

Calcul Stochastique et modèles de diffusions

3^e édition

Francis Comets

Professeur à l'Université de Paris

Thierry Meyre

Maître de conférences à l'Université de Paris

DUNOD

Illustration de couverture : ©-izabell-istockphoto.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2006, 2015, 2020

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-080922-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

AVANT-PROPOS	IX
---------------------	-----------

Partie 1 • Cours

CHAPITRE 1 • INTRODUCTION : PROCESSUS ALÉATOIRE

1.1	Définition	3
1.2	Loi des processus aléatoires	4
1.3	Existence de processus aléatoires	6
1.4	Espaces gaussiens	7
1.5	Exemples de processus gaussiens	9

CHAPITRE 2 • MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES

2.1	Mouvement brownien	15
2.2	Principe d'invariance	20
2.3	Construction du mouvement brownien	22
2.4	Variation quadratique du mouvement brownien	26
2.5	Martingales	27
2.6	Caractérisation de Paul Lévy	36

CHAPITRE 3 • INTÉGRALE ET DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

3.1	Intégrale stochastique d'Itô	41
3.2	Formule d'Itô	48

CHAPITRE 4 • PREMIERS PAS AVEC LE CALCUL STOCHASTIQUE

4.1	Équation de Langevin	59
4.2	Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles	64
4.3	La transformation de Girsanov	74
4.4	La loi de l'arcsinus	84

CHAPITRE 5 • ÉQ. DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET PROCESSUS DE DIFFUSION

5.1	Équations différentielles stochastiques	87
5.2	Approximation diffusion	100
5.3	Filtrage linéaire	103

CHAPITRE 6 • DIFFUSIONS ET OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

6.1	Les diffusions comme processus de Markov	111
6.2	Diffusions et équations aux dérivées partielles	116
6.3	Mouvement d'une particule dans un potentiel	123
6.4	Générateur infinitésimal : d'autres applications	135

CHAPITRE 7 • SIMULATION DE DIFFUSIONS

7.1	Introduction et le cas du mouvement brownien	141
7.2	Schéma d'Euler	144
7.3	Approximation forte	145
7.4	Approximation faible	148
7.5	Schéma de Milstein	150

Partie 2 • Exercices et problèmes corrigés**CHAPITRE 8 • EXERCICES D'INTRODUCTION : VECTEURS GAUSSIENS**

8.1	Rappels de cours	157
8.2	Exercices corrigés	160

CHAPITRE 9 • MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES, EXERCICES

9.1	Rappels sur l'espérance conditionnelle	169
9.2	Complément de cours en vue des exercices : variation d'un processus	171
9.3	Propriétés du mouvement brownien	172
9.4	Pont brownien	177
9.5	Martingales	188

CHAPITRE 10 • INTÉGRALE ET DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE, EXERCICES

10.1	Complément de cours : intégrale de Wiener	207
10.2	Exercices sur l'intégrale de Wiener	208
10.3	Processus d'Itô	221
10.4	Formule d'Itô avec un mouvement brownien réel	224
10.5	Formule d'Itô avec un mouvement brownien multidimensionnel	232

CHAPITRE 11 • PREMIERS PAS AVEC LE CALCUL STOCHASTIQUE, EXERCICES

11.1	Oscillation d'une diffusion à l'origine	241
11.2	Loi d'un temps d'atteinte pour le mouvement brownien avec dérive constante	242
11.3	Fonctionnelle d'Onsager-Machlup	248
11.4	Changement de dérive	252

CHAPITRE 12 • EDS ET PROCESSUS DE DIFFUSION, EXERCICES

12.1	Mouvement brownien sur le cercle unité	255
12.2	Variation de la constante	256
12.3	Changement de variable	258
12.4	Borne supérieure d'une diffusion	259
12.5	Propriété de martingale pour une transformée de diffusion	261
12.6	Mouvement brownien géométrique	263
12.7	Carré de processus de Bessel	266
12.8	Dépendance en la condition initiale	267
12.9	Équation différentielle stochastique de Tanaka	269
12.10	Queue de distribution d'un temps d'atteinte	271
12.11	Lois des extrema d'une classe de diffusions	275
12.12	Loi invariante pour une diffusion	278

CHAPITRE 13 • DIFFUSIONS ET OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, EXERCICES

13.1	Compléments de cours	283
13.2	Passages successifs de barrières pour un mouvement brownien réel	285
13.3	Principe de réflexion du mouvement brownien	287
13.4	Récurrence ou transience du mouvement brownien	290

CHAPITRE 14 • SIMULATION DE DIFFUSIONS, EXERCICES

14.1	Introduction à Matlab	297
14.2	Simulation d'un mouvement brownien	300
14.3	Fonction de répartition du maximum d'un pont brownien	304
14.4	Simulation d'une diffusion	307

CHAPITRE 15 • PROBLÈMES CORRIGÉS

15.1	Équation de Smoluchowski	313
15.2	Fonction hyperbolique d'un mouvement brownien	321
15.3	Mouvement brownien sur le cercle	326
15.4	Fonctionnelle quadratique du mouvement brownien	331
15.5	Martingale et transformée de Fourier	334
15.6	Martingale locale exponentiellement intégrable mais non martingale	338
15.7	Mouvement brownien conditionné à rester positif	343
15.8	Équation des ondes	348

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	355
------------------------------------	-----

INDEX	357
--------------	-----

Avant-propos

Ce livre est une introduction au calcul stochastique et aux processus de diffusion. Les diffusions sont des fonctions aléatoires, qui sont très utilisées en physique, chimie, biologie, statistique et en finance. Leur nature même en fait un outil de *modélisation* formidable : elle permet de capter des dynamiques instantanées entachées d'incertitude. Bien au-delà de leur intérêt descriptif, elles se prêtent aux utilisations quantitatives. Ce livre donne les outils d'étude et de calcul, à la fois analytiques et numériques, et détaille par ailleurs certains aspects phénoménologiques des diffusions.

Le livre reprend nos notes de cours et de travaux dirigés au Diplôme d'études approfondies (DEA) de statistique et modèles aléatoires en économie et finance – devenu maintenant le Master 2^e année (M2) modélisation aléatoire – à l'université Paris 7 – Denis Diderot.

Nous avons voulu écrire un cours direct et simple, fluide et illustré, en privilégiant les arguments et les aspects essentiels. Il existe d'excellents ouvrages sur le sujet, mais la difficulté technique et le niveau de généralité sont souvent des obstacles difficiles à franchir. Celui-ci ne vise pas à la plus grande généralité, mais aux objets et concepts primordiaux, en ne développant que les outils strictement nécessaires, dans un cadre simple. Il est cependant, le plus souvent, sans concession mathématique. La rigueur est le prix à payer pour disposer de la puissance du calcul stochastique, mais il reste néanmoins que le calcul stochastique doit être utilisé aussi communément que le calcul différentiel classique de Newton.

La beauté de la théorie des diffusions ne saurait faire oublier les exigences de sa mise en œuvre pratique : comme toutes les autres formes de calcul, le calcul stochastique ne s'acquiert réellement qu'à force d'exercice. C'est pourquoi il nous a paru important, aussi bien dans notre enseignement oral que dans la présente édition, d'offrir à nos

étudiants et à nos lecteurs l'opportunité de développer une habileté technique en se confrontant à divers énoncés puis en comparant leur travail aux corrigés, généralement très détaillés, qui leur sont proposés. En outre, divers rappels et compléments utiles sont donnés au fil de cet ouvrage; certains auraient pu trouver leur place dans la première partie consacrée au cours, mais nous avons fait le choix de les présenter sous forme d'exercices. Divers sujets de problèmes sont proposés en annexe; à la suite de chacun d'eux, une proposition de correction est développée. Il s'agit en fait d'énoncés d'examens, composés dans le cadre de notre enseignement.

Les diverses applications du calcul stochastique soulèvent rapidement la question de la simulation des diffusions apparaissant dans les modèles étudiés. En outre, c'est souvent en cherchant à simuler un processus que l'on comprend plus en détail son mode de construction. C'est pourquoi nous avons voulu consacrer les chapitres 7 et 14 à une introduction à ce vaste sujet. Le lecteur y trouvera un guide des premiers pas avec le logiciel Matlab puis des exercices de simulation de diffusions «classiques», accompagnés de propositions de codes en Matlab. Les figures qui illustrent cet ouvrage ont été obtenues à l'aide de tels codes.

Ce livre s'adresse aux élèves de master qui ont déjà suivi, à l'université ou en école d'ingénieur, un cours de probabilité avec théorie de la mesure et de l'intégration abstraite : étudiants en mathématiques financières, en statistique, en probabilité dans une filière théorique ou appliquée, en physique théorique ou statistique.

Le livre s'articule en deux parties : I. Cours ; II. Exercices, énoncés et corrigés. Nos expériences pédagogiques nous ont conduits à préférer cette forme dans l'intérêt du lecteur. Au final, l'exposé du cours est linéaire, il est conçu pour se lire sans devoir nécessairement remettre à plus tard la lecture de certains paragraphes. La deuxième partie du livre rassemble les énoncés des exercices et leurs corrigés détaillés; par sa variété, sa progressivité et son aspect complet, elle est, pensons-nous, unique dans le domaine. De nombreux renvois et références rendent les deux parties parfaitement complémentaires. Le découpage en chapitre est identique dans les deux parties.

Les aspects essentiels que nous abordons sont : le mouvement brownien, les martingales continues, les équations différentielles stochastiques, les liens avec les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, la simulation des diffusions. Nous avons détaillé certains exemples : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le filtrage de Kalman, la diffusion de Feynman-Kac, la diffusion de Smoluchowski – en particulier sous l'aspect de la réversibilité –, une version simplifiée de l'algorithme de recuit simulé. Pour les équations différentielles stochastiques, nous avons aussi privilégié l'aspect modélisation. Nous nous sommes volontairement abstenu d'aborder les changements de temps, la théorie spécifique des équations différentielles stochastiques unidimensionnelles, celle du temps local. Nous avons volontairement sacrifié l'exhaustivité à la simplicité et la clarté.

C'est le lieu pour nous de remercier d'abord Jean-François Le Gall et Gabriel Ruget qui nous ont fait découvrir le mouvement brownien et les modèles de diffusion avec enthousiasme. Francis Comets a beaucoup appris de Jacques Neveu et Étienne Pardoux à l'occasion d'enseignements communs à l'École Polytechnique. Nous remercions

Laure Élie qui nous a donné l'opportunité de faire cet enseignement en DEA à Paris 7, où Thierry Meyre a aussi collaboré avec Mireille Chaleyat-Maurel. Nous remercions Dominique Prochasson pour ses critiques et remarques sur le manuscrit du cours. Thierry Meyre remercie Marc Hoffmann avec lequel il a partagé de sympathiques séances de travaux pratiques en Matlab. Enfin, ce livre ne serait pas écrit sans l'attention, la réactivité et la bonne humeur de nos étudiants de DEA : ils ont fortement motivé sa rédaction, nous espérons que leurs successeurs leur donneront raison et qu'ils pourront évoquer ensemble quelques anecdotes et souvenirs lors de la traditionnelle « réunion des anciens ».

La deuxième et maintenant la troisième édition de cet ouvrage ont été pour nous autant d'occasions de rectifier des inexactitudes – dont certaines signalées par nos lecteurs auxquels nous sommes reconnaissants – et de renouveler une partie des exercices et problèmes. Cette nouvelle édition est notamment complétée par les exemples fondamentaux de processus gaussiens et leurs propriétés au second ordre. Nous remercions vivement nos collègues François Delarue, Mathieu Merle et Justin Salez, pour leurs contributions à cette nouvelle édition, ainsi que Laurence Carassus pour ses suggestions.

PARTIE 1



COURS

Chapitre 1

Introduction : processus aléatoire

Dans ce court chapitre, nous donnons quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les processus aléatoires. Nous nous limitons au strict nécessaire pour la suite du livre, bien loin d'entrer dans une étude systématique qu'on pourra trouver dans [9, 16, 18].

1.1 DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, et (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Soit \mathbb{T} un ensemble, par exemple $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^d$. On considère une application

$$\begin{aligned} X : \mathbb{T} \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega). \end{aligned}$$

On lui associe, pour tout $t \in \mathbb{T}$, sa coordonnée d'indice t , notée X_t ou encore $X(t)$, qui est définie comme l'application $\omega \mapsto X(t, \omega)$ de Ω dans E . On dira que X est un processus aléatoire X défini sur Ω , indexé par \mathbb{T} et à valeurs dans E si ses coordonnées sont des variables aléatoires sur Ω , i.e., si

$$X(t) : \omega \mapsto X(t, \omega) \text{ est une variable aléatoire pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Ce cadre englobe à la fois le cas où $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} – on dit alors aussi que X est une suite aléatoire –, le cas où $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}_+ – on dit alors que X est une fonction aléatoire –, et celui où $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^d$ ou \mathbb{R}^d – on dit que X est un champ aléatoire. Bien sûr, dans le cas d'un ensemble d'indice fini $\mathbb{T} = \{1, \dots, n\}$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur

aléatoire, et le lecteur gardera à l'esprit ce cas simple, pour le mettre en regard du cas général.

Exemple 1.1. a) Avec $\xi_i, i \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles sur Ω , et $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles

$$X(t, \omega) = \sum_{i \leq t} \xi_i$$

intervient dans de nombreux problèmes.

b) Considérons des fréquences $f_k > 0$, des modulations d'amplitude $\lambda_k > 0$ avec $\sum_k \lambda_k < \infty$, et

$$X(t, \omega) = \sum_{k \geq 1} \lambda_k A_k(\omega) \sin\{2\pi f_k t + \phi_k(\omega)\}, \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

avec une suite indépendante identiquement distribuée $(A_k, \phi_k)_k$ définie sur Ω à valeurs $(0, 1] \times (-\pi, \pi]$. La fonction aléatoire X est la superposition d'ondes avec amplitudes et phases aléatoires, c'est un modèle couramment utilisé en théorie du signal.

1.2 LOI DES PROCESSUS ALÉATOIRES

En particulier, on désire considérer la trajectoire de X , i.e., l'application (encore notée X) : $\omega \mapsto (X(t, \omega))_{t \in \mathbb{T}}$, de Ω dans l'ensemble $E^{\mathbb{T}}$ des applications de \mathbb{T} dans E .

Rappelons que la tribu produit $\bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$ est la tribu sur $E^{\mathbb{T}}$ engendrée par les cylindres mesurables de dimension finie, i.e., les sous-ensembles de $E^{\mathbb{T}}$ de la forme

$$C = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t, \quad \text{avec } A_t \in \mathcal{E} \text{ et } \text{Card}\{t : A_t \neq E\} < \infty. \quad (1.2.2)$$

On peut vérifier que si X est un processus aléatoire, sa trajectoire $\omega \mapsto (X(t, \omega))_{t \in \mathbb{T}}$ est mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(E^{\mathbb{T}}, \bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E})$. On appelle loi du processus aléatoire X la mesure de probabilité \mathbf{P}_X sur $\bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$, image de \mathbf{P} par X , définie par

$$\mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}(X \in A), \quad A \in \bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}.$$

Puisque la classe des cylindres mesurables de dimension finie engendre la tribu, et est stable par intersection finie, le théorème de la classe monotone (page 48 [25]) montre que la probabilité \mathbf{P}_X est déterminée par ses valeurs sur cette classe. Mais, si $C = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t$ est un cylindre et si t_1, \dots, t_n désignent les indices t pour lesquels $A_t \neq E$, la valeur de la probabilité $\mathbf{P}_X(C)$ s'exprime à l'aide de la loi du vecteur fini-dimensionnel $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, puisque

$$\mathbf{P}_X(C) = \mathbf{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A_{t_1} \times \dots \times A_{t_n}).$$

Ainsi, la loi de X est déterminée par ses marginales fini-dimensionnelles. Si $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un autre processus aléatoire dans E , et si $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ a même loi que $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ pour tout n et tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$, les deux processus sont égaux en loi.

Réciproquement, à toute loi de probabilité Q sur $\bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$ correspond un processus au moins : considérons $\Omega = E^{\mathbb{T}}$, $\mathcal{A} = \bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$, $\mathbf{P} = Q$, et le processus $X = (X_t)_t$, appelé *processus canonique* défini par $X_t : \omega = (\omega_s)_{s \in \mathbb{T}} \mapsto \omega_t$. (Il s'agit bien d'un processus, car l'application projection X_t est mesurable.) Alors, le processus X est simplement l'identité sur Ω , et sa loi est $X \circ \mathbf{P} = Q$.

Indépendance de deux processus : par définition, les processus $X = (X_t, t \in \mathbb{T})$ et $Y = (Y_s, s \in \mathbb{S})$ définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont dits indépendants si et seulement si les tribus engendrées, $\sigma(X) = \sigma(X_t, t \in \mathbb{T})$ et $\sigma(Y)$, le sont. Puisque $\sigma(X)$ est engendrée par les ensembles $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$ pour $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, n \geq 1$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} X, Y \text{ indépendants} &\iff \mathbf{P}_{(X,Y)} = \mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y \\ &\iff (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ et } (Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m}) \text{ indépendants} \\ &\iff \forall n, t_1, \dots, t_n, m, s_1, \dots, s_m, \end{aligned}$$

i.e., si on a l'indépendance de tous les vecteurs fini-dimensionnels extraits de X et de Y .

Il existe plusieurs notions de **continuité** de fonction aléatoire réelle, mais celle-ci est la plus importante pour nous. Dorénavant, $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Définition 1.1. Une fonction aléatoire réelle continue est une fonction aléatoire réelle $X : (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}$, telle que

$$t \mapsto X(t, \omega) \text{ est continue } \forall \omega .$$

On considérera aussi des fonctions aléatoires réelles presque sûrement (p.s.) continues, i.e., telles que la propriété ci-dessus soit vraie pour \mathbf{P} -presque tout ω , et notre propos s'applique à ces fonctions aléatoires réelles p.s. continues sans modification. Notant $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{T} dans \mathbb{R} , il est plus naturel de définir, vu la continuité, la trajectoire $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$ de X comme l'application (toujours notée X) de Ω dans \mathcal{C} . Mais \mathcal{C} possède une topologie naturelle, et le résultat suivant montre que cette application est borélienne. Munissons $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|x - y\|_{\infty} = \max_{t \in \mathbb{T}} |x(t) - y(t)|$ si \mathbb{T} est un intervalle fermé borné, et sinon, de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de \mathbb{T} . Considérons enfin la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ sur \mathcal{C} .

Définition 1.2. Si X est une fonction aléatoire réelle continue, l'application

$$X : \omega \mapsto X(\cdot, \omega) .$$

est mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}))$. On appellera loi de la fonction aléatoire réelle continue X la loi image de \mathbf{P} par X sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C})$.

Démonstration. (que l'on pourra passer en première lecture) : Montrons que la trace sur \mathcal{C} de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{T}}$ coïncide avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, ce qui entraîne la mesurabilité.

(i) L'inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{T}} \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$: pour tout t , l'application coordonnée $x \mapsto x(t)$ de \mathcal{C} dans \mathbb{R} est continue – car liptchitzienne de rapport 1 dans la norme uniforme –, donc borélienne. Mais la tribu produit étant la plus petite tribu rendant les projections mesurables, on a l'inclusion voulue.

(ii) Réciproquement, la tribu borélienne est engendrée par les ouverts, et puisque \mathcal{C} est séparable, elle est engendrée par les boules ouvertes, ou encore par les boules fermées. Mais on peut écrire toute boule fermée $B(y, \varepsilon)$ de centre $y = (y(t), t \in \mathbb{T})$ et rayon $\varepsilon > 0$ sous la forme

$$\begin{aligned} B(y, \varepsilon) &= \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \{x \in \mathcal{C} : |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{n > 0} \bigcap_{t \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}} \{x \in \mathcal{C} : |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon + 1/n\} \end{aligned}$$

par continuité de x et y . La dernière écriture montre que les boules fermées sont dans la tribu produit. \square

1.3 EXISTENCE DE PROCESSUS ALÉATOIRES

Pour nous assurer de l'existence de processus élémentaires, rappelons deux résultats classiques. Le premier affirme l'existence d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi prescrite.

Théorème 1.1. *Soit (E, \mathcal{E}, ρ) un espace probabilisé quelconque. Il existe une unique probabilité P sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}})$ telle que $P(C) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n)$ pour tout cylindre mesurable $C = \prod_n A_n$.*

Voir [22], p. 149, pour une démonstration. En ajoutant une hypothèse sur l'espace de base E , on peut construire des familles i.i.d. infinies mais non dénombrables, comme le montre le deuxième résultat.

Si Q est une probabilité sur $E^{\mathbb{T}}$ et $J \subset \mathbb{T}$, on note $Q|_J$ la projection de Q sur E^J , i.e., l'image de Q par la projection de $E^{\mathbb{T}}$ sur E^J . On a bien sûr la propriété de compatibilité : si $I \subset J$, $(Q|_J)|_I = Q|_I$.

Théorème 1.2. *(de prolongement de Kolmogorov.) Soit \mathbb{T} un ensemble d'indice quelconque, et E un espace polonais (i.e., métrisable, séparable, complet). Considérons une famille Q_I de probabilités sur $\mathcal{B}(E)^{\otimes I}$ indexée par les sous-ensembles finis I de \mathbb{T} , qui soit compatible au sens où*

$$(Q_J)|_I = Q_I, \quad I \subset J \subset \mathbb{T}, J \text{ fini}.$$

Alors, il existe une unique probabilité R sur la tribu borélienne de $E^{\mathbb{T}}$ telle que $R|_I = Q_I$, $I \subset \mathbb{T}$ fini.

Voir [22], p. 79, pour une démonstration. Nous allons plutôt donner ici un exemple d'application.

Si X est un processus aléatoire réel indexé par \mathbb{T} , arbitraire mais de carré intégrable (i.e., $\mathbf{E}X(t)^2 < \infty, t \in \mathbb{T}$), on définit ses fonctions de moyenne m et de covariance Γ ,

$$m(t) = \mathbf{E}X(t), \quad \Gamma(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t)).$$

Notons que Γ est nécessairement symétrique de type positif, c'est-à-dire que toute matrice carrée extraite de Γ est symétrique positive. On dira qu'une fonction Γ de $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ est *symétrique de type positif* si

$$\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s), \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i u_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0 \quad \forall n \geq 1, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}.$$

Notons que dans le cas où Γ est une fonction de covariance, cette dernière somme vaut $\text{Var}(\sum_i u_i X(t_i)) \geq 0$.

Exemple 1.2. (Existence de processus gaussiens, voir définition ci-dessous)

Soit $m : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$, et $\Gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction symétrique de type positif. Alors, il existe un processus gaussien X indexé par \mathbb{T} , de moyenne m et covariance Γ . Il est unique en loi, sa loi est appelée *loi normale* de moyenne m et covariance Γ , notée $\mathcal{N}_{\mathbb{T}}(m, \Gamma)$.

En effet, pour un sous-ensemble fini $I \subset \mathbb{T}$, considérons le vecteur $m_{|I} = (m(t); t \in I)$, et la matrice $\Gamma_{|I} = [\Gamma(s, t); s, t \in I]$, qui est symétrique positive par hypothèse : il est bien connu que la loi normale $Q_I = \mathcal{N}_I(m_{|I}, \Gamma_{|I})$ existe sur \mathbb{R}^I . D'autre part, si $I \subset J \subset \mathbb{T}$ sont finis, soit Y un variable aléatoire indexé par J de loi Q_J ; la projection de Q_J sur \mathbb{R}^I est la loi de la restriction $(Y(t), t \in I)$, qui est encore un vecteur gaussien d'après les propriétés classiques des vecteurs gaussiens, il a pour moyenne $(m_{|J})_{|I} = m_{|I}$ et matrice de covariance $[\Gamma_{|J}]_{|I} = \Gamma_{|I}$. Finalement, $(Q_J)_I = Q_I$, et d'après le théorème 1.2, il existe une loi Q sur $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ dont les projections sont les Q_I . Pour montrer son unicité, il suffit de remarquer qu'une telle loi est définie par ses projections fini-dimensionnelles, et que la loi $\mathcal{N}(m_{|I}, \Gamma_{|I})$ est unique.

1.4 ESPACES GAUSSIENS

Voici quelques rappels : la densité gaussienne d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$ est la fonction

$$g_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

On écrira g_{σ^2} au lieu de g_{0, σ^2} pour simplifier les notations. La loi de densité g_{m, σ^2} sur \mathbb{R} est notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et appelée loi normale (ou gaussienne) de moyenne m et variance σ^2 . Une variable aléatoire réelle X est dite gaussienne si elle suit une densité

gaussienne, ou si elle est p.s. constante ; dans ce dernier cas, on note m cette constante, $\sigma = 0$ et $\mathcal{N}(m, 0)$ la loi – de manière consistante. Sa fonction caractéristique est

$$\mathbf{E} \exp\{iuX\} = \exp\{ium - \sigma^2 u^2/2\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_i u_i X_i$ de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne. On constate aisément que, notant $m = \mathbf{E}(X)$ et $\Gamma = \text{Cov}(X)$ la matrice de covariance de taille $n \times n$, alors la fonction caractéristique de X est

$$\mathbf{E} \exp\{iu \cdot X\} = \exp\{iu \cdot m - \frac{1}{2} u^* \Gamma u\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

avec u^* le transposé du vecteur u .

Définition 1.3. Une fonction aléatoire réelle $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ est dite gaussienne si tout vecteur fini-dimensionnel $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ (avec $n \geq 1$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ arbitraires), est gaussien.

La loi de la fonction aléatoire réelle X , définie par les lois des vecteurs fini-dimensionnels qui sont eux-mêmes caractérisés par moyenne et variance, est donc entièrement spécifiée par les fonctions de moyenne $m(t)$ et de covariance $\Gamma(s, t)$.

Pour étudier les processus gaussiens, il est souvent utile d'utiliser la force de la théorie hilbertienne. Voici un exemple.

Par définition, si X est une fonction aléatoire gaussienne, l'espace vectoriel engendré par les composantes de X ,

$$\text{Vect}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i X(t_i); n \geq 1, u_i \in \mathbb{R}, t_i \in \mathbb{T}, i \leq n \right\}$$

est constitué de variables aléatoires gaussiennes. C'est donc un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui lui-même est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $Y, Z \mapsto \langle Y, Z \rangle = \mathbf{E}(XY)$. L'adhérence $\overline{\text{Vect}(X)}^{L^2}$ de $\text{Vect}(X)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est encore un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, il est fermé dans cet espace de Hilbert : il est lui-même un espace de Hilbert, en restreignant le produit scalaire à $\overline{\text{Vect}(X)}^{L^2}$. Ses éléments sont des variables aléatoires gaussiennes, car elles sont L^2 -limites de variables aléatoires gaussiennes. En effet, une propriété bien connue est que toute limite en loi de variables aléatoires gaussiennes est encore gaussienne.

Définition 1.4. (i) Un sous-espace vectoriel fermé H de L^2 est appelé espace gaussien, s'il est constitué de variables aléatoires gaussiennes centrées.

(ii) Soit X une fonction aléatoire gaussienne. L'espace gaussien H^X associé à X est

$$H^X = \overline{\text{Vect}(X(t) - \mathbf{E}X(t); t \in \mathbb{T})}^{L^2}.$$

Lorsque X est centré, c'est le plus petit sous-espace gaussien contenant toutes les composantes de X .

Supposons à présent que X est une fonction aléatoire réelle gaussienne, indexée par $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, continue en moyenne quadratique, i.e.,

$$t \mapsto X(t), \text{ est continue de } \mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$$

Cette propriété de continuité de X entraîne que l'espace H^X est séparable : on constate facilement que le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par la famille dénombrable $(X(t) - \mathbf{E}X(t); t \in \mathbb{Q})$ est dense dans H^X muni de sa norme. L'espace H^X est donc un Hilbert séparable, il possède une suite orthonormée $(\xi_n; n \in \mathbb{N})$. Remarquons que les variables aléatoires $\xi_n = \xi_n(\omega)$ sont gaussiennes centrées – car éléments de H^X –, de variance 1 – car elles sont normées –, et non corrélées – car $\text{Cov}(\xi_n, \xi_m) = \langle \xi_n, \xi_m \rangle = 0$ – donc indépendantes – puisque la suite $(\xi_n)_n$ de H^X est une suite conjointement gaussienne. Ainsi, les $\xi_n, n \geq 0$, forment tout simplement une suite indépendante et identiquement distribuée de loi gaussienne centrée réduite. Réciproquement, pour une telle suite, le sous-espace fermé engendré par cette suite est un espace gaussien séparable.

Développons maintenant $X(t) - \mathbf{E}X(t)$ sur cette base orthonormée :

$$X(t) = \mathbf{E}X(t) + \sum_n c_n(t) \xi_n(\omega) \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4.3)$$

avec les coefficients donnés par

$$c_n(t) = \langle X(t) - \mathbf{E}X(t), \xi_n \rangle = \mathbf{E}X(t) \xi_n.$$

Cette décomposition s'appelle la *formule de Karhunen-Loève*. Il convient de remarquer que X s'écrit comme somme d'une série de produits d'une fonction de t seulement, et d'une fonction de ω seulement. Nous la retrouverons dans le chapitre suivant, lors de la construction du mouvement brownien, plus précisément à la formule (2.3.4).

1.5 EXEMPLES DE PROCESSUS GAUSSIENS

Les propriétés des fonctions aléatoires se traduisent directement sur leurs fonctions de moyenne et de covariance. Commençons par des définitions dans le cadre général, pas nécessairement gaussien.

Définition 1.5. Une fonction aléatoire X indexée par $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} est stationnaire si pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$,

$$(X(t_0 + t); t \in \mathbb{T}) \text{ a même loi que } (X(t); t \in \mathbb{T}).$$

Ainsi, la loi d'un processus stationnaire ne dépend pas de l'origine du temps. Si on le translate dans le temps, il a toujours la même loi.

Supposons de plus X de carré intégrable. Comme $X(t)$ a même loi que $X(0)$, $m(t) = \mathbf{E}X(t)$ est constante égale à $m(0)$, et comme le couple $(X(t), X(s))$ a même

loi que $(X(t-s), X(0))$, on a aussi $\mathbf{E}[X(t)X(s)] = \mathbf{E}[X(t-s)X(0)] = \mathbf{E}[X(s)X(t)]$.
Finalement,

$$\Gamma(s, t) = r(s - t)$$

pour une fonction r (i.e., $r(u) = \Gamma(u, 0)$) telle que

$$r(-s) = r(s), \quad \sum_{i,j=1}^n u_i u_j r(t_i - t_j) \geq 0, \quad (1.5.4)$$

pour tout $n \geq 1$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$. Une telle fonction est appelée positive semi-définie.

Remarque. Si X est un processus stationnaire défini sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ seulement, on peut le prolonger en un processus stationnaire \tilde{X} défini sur tout \mathbb{R} dont la restriction à \mathbb{R}_+ soit égale en loi à X . En effet, $\tilde{X}_n(t) = X(n+t)$, $t \geq -n$ définit une suite de processus sur l'intervalle de temps $[-n, +\infty)$ dont les lois constituent une famille consistante de probabilités et coïncidant avec celle de X sur \mathbb{R}_+ . Le théorème 1.2 nous assure de l'existence de \tilde{X} .

Dans la suite nous considérerons des processus stationnaires ou à accroissements stationnaires, que l'on pourra donc supposer définis sur \mathbb{R} en toute généralité.

Définition 1.6. *Un processus X est à accroissements indépendants si pour tout $n \geq 1$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in \mathbb{T}$, les accroissements $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendants.*

Alors, la covariance est fonction du minimum $s \wedge t = \min\{s, t\}$,

$$\Gamma(s, t) = \bar{r}(s \wedge t), \quad (1.5.5)$$

avec $\bar{r}(s) = \Gamma(s, s)$. En effet, si $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \Gamma(s, t) &= \text{Cov}(X(s), X(s) + [X(t) - X(s)]) \\ &= \text{Cov}(X(s), X(s)) + \text{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) \\ &= \Gamma(s, s) + 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, un processus gaussien dont la fonction de covariance est de la forme (1.5.5) est nécessairement à accroissements indépendants.

Une autre propriété intéressante est la suivante.

Définition 1.7. *Un processus X est dit à accroissements stationnaires si pour $s < t \in \mathbb{T}$, $X(t) - X(s)$ a même loi que $X(t-s) - X(0)$.*

Un théorème de S.Bochner [4, Th. 2.1.3] caractérise les fonctions continues positives semi-définies sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, voir (1.5.4), comme les transformées de Fourier des

mesures positives finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Rappelons qu'une mesure est dite symétrique si $\mu(A) = \mu(-A)$ pour tout borélien. Dans notre cadre, ce résultat s'énonce ainsi :

Théorème 1.3. (Bochner) Soit X un processus stationnaire sur \mathbb{R} , continu en moyenne quadratique et $r(t) = \text{Cov}(X(s), X(s+t))$. Il existe une unique mesure positive μ , symétrique de masse totale finie sur la tribu borélienne, telle que

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x). \quad (1.5.6)$$

Elle est appelée mesure spectrale du processus X . Si $r \in L^1$, la mesure spectrale a une densité sur \mathbb{R} donnée par la formule d'inversion de Fourier

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} r(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

appelée densité spectrale de X .

Venons-en à présent aux exemples fondamentaux de processus gaussiens, notamment les exemples 1.4, 1.5 et 1.6 que nous rencontrerons tout au long du livre. La moyenne sera toujours supposée nulle, nous caractérisons donc la loi en donnant la fonction de covariance.

Exemple 1.3. (Processus à spectre fini) Soient $\omega_0 = 0 < \omega_1 < \dots < \omega_p$ pour un entier $p \geq 0$, et $\sigma_0 \geq 0, \sigma_1, \dots, \sigma_p > 0$. Considérons des variables aléatoires indépendantes gaussiennes $U_0, U_1, V_1, \dots, U_p, V_p$ de loi $U_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$ pour $k = 0, \dots, p$ et $V_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$ pour $k = 1, \dots, p$. La fonction aléatoire

$$X(t) = U_0 + \sum_{k=1}^p [U_k \cos(\omega_k t) + V_k \sin(\omega_k t)]$$

est gaussienne, elle s'écrit sous la forme (1.1.1)

$$X(t) = U_0 + \sum_{k=1}^p (U_k^2 + V_k^2)^{1/2} \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

avec $\phi_k \in [-\pi, \pi[$ donné par $e^{i\phi_k} = (U_k^2 + V_k^2)^{-1/2} (U_k + iV_k)$. Ainsi, X est combinaison linéaire de processus périodiques à fréquences déterministes, à amplitudes et déphasages aléatoires (le lecteur pourra vérifier que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes entre elles, les ϕ_k sont uniformément distribuées sur $[-\pi, \pi[$ et les $U_k^2 + V_k^2$ sont de loi exponentielle d'espérance $2\sigma_k^2$). On calcule sa fonction de covariance en utilisant l'indépendance

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X(s), X(t)) \\ &= \text{Var}(U_0) + \sum_{k=1}^p [\text{Var}(U_k) \cos(\omega_k s) \cos(\omega_k t) + \text{Var}(V_k) \sin(\omega_k s) \sin(\omega_k t)] \\ &= r(t - s) \end{aligned}$$

avec $r(t) = \sigma_0^2 + \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 \cos(\omega_k t)$. Ainsi le processus X est stationnaire, et sa mesure spectrale

$$\mu = \sigma_0^2 \delta_0 + \sum_{k=1}^p \frac{\sigma_k^2}{2} (\delta_{\omega_k} + \delta_{-\omega_k})$$

est portée par les fréquences $\omega_k/2\pi$ présentes dans la fonction X . Un tel processus est appelé processus à spectre fini. Si X représente un signal optique ou hertzien, l'ensemble des fréquences ω_k des composantes périodiques porte en physique le nom de spectre et σ_k^2 celui de l'énergie de la fréquence correspondante. L'espace gaussien H^X associé au processus gaussien X par la définition 1.4 est de dimension finie : si $\sigma_0 > 0$, il est donné par

$$H^X = \text{Vect}\{U_0, U_1, V_1, \dots, U_p, V_p\}$$

Exemple 1.4. Le mouvement Brownien $B = (B(t); t \in \mathbb{R}_+)$, avec

$$\Gamma(s, t) = \mathbf{E}[B(t)B(s)] = s \wedge t.$$

Nous anticipons sur la définition 2.1 et la proposition 2.1. Ses accroissements sont indépendants, et ils sont aussi stationnaires : pour $0 \leq s \leq t$, la variance de l'accroissement

$$\text{Var}(X(t) - X(s)) = t - s$$

ne dépend que de la longueur de l'intervalle de temps, et la moyenne est nulle ; ainsi la loi de l'accroissement est $\mathcal{N}(0, t - s)$, elle ne dépend que de la longueur $t - s$ de l'intervalle de temps.

Par ailleurs, le mouvement Brownien possède une propriété d'invariance par changement d'échelle : pour tout $a \neq 0$, $Y(t) = a^{-1}B(a^2t)$ définit un processus Y qui a même loi que B .

Exemple 1.5. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire : $T = \mathbb{R}$ et

$$\Gamma(s, t) = \exp\{-|s - t|\}.$$

La covariance est fonction de la différence $t - s$, le processus est donc stationnaire. Suivant le théorème 1.3, on calcule sa densité spectrale :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-itx} e^{+t} dt + \int_0^{\infty} e^{-itx} e^{-t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{it - 1} + \frac{1}{it + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi(1 + t^2)}, \end{aligned}$$

i.e. la densité de Cauchy sur \mathbb{R} . Au contraire des processus à spectre fini de l'exemple 1.3, toutes les fréquences sont présentes dans le spectre, et l'espace gaussien associé est de dimension infinie.

Exemple 1.6. Le pont Brownien : $\Gamma(s, t) = s \wedge t - st$ sur $T = [0, 1]$.

C'est un mouvement Brownien sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ que l'on "force" à retourner au point de départ au temps 1 ($X(0) = X(1) = 0$). Pour souligner l'effet du forçage on peut écrire la covariance sous la forme $R(s, t) = s \times (1 - t)$ où il est clair que X est constant aux temps 0 et 1.

Exemple 1.7. Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice $H \in (0, 1]$: il est défini sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, sa covariance est

$$\Gamma(s, t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Il dépend d'un paramètre $H \in (0, 1]$, l'indice de Hurst, qui module la régularité et la corrélation du mouvement Brownien fractionnaire.

(i) Le mouvement Brownien fractionnaire X possède une belle propriété d'invariance par changement d'échelle : pour toute constante $a > 0$,

$$Y = X \quad \text{en loi, avec} \quad Y(t) = a^{-H} X(at).$$

En effet, Y ainsi défini est gaussien, centré, de covariance Γ . Il a donc même loi que X .

(ii) Le mouvement Brownien fractionnaire est à accroissements stationnaires. La loi de $X(t) - X(s)$ est

$$X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, |t - s|^{2H}).$$

(iii) Pour $H = 1/2$, X est tout simplement le mouvement Brownien (cf. exemple 1.4).

(iv) Pour $H = 1$, on a $X(t) = tZ$ où la variable Z est indépendante de t et donnée par $X(1)$, de loi gaussienne centrée réduite.

(v) Les accroissements de X ne sont pas indépendants, sauf dans le cas $H = 1/2$.

(vi) On peut mesurer la corrélation entre les accroissements de X par

$$\begin{aligned} \rho(n) &= \text{Cov}(X(1) - X(0), X(n+1) - X(n)) \\ &= \frac{1}{2} \{ (n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H} \}, \end{aligned}$$

qui se comporte comme $\rho(n) \sim H(2H - 1)n^{-2(1-H)}$ quand $n \rightarrow \infty$. On suppose $H \neq 1/2$ et on distingue deux cas :

- Si $H > 1/2$, $\sum_n |\rho(n)| = \infty$: il y a dépendance à longue portée ;
- Si $H < 1/2$, $\sum_n |\rho(n)| < \infty$: le processus a une mémoire courte.

