert. Il demeure le principal changement par rapport à la physique pré-quantique car le spin $1/2$ n'a pas d'équivalent classique. Pauli donna une équation d'onde non relativiste pour un électron à spin. Cette équation fut le point de départ de la tentative faite par P. Dirac [28] pour obtenir une équation d'onde relativiste pour l'électron. Cette équation de Dirac fut un immense succès. Encore aujourd'hui elle est considérée comme l'équation d'onde de toute particule de spin $1/2$, électron tout comme positron, muon et anti-muon mais aussi neutrinos et quarks.

Cette équation d'onde fut étudiée activement par Louis de Broglie et par ses étudiants. Il publia un premier livre sur elle dès 1934 [24], expliquant comment c'est cette équation d'onde qui donne dans le cas de l'atome d'hydrogène la quantification des niveaux d'énergie, les nombres quantiques attendus, le bon nombre des états liés, les bons niveaux d'énergie, les facteurs de Landé. La principale nouveauté en physique qui s'introduit par l'équation de Dirac est le fait que l'onde n'a pas le comportement des vecteurs et tenseurs, dans une rotation de Lorentz, l'onde est un spineur et est transformée très différemment. Il en résulte que l'équation de Dirac est invariante de forme dans toute transformation de Lorentz. Cette invariance de forme est le point de départ de notre étude et le fil rouge de ce livre.

L'équation de Dirac a été obtenue à partir de l'équation de Pauli et est construite à l'aide de matrices complexes 4×4 comportant des blocs de matrices de Pauli. De nombreuses années plus tard D. Hestenes [30] s'est servi de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps pour obtenir une forme différente de cette même équation d'onde. Les tenseurs que l'on construit à partir des spineurs de Dirac apparaissent fort différents. Les relations entre ces tenseurs sont beaucoup plus faciles à obtenir.

Un des paramètres de l'onde de Dirac, l'angle d'Yvon-Takabayasi [48] était complètement différent de toutes les grandeurs physiques classiques. G. Lochak

comprit que cet angle permet une seconde invariance de jauge [37]. Il a établi qu'une équation d'onde pour son monopôle magnétique était possible avec un terme de masse non linéaire. Quand ce terme de masse est nul, l'onde est constituée de deux spineurs de Weyl indépendants.

Ce terme de masse est compatible avec la jauge électrique régissant l'équation de Dirac. Il peut donc remplacer le terme linéaire de l'équation de Dirac de l'électron [7]. Une équation d'onde non linéaire était attendue par de Broglie, parce qu'il est nécessaire de lier la particule à l'onde. Mais ceci n'explique pas comment choisir la non linéarité. Celle-ci est un redoutable problème en physique quantique, la théorie quantique est une théorie linéaire, c'est en résolvant une équation d'onde linéaire que la quantification des niveaux d'énergie et les nombres quantiques sont obtenus pour l'atome d'hydrogène. Si l'on part d'une équation non linéaire, normalement on n'est même pas capable d'obtenir la quantification et les nombres quantiques.

Néanmoins l'étude de cette équation d'onde non linéaire a été entreprise dans le cas où l'onde de Dirac est son approximation linéaire. Dans ce cas l'équation d'onde est homogène. Elle s'obtient à partir d'une densité lagrangienne qui ne diffère du lagrangien de la théorie linéaire que par le terme de masse. Par conséquent de nombreux résultats sont semblables. Par exemple la dynamique de l'électron est la même, l'électron suit la loi de force de Lorentz.

Deux formalismes étaient donc disponibles, celui de Dirac avec ses matrices complexes 4×4 , et l'algèbre de Clifford de l'espace-temps. Une représentation matricielle relie ces deux formalismes. Comme le cas de l'atome d'hydrogène donne les principaux résultats, une première tentative fut faite pour résoudre l'équation non linéaire dans ce cas. Heinz Krüger a donné un précieux outil [35] en trouvant un moyen de séparer les variables en coordonnées sphériques. De plus le début de cette résolution par séparation des variables est le même, tant pour l'équation de Dirac linéaire que pour l'équation non linéaire homogène. Mais il y a ensuite une grave difficulté : l'angle d'Yvon-Takabayasi est nul dans le plan d'équation $x^3 = 0$; cet angle est une fonction compliquée d'une variable angulaire et de la variable radiale. De plus, pour toute solution avec une fonction radiale comprenant un polynôme de degré non nul, des cercles existent sur lesquels l'angle d'Yvon-Takabayasi n'est pas défini. Au voisinage de ces cercles l'angle n'est pas petit, donc les solutions de l'équation linéaire n'ont aucune raison d'être les approximations des solutions de l'équation non linéaire. Finalement il est possible de calculer [8] un autre ensemble de solutions orthonormales de l'équation de Dirac, qui ont un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et partout petit. Ces solutions sont les approximations linéaires des solutions de l'équation non linéaire. L'existence d'un tel ensemble de solutions orthonormales est un argument puissant en faveur de notre équation d'onde non linéaire.

Quand on a deux formalismes pour la même théorie, la question arrive nécessairement : lequel est le bon ? La comparaison des avantages respectifs de ces deux formalismes a fait naître l'idée qu'un troisième formalisme était peut-être possible. Et effectivement un troisième formalisme existe [10] pour

écrire la théorie de Dirac : c'est l'algèbre de Clifford de l'espace physique. Elle a été utilisée en premier par W.E. Baylis [2]. Cette algèbre de Clifford est isomorphe à l'algèbre matricielle complexe engendrée par les matrices de Pauli. La physique quantique a connu très tôt ces matrices qui furent inventées pour fabriquer la première équation d'onde pour une particule de spin $1/2$. Maintenant encore ce formalisme est utilisé pour obtenir l'invariance relativiste de l'équation de Dirac. Ayant donc maintenant trois formalismes pour une seule théorie la question se reposait : lequel est le bon ?

Le critère de choix était nécessairement l'invariance de l'équation d'onde sous le groupe de Lorentz. Donc une étude complète et reprenant tout à zéro de l'invariance de forme de la théorie de Dirac a été faite [12]. C'était une chose bien connue, traitée dans de nombreux manuels, mais toujours avec les mêmes défauts du point de vue mathématique. La raison en est que deux groupes de Lie différents peuvent avoir la même algèbre de Lie. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'algèbre engendrée par les opérateurs infinitésimaux du groupe de Lie. La mécanique quantique n'utilise que ces opérateurs infinitésimaux, et il est donc très difficile d'éviter l'ambiguïté. Mais il est possible de se passer des opérateurs infinitésimaux. Et quand on travaille sans eux, on peut aisément voir que le groupe d'invariance fondamental est plus vaste que ce que l'on attendait.

La première conséquence de l'existence de ce groupe plus vaste est la possibilité de définir, à partir de l'onde de Dirac, des dilatations d'une variété d'espace-temps intrinsèque sur la variété d'espace-temps usuelle. Ainsi l'espace-temps est double et l'onde de Dirac fait le lien entre les deux variétés d'espace-temps. Celles-ci sont très différentes l'une de l'autre, la variété intrinsèque est non isotrope, c'est une variété à torsion.

Dans plusieurs articles et deux précédents livres [16][17] ont été présentées plusieurs conséquences de ce groupe d'invariance plus vaste. Ce groupe d'invariance de forme régit non seulement la théorie de Dirac, mais aussi tout l'électromagnétisme, avec ou sans monopôles magnétiques, avec ou sans photons. Mais ce n'est pas tout, puisque ce groupe d'invariance de forme régit aussi les interactions électro-faibles et les interactions fortes [18].

Comme il est impossible de comprendre ce livre sans connaître l'algèbre Cl_3 de l'espace physique, un premier chapitre présente les algèbres de Clifford à un niveau élémentaire.

Le chapitre 2 revisite l'équation de Dirac, d'abord avec les matrices de Dirac, où l'on obtient d'une manière correcte du point de vue de la rigueur mathématique l'invariance relativiste de forme de la théorie. Ceci passe nécessairement par l'utilisation de l'algèbre de Clifford Cl_3 . Puis on explique à l'aide des tenseurs sans dérivation comment le formalisme des matrices 4×4 est incomplet. On considère les ondes planes. On présente la forme invariante de l'équation d'onde. La partie réelle est alors exactement la densité lagrangienne, autre vraie nouveauté venant de l'algèbre de Clifford. Enfin on présente la conjugaison de charge dans ce nouveau cadre.

Le chapitre 3 introduit notre équation non linéaire homogène et explique comment celle-ci est meilleure que l'équation de Dirac qui est son approxima-

tion linéaire. On prouve que les ondes planes ont toujours une énergie positive. La forme même de l'onde spinorielle et la forme que prend l'invariance relativiste introduisent la dilatation engendrée par l'onde, depuis une variété d'espace-temps intrinsèque sur la variété usuelle d'espace-temps. Ceci est la grande nouveauté en géométrie venant de la physique quantique. On explique les raisons physiques de normaliser l'onde. Le lien existant entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule donne une conjugaison de charge où seul le terme différentiel de l'équation invariante change de signe. Ceci rend le théorème CPT trivial et c'est aussi un excellent argument pour cette équation d'onde. On obtient la quantification des niveaux d'énergie et tous les résultats de la théorie linéaire dans le cas de l'atome d'hydrogène avec cette équation d'onde non linéaire homogène.

Le chapitre 4 présente l'invariance de l'électromagnétisme sous Cl_3^* , groupe multiplicatif des éléments inversibles de Cl_3 , pour l'électromagnétisme de Maxwell de Broglie avec photon massif, pour l'électromagnétisme avec monopôles magnétiques, pour les quatre photons de la théorie de de Broglie-Lochak.

Le chapitre 5 présente plusieurs premières conséquences de ces nouveautés. L'anisotropie de l'espace-temps intrinsèque explique pourquoi nous voyons des muons et des taus en plus des électrons, leurs ressemblances et leurs différences. La variété intrinsèque a une torsion dont les composantes ont été calculées dans le cas d'une onde plane. Le terme de masse est lié à cette torsion. Puis on présente la construction de l'onde de de Broglie d'un système d'électrons comme une onde dans l'espace-temps ordinaire, et non pas dans un espace de configuration où l'espace et le temps n'ont pas le même statut, et à valeur dans l'algèbre d'espace. On présente aussi comme un contre-exemple une équation d'onde [19] qui ne peut pas être obtenue à partir d'un formalisme lagrangien, et on résout cette équation d'onde dans le cas de l'atome d'hydrogène.

Le chapitre 6 est consacré à notre principale avancée depuis [17]. On présente la théorie de jauge électro-faible dans le cadre de l'algèbre de Clifford d'espace-temps, d'abord dans le cas leptonique, puis dans le cas des quarks de première génération. Puis on se sert de l'algèbre de Clifford $Cl_{5,1}$ pour étendre l'invariance de jauge aux interactions fortes. Même si notre but est le même qu'en [18], on se sert ici d'une autre algèbre de Clifford, parce qu'on a besoin d'utiliser le lien entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule qui vient du modèle standard des interactions électro-faibles et fortes. On obtient alors dans ce cadre exactement le groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Le plus par rapport au modèle standard est que l'insensibilité des leptons aux interactions fortes est automatique. On étend à $Cl_{5,1}$ l'invariance de forme des interactions de jauge. Ceci induit l'utilisation d'un espace-temps complexe à six dimensions dans lequel l'espace-temps usuel à quatre dimensions est bien séparé des dimensions supplémentaires. Enfin l'inexistence des ondes droites du neutrino et des quarks se traduit par deux identités dont il résulte l'inversibilité des valeurs de l'onde. Ces identités permettent l'existence d'une équation d'onde invariante de forme et invariante de jauge avec un terme de masse.

Le chapitre 7 est consacré aux monopôles magnétiques. On rend compte

des expériences russes et françaises. On précise leurs résultats, tout particulièrement la longueur d'onde. Puis on applique au monopôle magnétique l'étude faite dans les chapitres précédents sur les interactions électro-faibles.

Le chapitre 8 présente nos conclusions, expliquant les changements importants dans notre manière d'appréhender le modèle standard de la physique actuelle.

Pour les travaux à l'Ecole Centrale de Nantes, merci à Didier Priem pour son efficacité, son inventivité, sa gentillesse. Merci à Guillaume Racineux pour son constant soutien.