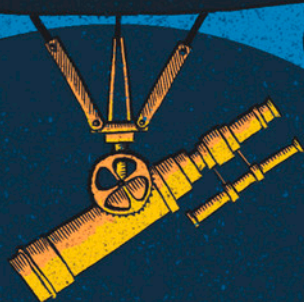


MICKAËL LAUNAY

# Le théorème du parapluie

OU L'ART D'OBSERVER LE MONDE  
DANS LE BON SENS



Par l'auteur du  
**GRAND ROMAN DES MATHS**  
Déjà 100 000 lecteurs

Flammarion



**MICKAËL LAUNAY** est mathématicien. Après des études à l'École normale supérieure, il s'est spécialisé dans la vulgarisation scientifique, notamment à travers sa chaîne YouTube *Micmaths* (420 000 abonnés). Il est l'auteur du Grand roman des maths (Flammarion, 2016) qui a obtenu de nombreux prix et a été traduit en 15 langues.

## VOUS NE VERREZ PLUS LE MONDE DE LA MÊME MANIÈRE !

Savez-vous que le 34 avril est un jour très utile ? Que certains fleuves coulent de bas en haut ? Que la Lune tourne en ligne droite ? Que la couverture de ce livre est peut-être rouge ? Et que tout en lisant ces quelques lignes vous voyagez à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde ?

Ces affirmations peuvent vous sembler absurdes, et pourtant elles sont vraies !

Notre perception du monde est parfois trompeuse. En science, le réel bouscule nos préjugés et ne cesse de remettre en cause nos plus intimes convictions. Il ne s'agit pas toujours d'être plus intelligent pour répondre aux grandes questions : il faut avant tout être astucieux. Un simple changement de point de vue suffit parfois à éclairer les phénomènes les plus complexes. Les mathématiques en particulier nous offrent un outil puissant pour comprendre les rouages de l'Univers. Elles nous apprennent à penser plus large pour comprendre plus loin.

C'est ce que nous montre ici Mickaël Launay, à travers un voyage passionnant qui commence dans les allées des supermarchés et s'achève dans les profondeurs vertigineuses des trous noirs.

Ah, et il reste une dernière question : quel est le rapport entre tout cela et un parapluie ?

## Le théorème du parapluie

## DU MÊME AUTEUR

- 52 semaines de défis mathématiques*, coécrit avec D. Souder, Éditions Pole & CRDP, collection « À vous de jouer », 2002.
- L’Affaire Olympia*, Éditions Le Pommier, collection « Roman & plus junior », 2013.
- Le grand roman des maths*, Flammarion, 2016 ; J’ai lu, 2018.

Mickaël Launay

# Le théorème du parapluie

Illustrations de Chloé Bouchaour

Flammarion

© Flammarion, 2019.  
ISBN : 978-2-0814-2752-5

## INTRODUCTION

En 1980, des enseignants de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Grenoble posent à un groupe d'enfants l'énigme suivante :

*Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres ; quel est l'âge du capitaine ?*

La question est étrange. Qu'est-ce que l'âge du capitaine peut bien avoir à faire avec un nombre de moutons et de chèvres ? Sur près de deux cents élèves de sept à huit ans interrogés, ils sont pourtant 75 % à apporter une réponse sans exprimer de doute. Beaucoup font une addition et obtiennent 36. Mais lorsque le même test est proposé à des enfants âgés de neuf à dix ans, la plupart se mettent à protester, voire à refuser de répondre. Seuls 20 % répondent sans réserve. En deux ans, leur esprit critique s'est affiné. Ces enfants ont gagné en perspicacité et ont su prendre du recul sur le sens de ce qu'ils font.

Lorsque j'avais leur âge, je dois avouer que j'éprouvais un certain plaisir aux énigmes à pièges. Celles qui provoquent votre cerveau et qui, dans le fond, sont davantage des blagues que des problèmes de maths. Une de mes préférées était la suivante :

## *Le théorème du parapluie*

*Un orchestre de 50 musiciens joue la Symphonie n° 9 de Beethoven en 70 minutes. En combien de temps un orchestre de 100 musiciens jouera-t-il cette même symphonie ?*

Bien sûr, la durée d'une symphonie ne dépend pas du nombre de musiciens, 70 minutes restent 70 minutes. J'aimais aussi particulièrement celle-ci : *quel est le plus lourd entre un kilo de plumes et un kilo de plomb ?* Aucun des deux, bien sûr, puisqu'ils pèsent le même poids : un kilo.

Ce que j'ignorais à l'époque, c'est que ce processus d'appriovissement du sens des choses pouvait mener bien plus loin que ce que j'imaginai. Plus j'avais, plus je découvrais de subtilités sur le sens des mots et de failles dans ma compréhension du monde. Bien sûr, adulte on ne tombe plus dans les mêmes pièges que les enfants. Mais ce serait une erreur de croire que nous sommes à l'abri de tous les autres biais qui nous guettent. Nos intuitions peuvent nous tromper et nos évidences sont parfois fausses. Je crois pouvoir dire à 35 ans que, depuis mon cours élémentaire, il ne s'est pas passé une année de ma vie sans que je réalise que je pensais de travers des choses que je croyais bien savoir.

À vouloir comprendre le monde, à être curieux de l'univers qui nous entoure, on s'expose à être bousculés. Dans le fond, les grands savants de notre histoire n'ont rien fait d'autre que ce qu'ont fait ces enfants ayant appris à refuser de donner l'âge du capitaine. Ils ont douté de ce qu'ils avaient sous leurs yeux et ont cherché à voir plus loin. Ils se sont révoltés contre l'ordre établi. La science est un merveilleux terrain de remise en question et les mathématiques en sont l'un des plus puissants outils.

Faire des mathématiques, c'est entrer dans les coulisses du monde. C'est se glisser dans l'arrière-scène pour observer les gigantesques rouages qui font tourner notre univers. Le spectacle en est éblouissant, mais il est perturbant. Le réel défie nos sens et notre intuition. Il n'est pas celui que nous



## *Introduction*

croyions. Il renverse nos a priori et balaye nos plus intimes évidences. Les détails les plus anodins peuvent cacher de grands mystères et les énigmes pour enfants peuvent parfois se révéler bien plus profondes qu'il n'y paraît.

Tenez, une autre :

*Si quatre poules pondent quatre œufs en quatre jours, combien d'œufs pondront huit poules en huit jours ?*

Je vous laisse y réfléchir, nous y reviendrons. Tout ce que je peux vous dire, c'est que lorsque je découvrais pour la première fois cette énigme à dix ans, j'étais bien loin d'imaginer qu'elle m'aiderait un jour à comprendre la plus célèbre formule de tous les temps.

Alors, si vous voulez bien me suivre un instant, je vous propose de partir à l'aventure. Il se peut qu'il y ait quelques moments difficiles, on ne change pas sa façon de penser en un claquement de doigts. Il y aura des doutes à surmonter et des pensées à laisser mûrir. Mais tenez bon, le plaisir de comprendre récompense mille fois l'effort qu'on y consent. Derrière cette page débute notre voyage en mathématiques, à la découverte de quelques-uns des plus beaux mécanismes cachés de notre monde. Levez un instant les yeux et observez le décor qui vous entoure : il se peut qu'après notre excursion, vous ne voyiez plus l'univers, votre univers, de la même manière.



## Partie I

### La loi des supermarchés

#### *La loi de Benford*

Les voyages en mathématiques commencent parfois dans les endroits les plus anodins.

Pour notre départ, je vous propose de nous retrouver au supermarché du coin. Vous en avez un pas loin de chez vous. Celui dans lequel vous avez vos habitudes fera l'affaire. Que ce soit un gigantesque centre commercial ou une supérette de village, peu importe ; pourvu qu'on y trouve raisonnablement la variété des produits élémentaires dont on a besoin au quotidien.

L'ambiance est routinière. Vous êtes déjà venu ici des centaines, peut-être des milliers de fois. Les rayons parallèles, les étagères métalliques, le rythme régulier des codes-barres bipés en caisse et les clients qui déambulent en attrapant machinalement une bouteille de lait ou quelques boîtes de conserve. Mais aujourd'hui, pas de courses pour nous. Nous sommes en mission d'observation.

Dans cet endroit se cache l'une des pépites mathématiques les plus intrigantes qui soit. Elle est là, sous vos yeux, depuis toutes ces années. Pas même dissimulée, vous la voyez à cet instant précis. Une petite anomalie. Un de ces détails

## *Le théorème du parapluie*

de rien du tout qui vous passent sous le nez, l'air de rien, mais qui peuvent pourtant éveiller la suspicion d'observateurs aux aguets. Sortez un carnet ou votre smartphone pour prendre quelques notes et commençons notre enquête.

Regardez les prix qui s'alignent les uns derrière les autres, à pleine étendue d'étagères. 2,30 €... 1,08 €... 12,49 €... 3,53 €... Tous ces nombres semblent parfaitement aléatoires quand on les lit rapidement les uns après les autres. 1,81 €... 22,90 €... 0,64 €... La gamme des prix va de quelques centimes à quelques dizaines d'euros. Mais nous n'allons pas nous focaliser sur les détails. Oubliez les virgules et les petits chiffres. Pour chaque prix, regardez uniquement le premier chiffre, le plus important, celui qui donne une idée approximative.

Voici une conserve de 530 grammes de choux de Bruxelles à 1,54 €. Sur votre carnet, vous notez 1. Un peu plus loin, un déodorant efficacité 24 heures à 3,53 €. Vous notez 3. Un camembert de 250 grammes à 1,81 €. Vous notez à nouveau 1. Une poêle antiadhésive à 45,90 €, cette fois, on a dépassé la dizaine, mais peu importe, nous nous concentrons uniquement sur le premier chiffre. Vous notez 4. Un paquet de cacahuètes grillées à 0,74 €. Cette fois le premier chiffre significatif est 7.

Nous déambulons quelques minutes au hasard et les chiffres s'accumulent. 1 3 1 4 7 9 2 2 1 7 9 8 1 1 3 1 1 1 8 1 1 2 1 2 1 1 9 1 4 7 1 6 1 5 9 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 6... Mais à mesure que vous notez, un léger doute s'installe. Ne trouvez-vous pas qu'il y a quelque chose qui cloche dans cette guirlande de chiffres ? Il y a comme un déséquilibre. Elle est majoritairement composée de 1 et de 2 parsemés de quelques 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 par-ci par-là. Comme si, sans nous en rendre compte, notre attention était naturellement attirée par les prix les plus bas. Il y a un problème.

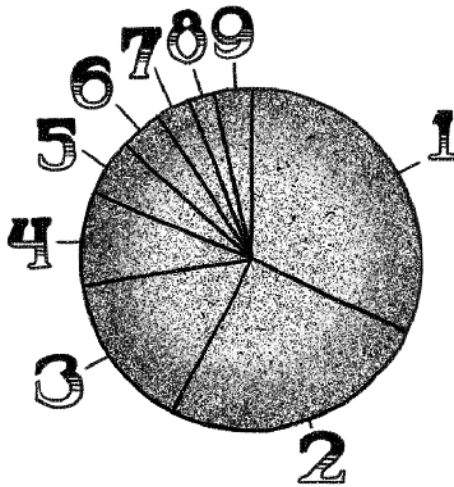
Alors comportons-nous en statisticiens consciencieux. Prenons désormais garde à nos propres biais et optons pour

## *La loi des supermarchés*

une méthode systématique. Nous allons choisir plusieurs rayons au hasard et pour chacun d'entre eux, nous relèverons les prix de tous les produits, sans exception. C'est du boulot, mais il faut en avoir le cœur net.

Une heure plus tard, votre carnet est recouvert de chiffres en farandole qui défilent sur plusieurs pages. Il est temps de faire le bilan. Après comptage, le verdict est sans appel et la tendance s'est confirmée. Vous avez listé les prix de plus de mille produits et près d'un tiers d'entre eux commence par un 1 ! Plus d'un quart commence par un 2 et plus le chiffre est grand, moins il est représenté.

Après compilation, voici la répartition à laquelle nous arrivons <sup>1</sup>.



Cette fois, plus question de croire à un simple effet du hasard ou à un choix biaisé des produits. Il faut nous rendre à l'évidence, c'est un fait : les premiers chiffres des prix d'un

---

1. Ces résultats ont été obtenus par l'auteur en janvier 2019 sur 1 226 prix relevés selon la méthode indiquée dont commençant par un 1 : 391 (31,9 %), un 2 : 315 (25,7 %), un 3 : 182 (14,8 %), un 4 : 108 (8,8 %), un 5 : 66 (5,4 %), un 6 : 50 (4,1 %), un 7 : 40 (3,3 %), un 8 : 30 (2,4 %), un 9 : 44 (3,6 %).



supermarché ne sont pas équitablement distribués. Les petits chiffres ont un avantage franc et massif.

D'où vient ce déséquilibre ? Voilà la question que je voulais vous poser. À quelle loi des supermarchés, du commerce ou de l'économie, ces étiquettes obéissent-elles pour aboutir à cet étrange résultat ? Pourquoi les premiers chiffres de ces prix ne se répartissent-ils pas équitablement ? Les mathématiques ne sont-elles pas censées donner des importances égales à tous les chiffres ? Elles devraient être sans biais, sans préférences, sans favoris. Et pourtant, les faits sont là et affirment catégoriquement le contraire. Au supermarché, les maths ont leurs chouchous et ils se nomment 1 et 2.

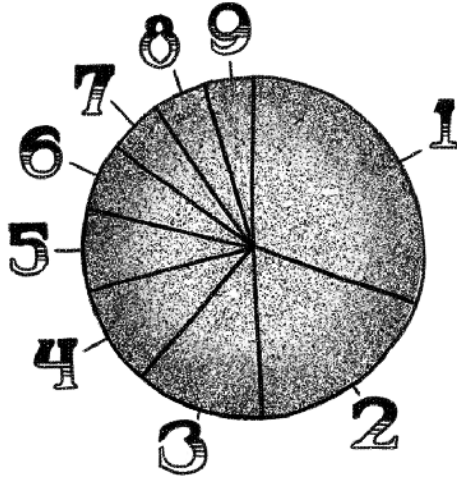
Nous avons observé. Nous avons constaté. Maintenant il va nous falloir réfléchir, analyser et décortiquer. Nous avons nos faits, à nous de mener l'enquête et de rendre nos conclusions.

En mars 1938, l'ingénieur et physicien états-unien Frank Benford publia *The Law of Anomalous Numbers (La Loi des nombres anormaux)*, un article dans lequel il analyse des données numériques issues de plus de vingt mille observations d'origines variées. Dans ses tableaux, on trouve une liste de longueurs de fleuves du monde, les populations de différentes villes américaines, les mesures de la masse des atomes connus, des nombres trouvés au hasard dans les pages de journaux d'information ou encore des constantes mathématiques. Et sur toutes ces données, Benford fait à chaque fois la même observation que nous : les premiers chiffres ne sont pas répartis équitablement. Environ 30 % de ces nombres commencent par un 1. Ils sont 18 % à commencer par un 2. Et le pourcentage s'en va décroissant jusqu'au chiffre 9 qui ne débute qu'à peine 5 % de ces valeurs.

Benford n'a pas eu l'idée d'aller vérifier ses statistiques sur les prix de son supermarché. Mais vous avouerez que ses résultats ressemblent très étrangement aux nôtres. Bien sûr,

## *La loi des supermarchés*

il y a quelques variations dans les pourcentages mais, dans les grandes lignes, la comparaison est frappante.



L'étude de Benford montre que les données que nous avons recueillies ne sont pas isolées. Elles ne sont pas spécifiques au fonctionnement des supermarchés, mais s'inscrivent dans une tendance bien plus vaste. Après 1938, la même répartition fut observée par de nombreux scientifiques dans des situations de plus en plus extrêmes et diverses.

En démographie, par exemple. Parmi les 203 pays que compte la planète Terre, 62 d'entre eux, soit 30,5 %, ont une population dont le premier chiffre est un 1. À commencer par le plus peuplé : la Chine, avec 1,4 milliard d'habitants. Dans les 62, on trouve également le Mexique, 122 millions d'habitants, le Sénégal, 13 millions ou encore l'archipel du Tuvalu, 10 800. Il n'y a en revanche que 14 pays dont la population commence par un 9, soit 6,9 %.

Vous préférez l'astronomie ? Des huit planètes qui gravitent autour du Soleil, quatre ont un diamètre équatorial commençant par un 1. Jupiter 142 984 km. Saturne 120 536. La Terre 12 756. Vénus 12 104. Le Soleil lui-même a un diamètre de 1 392 000 km. Et si un échantillon

## *Le théorème du parapluie*

de neuf astres n'est pas assez complet pour avoir une tendance fiable, ajoutez les planètes naines, les satellites, les astéroïdes ainsi que les comètes, et vous ferez toujours la même constatation : le chiffre 1 l'emporte.

Dès que l'on commence à y prêter attention, les exemples se mettent à pleuvoir. Prenez une liste de nombres issue de n'importe quel contexte, analysez ses premiers chiffres et ça ne manque pas : la répartition de Benford revient, encore et toujours. Loin d'être une exception, cette loi statistique semble parfaitement naturelle et omniprésente. Et paradoxalement, la répartition équitable qui aurait pu nous paraître plus intuitive semble complètement absente du monde.

À cette échelle, il n'est plus question de parler de curiosité de supermarché. Ce que nous venons de mettre au jour est une véritable loi qui règle non seulement de nombreux domaines des activités humaines, mais aussi la nature elle-même, dans son organisation la plus intime. La comprendre, c'est comprendre quelque chose de profond sur notre monde et son fonctionnement.

Son influence est si puissante que nous la reproduisons sans même en avoir conscience. Les êtres humains qui fixent les prix des supermarchés ne se concertent pas entre eux, et n'ont pour la plupart jamais entendu parler de Frank Benford. Et pourtant, sans le savoir, comme manipulés par une force qui les dépasse, ils se soumettent à sa loi. Comme le font le nombre d'habitants des pays, la longueur des fleuves et le diamètre des planètes.

En 1938, Frank Benford appela cette répartition la « loi des nombres anormaux ». Pourtant, cette loi est si omniprésente que ce nom semble inadapté. L'anormalité n'est que subjective, elle n'existe que pour les humains qui s'en étonnent. La nature au contraire semble trouver cette loi parfaitement commune. La loi n'est anormale que tant que nous ne l'avons pas comprise. Et nous avons bien l'intention de la comprendre.

## *La loi des supermarchés*

Alors dans quelle direction partir ? Par quel trajet entraîner nos pensées pour lever le voile sur l'anormalité et changer le mystère en évidence ?

La loi de Benford n'est pas compliquée à comprendre, mais son explication ne tient pas en quelques lignes pour autant. Les mathématiques qui se cachent derrière sont simples, mais profondes. Nous ne sommes pas en face d'une énigme à laquelle on apporte une solution que l'on comprend après un déclic et qui nous fait nous exclamer : « Ah ! Ça y est, je l'ai ! » C'est notre compréhension même des nombres et notre façon de compter qu'il va falloir révolutionner. Si la loi de Benford ne nous apparaît pas évidente, c'est parce que nous pensons mal. Nous allons devoir apprendre à regarder différemment ce que nous croyons déjà bien connaître. Nous allons devoir nous remettre en question.

On ne sort pas indemne d'une excursion dans le monde que Frank Benford vient d'ouvrir devant nous. Sa loi vous change. Et lorsque vous l'aurez comprise, vous ne penserez plus de la même manière.

## *La pensée multiplicative*

De nombreuses situations de la vie de tous les jours nous murmurent discrètement que nous nous débrouillons mal avec les nombres. Qu'il y a quelque chose qui cloche.

À ce propos, j'ai une petite anecdote.

Il y a quelques années, lors d'une soirée jeux entre amis, l'un d'entre eux avait eu l'idée de nous concocter un quiz de culture scientifique. Deux équipes s'étaient formées et nous devions répondre à une série de questions sur des thèmes allant des mathématiques à la géologie, en passant par la biologie ou l'informatique. À chaque question, l'équipe devait faire une proposition et la plus proche de la bonne

### *Le théorème du parapluie*

réponse remportait le point. La règle semblait simple et sans ambiguïté. Et pourtant, après quelques tours de jeu, une question d'astronomie créa une polémique inattendue.

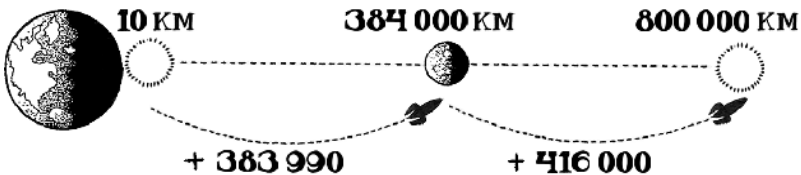
On nous demandait quelle était la distance entre la Terre et la Lune.

Dans notre équipe, personne ne connaissait la réponse exacte, mais après concertation, nous nous étions mis d'accord pour répondre 800 000 km. Dans l'équipe adverse, les négociations avaient eu l'air plus tendues, mais au bout d'un moment, ils avaient annoncé leur réponse : 10 km !

Visiblement, ceux-là s'y connaissaient encore moins que nous en astronomie. Le plus haut sommet du globe, l'Everest, culmine à près de 9 km. Si la Lune n'était qu'à 10 km, il suffirait de le gravir pour quasiment pouvoir toucher notre satellite. Cette réponse était absurde. Le point pour notre équipe me semblait dans la poche.

Pourtant, la vérification s'avéra pour le moins déconcertante. La Lune se situe en réalité à 384 000 km de la Terre. Une simple soustraction nous indiqua donc que nous nous étions trompés de 416 000 km, tandis que l'équipe adverse ne s'était trompée que de 383 990 km.

Je clignais des yeux et refaisais le calcul de tête une seconde fois. Pas d'erreur. J'admets avoir même griffonné un petit schéma sur une serviette en papier pour achever de me convaincre.



Il n'y avait pas de doute : leur réponse était plus proche de la réalité que la nôtre. Ils avaient gagné. Pendant plusieurs minutes, je ne pus m'empêcher de tourner et retourner le calcul dans ma tête, mais rien à dire. Les mathématiques étaient formelles.



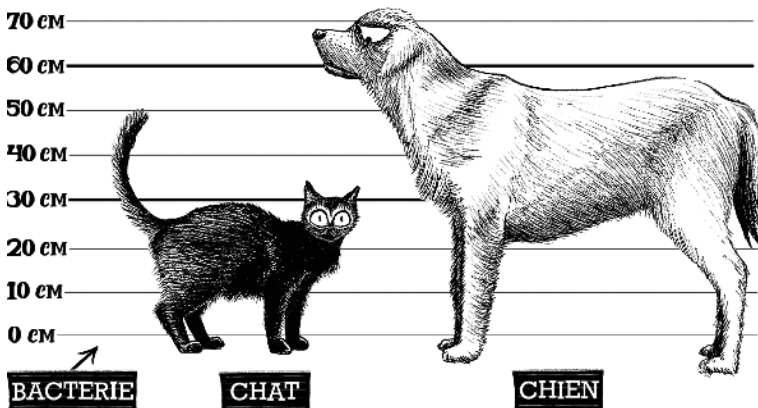
## *La loi des supermarchés*

Pourtant, ne trouvez-vous pas qu'il y a quelque chose d'injuste dans cette situation ? Tant pis si je passe pour un mauvais joueur, mais n'avez-vous pas l'impression que, malgré le verdict de la soustraction, notre réponse était plus judicieuse, plus réfléchie et, d'une certaine façon, moins fausse que celle de l'autre équipe ?

Mais pourquoi, dans ce cas, les mathématiques semblent-elles nous dire le contraire ? Pourquoi les calculs tranchent-ils en faveur de la réponse qui est manifestement la moins pertinente ?

Ou peut-être serait-il plus humble de reposer la question différemment : avons-nous bien compris les mathématiques que nous utilisons ? Les mathématiques ne se trompent pas, mais les humains qui s'en servent peuvent parfois les utiliser de manière inappropriée.

Si on prend la peine de creuser un peu, il est possible d'imaginer de nombreuses situations similaires. Un chat mesure en moyenne 25 cm et un labrador moyen 60 cm. Certaines bactéries mesurent un millième de millimètre. Il est donc possible d'affirmer qu'en taille, un chat est plus proche d'une bactérie que d'un labrador. Il y a environ 25 cm d'écart entre le chat et la bactérie, alors qu'il y a 35 cm entre le chat et le chien.



## *Le théorème du parapluie*

Mais encore une fois, ce verdict des nombres est contraire à notre perception naturelle de la réalité. Le chat et le chien appartiennent au même monde. Ils peuvent jouer ensemble, ou du moins interagir. Ils se voient, ils se sentent, ils savent mutuellement qu'ils existent. Au contraire, les chats, quand ils n'ont pas étudié la science, n'ont aucune idée de l'existence des bactéries. Ces dernières ne font pas partie de leur monde, elles sont si petites qu'elles ne leur sont ni visibles ni concevables.

Par des raisonnements similaires, il est possible de multiplier les exemples, tous aberrants à l'intuition, mais pourtant exacts mathématiquement. La température à la surface du Soleil est plus proche de  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  que de  $15\ 000\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La population de Paris est plus proche de celle d'un village de 12 habitants que de celle de New York. Si vous pesez la planète Mars, vous trouverez que sa masse est plus proche de celle d'une balle de ping-pong que de celle de la planète Terre.

Comme pour la loi de Benford, si ces situations heurtent notre compréhension, c'est parce que nous pensons de travers. Parce que nous utilisons des outils mathématiques que nous ne comprenons pas bien dans un contexte où ils ne sont pas appropriés.

Comment, alors, mettre ces réflexions intuitives en mathématiques ? La réponse se trouve dans la notion subtile d'ordre de grandeur.

L'idée de base est simple, mais redoutablement puissante. Réfléchir en ordre de grandeur, c'est réfléchir avec des multiplications plutôt qu'avec des additions.

Si vous voulez comparer les nombres 2 et 10, vous pouvez le faire de deux façons différentes. Additivement : combien faut-il ajouter à 2 pour obtenir 10 ? Alors la réponse est 8. Multiplicativement : par combien faut-il multiplier 2 pour obtenir 10 ? Alors la réponse est 5. L'écart additif entre deux nombres s'obtient par soustraction :  $10 - 2 = 8$ . L'écart multiplicatif s'obtient par division :  $10 \div 2 = 5$ .



**10 KM**



**384 000 KM**



**800 000 KM**

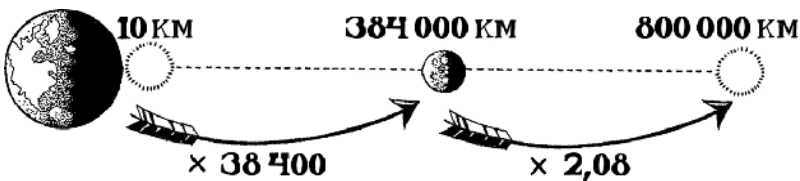
## *Le théorème du parapluie*

Dire que deux quantités sont du même ordre de grandeur, c'est dire qu'elles sont proches d'un point de vue multiplicatif.

Même si l'idée peut sembler farfelue au premier abord, quiconque commence à réfléchir de façon multiplicative se rend rapidement compte à quel point cette approche adhère bien mieux à notre intuition dans un grand nombre de situations ordinaires.

Revenons à notre quiz scientifique. Voilà comment j'aurais pu contester le gain du point, à l'époque, si j'avais eu les idées claires. La Lune se trouve à 384 000 kilomètres de la Terre et notre équipe avait répondu 800 000, c'est-à-dire environ deux fois trop. Si on fait la division, on trouve précisément que notre réponse était 2,08 fois trop grande. Nos adversaires, eux, avaient répondu 10 km, c'est-à-dire 38 400 fois moins que la bonne réponse ! En adoptant ce point de vue, c'est bien nous qui avons gagné, et de loin. Ce résultat est bien plus conforme à notre perception spontanée de la question.

Il en va de même pour tous les exemples précédents. Multiplicativement, la taille du chat est plus proche de celle du chien que de celle de la bactérie, la masse de Mars plus proche de celle de la Terre que de celle d'une balle de ping-pong, la population de Paris plus proche de celle de New York que celle d'un petit village, et ainsi de suite.



Lorsque nous comparons deux nombres, quel que soit le contexte dans lequel cette comparaison survient, c'est la plupart du temps multiplicativement que nous allons réfléchir

spontanément. Si votre supermarché augmente de 8 € un produit qui coûte 200 €, sans doute la hausse vous contrariera-t-elle, mais bien moins que si ces mêmes 8 € sont ajoutés à un produit de 2 €. Dans ce second cas, le prix passe à 10 €, se retrouvant multiplié par 5 ! Ce n'est plus une contrariété, c'est une escroquerie. Pourtant, l'augmentation est la même.

Ce mode de comparaison n'est pas qu'intellectuel. Il n'est pas propre à la pensée, il s'approprie notre corps et modèle la plupart des interactions que nous pouvons avoir avec le monde. Les sens par lesquels nous percevons notre environnement semblent eux aussi réglés multiplicativement.

Si je vous bande les yeux et que je vous mets dans une main un objet de 10 g et dans l'autre un objet de 20 g, vous saurez immédiatement dire lequel des deux est le plus lourd. Si en revanche vous devez soulever une masse de 10 kg et une masse de 10 kg et 10 g, il vous sera bien plus difficile de distinguer les deux. Pourtant, l'écart est le même : 10 g de différence. Ou plus précisément, l'écart additif est le même, car d'un point de vue multiplicatif, la variation est flagrante : de 10 à 20 g, on passe du simple au double. Tandis que dans le deuxième cas, il n'y a que 0,1 % d'écart entre les deux masses.

Il en va de même avec votre vue. Avez-vous déjà essayé d'allumer la lumière en plein jour ? Si le soleil baigne déjà les lieux de ses rayons, ça ne change quasiment rien. La luminosité semble identique que l'ampoule brille ou non. En revanche, si vous allumez la même lumière de nuit, cette fois elle perce l'obscurité et semble remplir toute la pièce. Elle nous fait voir clairement ce qui, un instant auparavant, se tenait invisible dans la pénombre.

Pourtant, l'ampoule du plafond ne produit pas moins de lumière le jour que la nuit. Elle émet autant de rayons lumineux dans les deux cas. C'est-à-dire que d'un point de vue



### *Le théorème du parapluie*

additif, l'écart de luminosité est le même dans les deux situations. Mais ce n'est pas l'écart additif que nos yeux perçoivent. C'est l'écart relatif, c'est-à-dire multiplicatif. En plein jour, la luminosité de l'ampoule est minuscule comparée à celle du Soleil. De nuit, c'est elle qui prend les rênes, elle qui devient majoritaire.

Passez en revue tous vos sens : toucher, vue, goût, ouïe, odorat. Pensez même à votre perception du temps qui passe, des distances que vous parcourez et, de façon plus subjective, à l'intensité des émotions qui vous traversent. Toutes ces perceptions qui vous envahissent s'approprient bien mieux dès que l'on commence à les penser de façon multiplicative plutôt qu'additive.

### *Notre sens inné des nombres*

Pour tester votre intuition des nombres, je vous propose une petite expérience. Regardez cette ligne sur laquelle ont été placés deux nombres : mille et un milliard.



Maintenant, tentez de répondre le plus spontanément possible à la question suivante : sur cette échelle, où placez-vous un million ? N'ayez pas peur de vous tromper, il n'y a pas de mauvaise réponse, l'important est de voir ce que dit votre instinct des grands nombres.

C'est bon, vous avez placé le doigt sur le point de l'axe qui vous semble représenter le million ? Alors voyons à présent ce que l'on peut en dire.

Il est probable qu'après la lecture de la question, votre pensée ait traversé plusieurs états. À l'instant même où vous l'avez lue, sans doute une intuition est-elle née dans votre cerveau. Une idée brute et sans analyse. Et puis peu à peu, votre réflexion s'est affinée. Vous avez rappelé à votre mémoire ce que vous savez des nombres mille, un million et un milliard, et alors le curseur a sans doute bougé un peu. Ou peut-être beaucoup ? Vers la gauche ou vers la droite ? Peut-être même avez-vous tenu compte de ce que nous avons dit précédemment. Peut-être vous êtes-vous dit que la question n'était pas très précise, qu'il devait y avoir une entourloupe. Avez-vous pensé d'un point de vue additif ou multiplicatif ? Est-ce que cela change quelque chose dans ce cas de figure ?

Chacun peut avoir son propre parcours de pensée sur cette question, mais l'une des réactions les plus fréquentes est de commencer à visualiser le million à peu près à mi-chemin entre mille et un milliard. Ou alors un peu à gauche du milieu, car il est possible de se rendre compte rapidement qu'un million est plus proche de mille que d'un milliard. Et puis, plus la réflexion avance, plus le curseur se déplace vers la gauche, sur une position assez proche de mille.

Alors qu'en est-il en réalité ? La réponse peut paraître surprenante, mais un million est tout accolé à mille. À cette échelle, ils sont même quasiment indiscernables à l'œil nu, et les deux nombres sont également confondus avec le zéro si on le rajoute sur la gauche.



Bien sûr, dans l'absolu, un million est un grand nombre, mais il faut se dire que un milliard est encore mille fois plus

### *Le théorème du parapluie*

grand ! Même un million paraît petit à cette échelle. Si vous vous placez au point zéro et qu'un milliard se trouvait à un kilomètre de vous, alors un million ne serait qu'à un mètre de distance et mille ne serait qu'à un millimètre. Vu de loin, zéro, mille et un million paraissent donc tous agglutinés les uns aux autres.

Pourtant, comme pour la distance de la Lune, ce verdict des mathématiques traditionnelles hérisse l'intuition. Remarquez que si l'on écrit les nombres en chiffres, le million semble bien se caler à mi-chemin entre mille et un milliard :

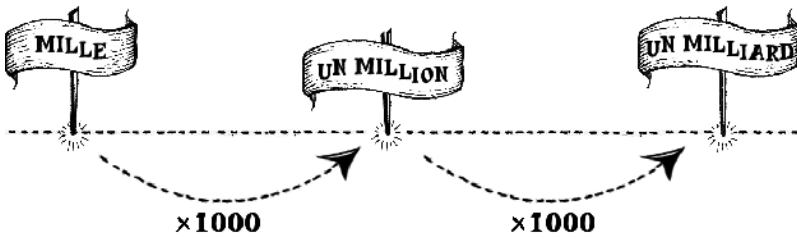
Mille :           1 000  
Un million : 1 000 000  
Un milliard : 1 000 000 000

Un million a trois zéros de plus que mille et trois de moins que un milliard. Visuellement, si l'on ne s'attache pas à sa valeur, mais à la longueur de son écriture, on est franchement tenté de placer le million au milieu. La nature même de notre système de numération tend à nous faire réfléchir en mode multiplicatif. L'impression visuelle ne serait pas du tout la même si ces nombres devaient être écrits en chiffres romains ou simplement si l'on alignait des petits bâtons les uns derrière les autres. Avec notre système d'unités, dizaines, centaines, etc., un ajout de zéro provoque la multiplication par dix du nombre représenté, créant une confusion entre addition et multiplication.

Ainsi, si nous nous autorisons à représenter les nombres sur un axe qui fonctionne selon un mode multiplicatif, le million se situe parfaitement au milieu. À gauche, comme à droite, l'écart multiplicatif est égal à mille.

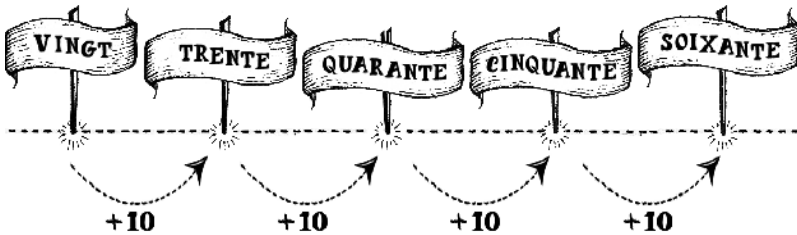
Il est étrange de constater que ce phénomène des grands nombres n'est pas perceptible sur des quantités plus

## La loi des supermarchés



communes. Si je vous avais demandé de placer 50 sur un axe de 1 à 100, vous l'auriez placé au milieu sans la moindre hésitation.

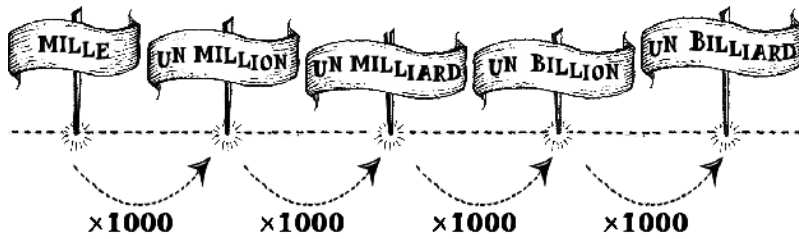
Il faut dire que les mots mêmes que nous utilisons en langue française trahissent le conflit entre additif et multiplicatif. Les premières dizaines ont chacune un mot qui leur est propre : vingt, trente, quarante... Entre chaque nouveau mot, l'écart est donc additif. On fait  $+10$  à chaque pas.



Jusqu'à 100, la langue est additive.

En revanche, une fois passé 100, nous basculons dans le monde de la multiplication. Il n'y a pas de mots spécifiques pour désigner 200 ou 300. Nous disons simplement « deux cents » ou « trois cents ». Un peu comme si nous avions dit « deux-dix » et « trois-dix » à la place de « vingt » et « trente ». Les nouveaux mots se mettent alors à apparaître à un rythme multiplicatif : mille, million, milliard, billion, billiard... Chacun de ces termes est mille fois plus grand que le précédent.

## *Le théorème du parapluie*



Si on plaçait ces nombres sur un axe classique additif, tous seraient agglutinés au zéro et paraîtraient minuscules comparés au dernier. Le milliard est infime face au billion qui lui-même est ridiculement petit face au billionard et ainsi de suite.

Cette transition dans le vocabulaire de comptage passe quasiment inaperçue lorsqu'on apprend les nombres à l'école. Pourtant, elle marque profondément notre façon de penser. Notre perception des quantités n'est ni innée, ni objective. Elle est puissamment attachée à la façon dont nous avons appris les mathématiques.

Alors est-il possible d'oublier quelques instants nos connaissances et nos biais culturels pour remonter à nos perceptions premières des nombres ? Comment penserions-nous si nous n'avions pas été confrontés dès notre enfance aux constructions numériques préfabriquées ?

Pour le savoir, il serait intéressant de poser la question à des personnes ayant été préservées de ces apprentissages. Nous pourrions interroger des enfants suffisamment jeunes pour n'être pas encore entrés en profondeur dans l'étude des nombres. Nous pourrions également demander leur point de vue à des peuples autochtones et isolés dont le rapport aux nombres est suffisamment éloigné du nôtre pour ne pas avoir nos conditionnements et nos a priori.

Dans les années 2000, diverses expériences ont été menées par des équipes de recherche afin de répondre à ces questions. Des tests assez similaires à celui du million auquel je

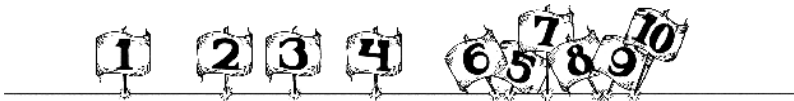


## *La loi des supermarchés*

vous ai soumis ont ainsi été proposés à de jeunes enfants états-uniens ainsi qu'à des individus du peuple Munduruku vivant dans la forêt amazonienne au nord du Brésil. La langue de ces derniers ne possède pas de mots pour désigner les nombres au-delà de cinq, rendant leur perception des quantités radicalement différente de la nôtre.

Les individus testés furent placés face à un axe dont les extrémités correspondaient à deux nombres. Et à chaque fois, il leur était demandé de placer d'autres nombres sur cet axe. Bien entendu, les nombres devaient être représentés sous une forme compréhensible à des personnes n'ayant jamais étudié les mathématiques. Plusieurs méthodes furent testées, par exemple de façon visuelle avec des images contenant plusieurs points ou bien de façon sonore avec une série de bips. Une fois les règles du jeu comprises, le test pouvait commencer.

Les résultats furent concordants et sans appel : les nombres des enfants et des Mundurukus sont intuitivement perçus de façon bien plus multiplicative qu'additive. Voici par exemple la façon dont les Mundurukus placent les nombres sur un axe de 1 à 10.

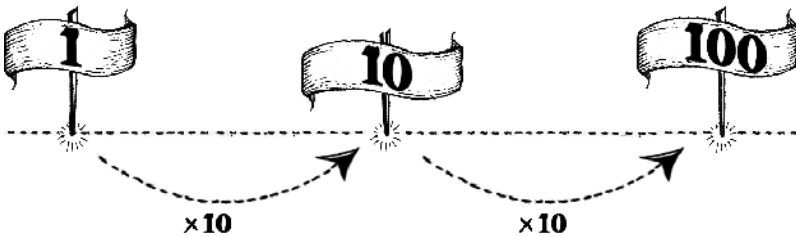


Bien sûr, ce n'est pas parfait. Le test est très instinctif et il n'est pas facile de bien évaluer à vue d'œil un nombre de points. On voit qu'en moyenne, lors de ce test, le 5 a été placé un peu après le 6 ! Mais cette erreur n'est pas importante. Il est en revanche significatif de voir comme les petits nombres s'étendent largement au début, tandis que les plus grands s'entassent à la fin. Comme si les petits nombres tels que le 1 et le 2 avaient plus d'importance que les grands comme le 8 et le 9. Les petits prennent de la place, tandis que les grands doivent se serrer.

## *Le théorème du parapluie*

Ne trouvez-vous pas d'ailleurs que cette représentation a un air de famille avec la loi de Benford ? Serait-ce une simple coïncidence ou serions-nous sur le point de comprendre quelque chose ? Pour l'instant, le lien entre les deux n'apparaît pas évident, mais gardons cette idée en tête, nous aurons bientôt l'occasion d'y revenir.

Cette tendance se confirme sur toutes les variantes du test qui furent menées. Y compris pour des nombres plus grands allant jusqu'à 100 et avec des enfants. Par exemple, il est fréquent qu'un enfant ayant à situer le nombre 10 sur un axe de 1 à 100 le place à peu près au milieu. Ce résultat est assez troublant lorsque l'on pense que 10 est effectivement au milieu de 1 et 100 si l'on réfléchit multiplicativement.



Et si nous allions encore plus loin ?

Au cours du XX<sup>e</sup> siècle, plusieurs expériences ont montré qu'il était possible de faire remonter cette perception des nombres au-delà de l'humanité. De la traquer dans les cerveaux d'autres espèces que les Homo sapiens.

De nombreux animaux ont un sens naturel des quantités. Ne serait-ce que pour évaluer le stock de nourriture qu'ils doivent accumuler, ou le nombre de prédateurs qu'ils doivent éviter pour survivre. Ce sens reste approximatif et limité en comparaison de celui que peuvent avoir les humains, mais il n'en demeure pas moins surprenant.

Avec les animaux, la mise en place d'un protocole expérimental ainsi que l'interprétation des résultats obtenus sont bien plus subtiles et doivent être étudiées avec précaution. Impossible de communiquer explicitement avec des

chevaux, des oiseaux ou des chimpanzés, de leur expliquer en détail les règles de l'expérimentation, ni de leur faire comprendre l'objectif de ce qu'ils accomplissent. Pourtant, certains faits sont saisissants, et il semblerait bien, encore une fois, que certains animaux perçoivent les nombres multiplicativement.

Voici par exemple une expérience qui a pu être menée avec des rats. Plusieurs spécimens furent placés dans des cages à l'intérieur desquelles se trouvaient deux leviers. Les chercheurs leur faisaient alors entendre régulièrement une série de plusieurs bips. Parfois deux et parfois huit. Lorsqu'il n'y avait que deux bips, les rats recevaient de la nourriture à condition d'appuyer sur le premier levier. Lorsqu'il y en avait huit, c'est le deuxième levier qui fournissait la récompense. Après un certain temps d'apprentissage, les rongeurs finissaient par comprendre le principe et apprenaient à actionner le bon levier en fonction du nombre de bips.

Une fois les rats instruits du fonctionnement des leviers, l'expérience à proprement parler pouvait commencer. Que se passe-t-il si nous leur faisons entendre un nombre de bips différent de deux ou huit ? Avec trois bips, après une très courte hésitation, les rats vont vers le premier levier, comme pour deux. Avec cinq, six ou sept bips, ils vont davantage vers le deuxième, comme pour huit. En revanche, avec quatre bips, les voilà complètement perdus ! La moitié des rats testés se rend hésitante au premier levier et l'autre moitié au second. Comme si, pour eux, le nombre quatre se trouvait à mi-chemin entre deux et huit, rendant leur choix parfaitement aléatoire.

Sans doute pressentez-vous déjà la conclusion qui arrive : c'est multiplicativement que 4 se trouve au milieu de 2 et 8. Si les rats avaient raisonné additivement, le nombre 5 aurait dû être la frontière de leurs hésitations. Et pourtant, c'est bien 4 qui les trouble.